3
A TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO

3.1. A solução de Nicomedes

Seja $\boldsymbol{B\hat{A}C}$ o ângulo que se deseja trissectar, de modo que se tenha um triângulo ***ABC***, de hipotenusa $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$. Prolongando a semirreta $\overrightarrow{AC}$ até um ponto ***D***, de tal modo que se tenha $\overline{CD} = \boldsymbol{2a}$ e com centro sobre um ponto qualquer da reta suporte do lado ***BC*** e raio **2*a***, são definidas circunferências cujas intersecções com as semirretas que partem de ***A*** e passam pelos seus respectivos centros determinam a *conchoide*.

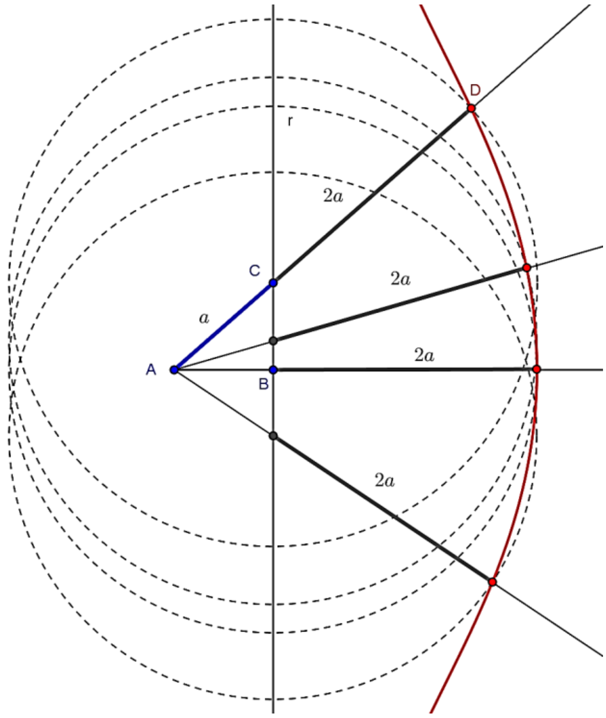

Figura 3: Trissecção pela *Conchoide* (1ª parte).

Se ***AB*** // ***CE***, então $C\hat{E}F = B\hat{A}F = \theta$ e, tomando o ponto ***M***, médio do segmento ***EF***, tem-se $\overline{FM} = \overline{EM} = \overline{AC} = \boldsymbol{a}$. Mas, ***CM*** é mediana relativa à hipotenusa ***EF*** do triângulo ***CEF***, logo $\overline{CM} = \boldsymbol{a}$ também.

Como $C\hat{M}F$ é ângulo externo relativo ao vértice M do triângulo ***CEM***, no qual $E\hat{C}M = C\hat{E}M = \theta$, então $C\hat{M}F = 2.E\hat{C}M = 2\theta$. Sendo ***ACM*** um triângulo isósceles, com $\overline{AC} = \overline{CM}$ então $C\hat{M}F = C\hat{A}F = 2\theta$.

Logo, $\boldsymbol{B\hat{A}C} = \boldsymbol{C\hat{A}F} + \boldsymbol{B\hat{A}F} = 2\theta + \theta = 3\theta$. Portanto, $\boldsymbol{B\hat{A}F}$ representa a trissecção de $\boldsymbol{B\hat{A}C}$ conforme a figura 4, construída a partir da figura 3.

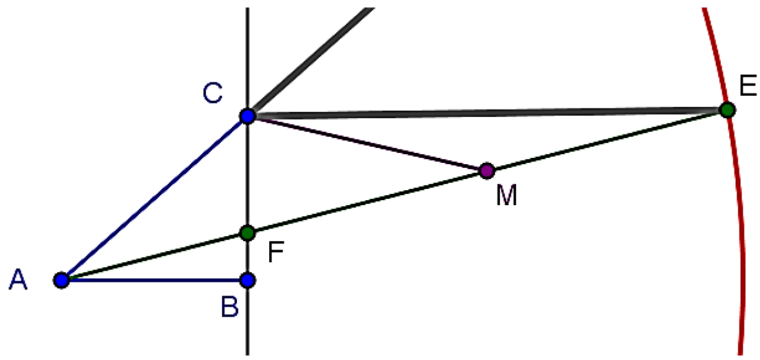

Figura 4: Trissecção pela *Conchoide* (2ª parte).

Um importante resultado dessa construção é a figura destacada abaixo, formada pelos triângulos considerados na resolução de Nicomedes. A trissecção ($B\hat{A}F = \frac{1}{3}B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}F = 2.B\hat{A}F$) decorre, portanto, do fato de $AB \,//\, CE \perp BC$ e $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{FM} = \overline{EM}$.

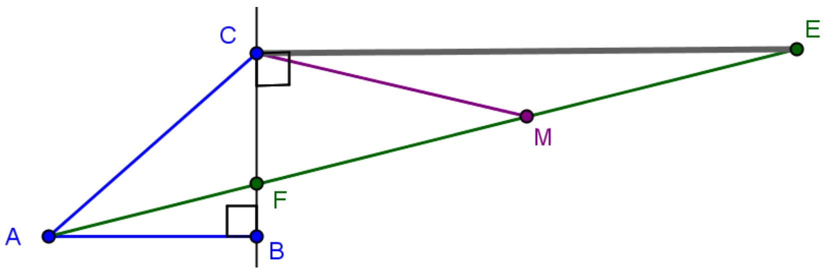

Figura 5: Trissecção sem a *Conchoide*.

Essa construção inspirou a elaboração de questões interessantes, propostas em conceituados livros de Geometria (ver [4, p. 98] e [5, p. 110]). Geralmente é apresentada uma figura com todas as características dadas acima, apenas omitindo o segmento CM, cobrando uma relação entre as medidas de $B\hat{A}F$ e $C\hat{A}F$. Para completar o enunciado, é dito que $\overline{EF} = 2.\overline{AC}$. Para quem não conhece a situação, essa é uma informação aparentemente desconexa. Daí, quando é traçado o segmento CM e aparecem os triângulos isósceles, o mistério acaba.

Foram capturadas as questões abaixo como exemplo. Em cada uma a solução se torna simples quando comparamos com o modelo trissector de Nicomedes.

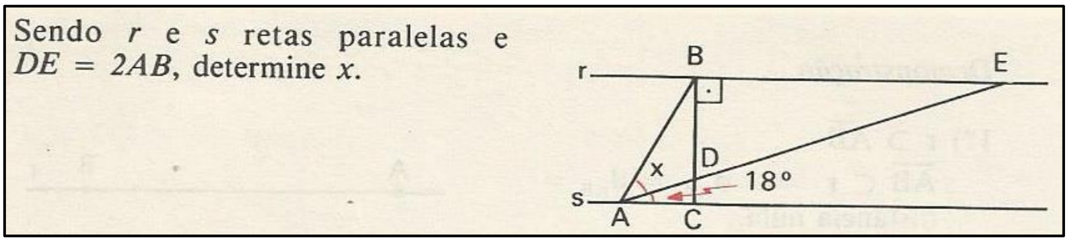

Figura 6: Questão em **[4]**.

Com a mesma simplicidade, a mediana ***BM***, relativa ao lado ***DE*** determina um triângulo isósceles ***ABM*** ($\overline{AB} = \overline{BM}$). Daí então, BÂD = 2.CÂD = 36°.

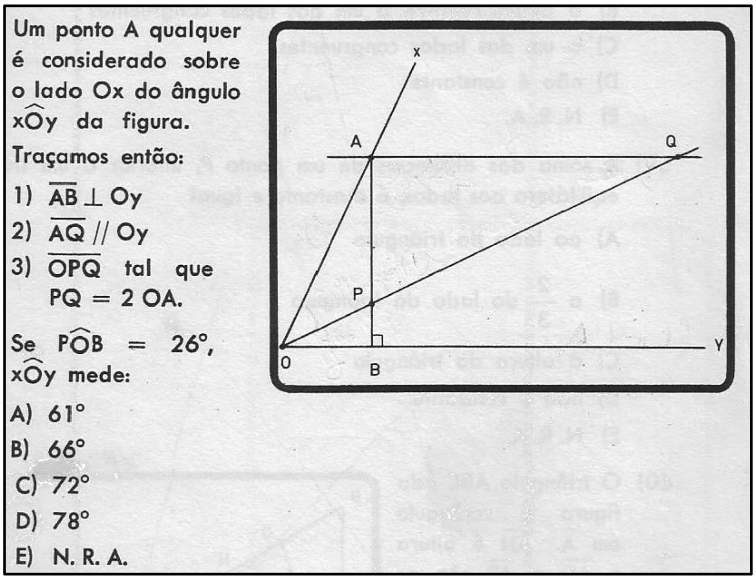

Figura 7: Questão em **[5]**.

Para resolvê-la, basta traçar a mediana relativa à hipotenusa ***PQ***. Assim, ***AÔB*** = 3.***PÔB*** = 78° (opção **D**).

3.2. As soluções de Arquimedes[1]

> Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada e objetiva. [6]

Uma das soluções de Arquimedes consistia em trissectar o ângulo $A\hat{O}B$ utilizando a construção *neusis*[2], fazendo coincidir o vértice do ângulo com o centro da circunferência e marcando os pontos ***A*** e ***B*** sobre a mesma. A seguir, devem ser determinados os pontos ***M*** e ***N***, o primeiro sobre a circunferência e o segundo no prolongamento de ***OA*** de modo que $\overline{MN} = \overline{OM} = \overline{OB}$. É importante ressaltar o quanto era imprecisa essa técnica, tendo em vista a necessidade de ajuste visual, com o auxílio de uma régua na qual eram feitas marcações auxiliares (passando a ser, de alguma forma, graduada), até chegar ao modelo idealizado.

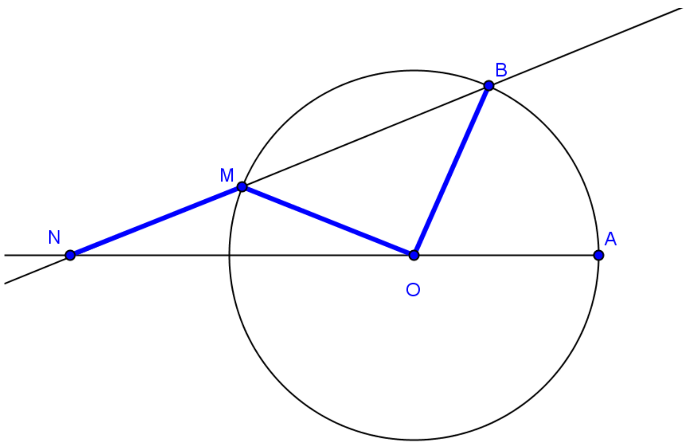

Figura 8: A trissecção através de *neusis*.

Pelo teorema do ângulo externo, aplicado nos triângulos OMN e ONB, respectivamente: $O\hat{M}B = O\hat{N}M + M\hat{O}N$ e $A\hat{O}B = O\hat{N}M + O\hat{B}M$. Além disso, $O\hat{N}M = M\hat{O}N$ e $O\hat{M}B = O\hat{B}M$, já que $\overline{MN} = \overline{OM} = \overline{OB}$. Daí, então, decorre

[1] Arquimedes de Siracusa viveu de 287 a.C. a 212 a.C. e foi um brilhante cientista grego ao qual foram atribuídas diversas descobertas e a famosa expressão: ***Eureka!***

[2] Em uma construção ***neusis*** deve-se ajustar um determinado segmento entre duas curvas dadas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto fixo, através de uma régua graduada.

que $O\hat{M}B = 2.O\hat{N}M$, logo, $A\hat{O}B = 3.O\hat{N}M$, concluindo que o ângulo $O\hat{N}M$ representa a trissecção de $A\hat{O}B$.

Mais uma vez a figura 5 utilizada por Nicomedes está envolvida no processo, mesmo de forma não muito evidente. Comparando as duas figuras, pode-se ter uma visão mais clara da proximidade dos raciocínios geométricos empregados nas demonstrações.

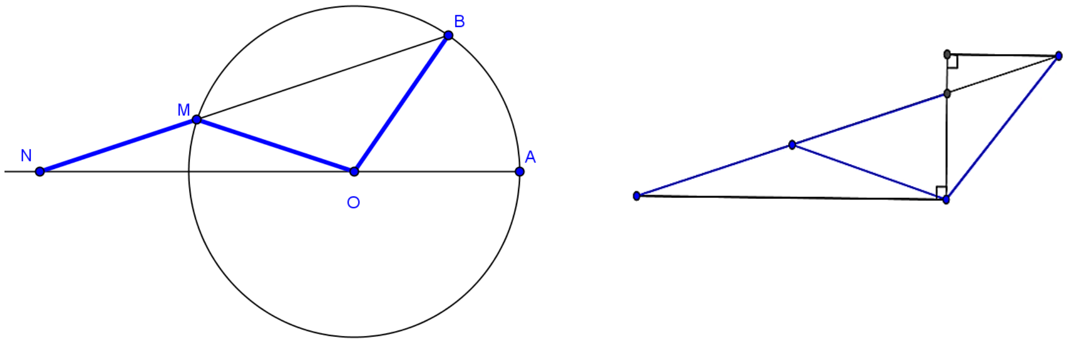

Figura 9: Comparação entre as figuras de Arquimedes e Nicomedes.

A outra solução teve como base a espiral de Arquimedes. Valorizando aspectos da Física, uma das áreas de atuação de seu criador, essa espiral pode ser definida conforme a citação:

> Fisicamente o espiral de Arquimedes pode ser descrito como o lugar geométrico dos pontos ***P*** de uma reta que gira em torno do centro O com velocidade angular constante e o ponto ***P*** se desloca sobre a reta e a partir de O com velocidade constante em relação a essa reta. [7]

Porém, na época de Arquimedes, não havia recursos para executar o movimento contínuo do ponto. Até mesmo hoje, os computadores provocam a ilusão de continuidade pela grande quantidade de pontos utilizados para construção. Mas ainda é realizada de forma discreta, como na época de sua concepção.

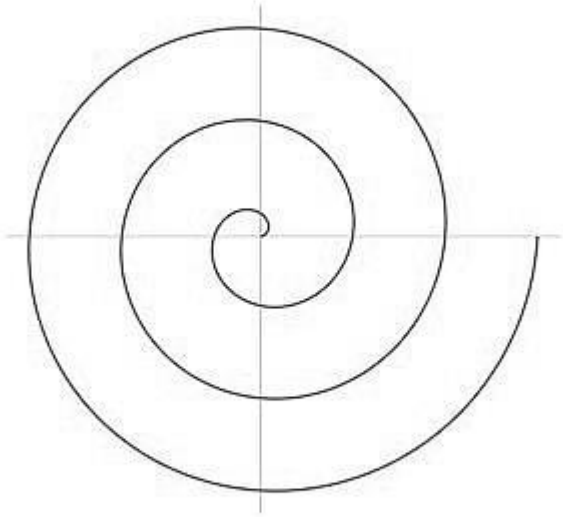

Figura 10: Espiral de Arquimedes construída com recursos computacionais.

O método de construção consiste primeiramente em dividir uma circunferência em *n* partes iguais, traçando os raios nos pontos divisores. Em seguida, deve-se fazer o mesmo com um dos raios traçados, obtendo *n* segmentos congruentes. Traçam-se, então, circunferências concêntricas passando pelos pontos divisores do raio tomado inicialmente. A espiral é a linha obtida, a partir do centro comum, ligando com segmentos de reta os pontos de intersecção dos raios traçados com as circunferências obtidas, sequencialmente, para a direita (dextrógira) ou esquerda (levógira).

Nas figuras apresentadas adiante foram traçados segmentos de reta para destacar a precariedade da construção inicial. Porém, de forma bastante intuitiva, havia um esforço no sentido de aumentar significativamente o número de divisões, tendendo para o que atualmente se define melhor com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

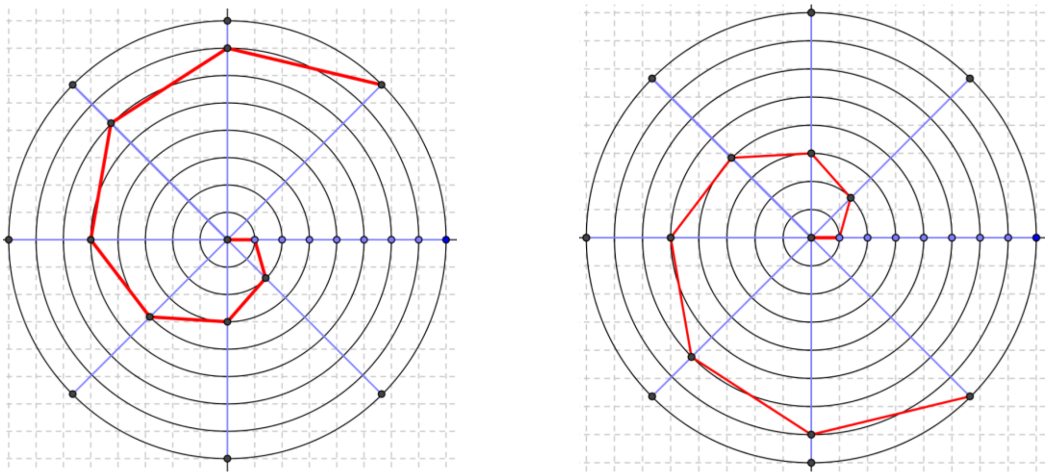

Figura 11: Espirais de Arquimedes com segmentos de retas.

A trissecção do ângulo $\boldsymbol{B\hat{A}C}$, feita com o uso da espiral de Arquimedes, inicia-se com a marcação dos pontos $\boldsymbol{C}_1$ e $\boldsymbol{C}_2$ dividindo $\boldsymbol{AC}$ em três partes iguais. Mas, pela definição da espiral, os comprimentos dos arcos entre dois pontos são proporcionais aos dos segmentos que unem suas extremidades. Por isso, com centro em $\boldsymbol{A}$ e raios $\boldsymbol{AC}_1$ e $\boldsymbol{AC}_2$ são traçados dois arcos de circunferência, cujas intersecções com a espiral ocorrem nos pontos $\boldsymbol{P}_1$ e $\boldsymbol{P}_2$, respectivamente. Prolongando os segmentos $\boldsymbol{AP}_1$ e $\boldsymbol{AP2}_2$ são obtidos três ângulos de mesma medida.

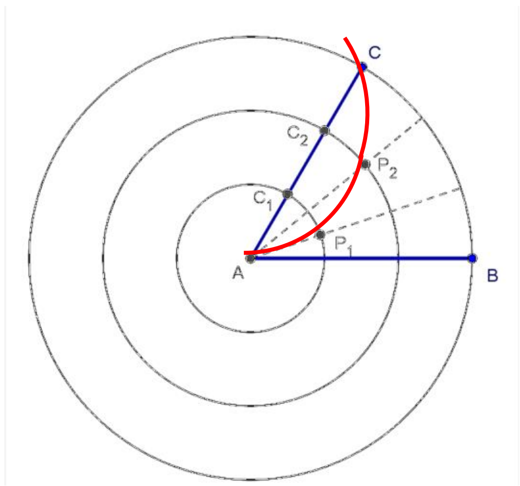

Figura 12: Trissecção através da espiral de Arquimedes.

3.3. A impossibilidade da trissecção

Durante séculos foram empregados métodos diversos para a trissecção de ângulos. Pela incansável busca sem resultados contundentes, muitos geômetras já admitiam ser essa uma tarefa impossível com o uso de apenas régua não graduada e compasso.

Um grande passo para se chegar à prova dessa impossibilidade veio da Geometria Analítica, apresentada aos matemáticos do século XVII pelo francês René Descartes (1556-1650). Com ela foi possível, a tradução das propriedades das figuras planas em equações, cujas soluções são obtidas a partir das quatro operações fundamentais da aritmética e da raiz quadrada. Era a tentativa de unificar a Geometria e a Aritmética.

Dessa tentativa vem o conceito de número ***construtível***, correspondente ao comprimento de um segmento construído através de um número finito de operações com régua e compasso executadas a partir de um segmento tomado como unidade.

De antemão, adicionar ou subtrair medidas de comprimentos na linha reta utilizando régua não graduada e compasso são as operações mais simples e, certamente, não carecem de demonstração. Considerando os pontos A, B, C e D distintos e colineares, com $\overline{AB} = a$ e $\overline{BD} = b$ (sendo a e b construtíveis e $b > a$) então, $\overline{AD} = a + b$ e $\overline{CD} = b - a$ podem ser construídos conforme sugere a figura:

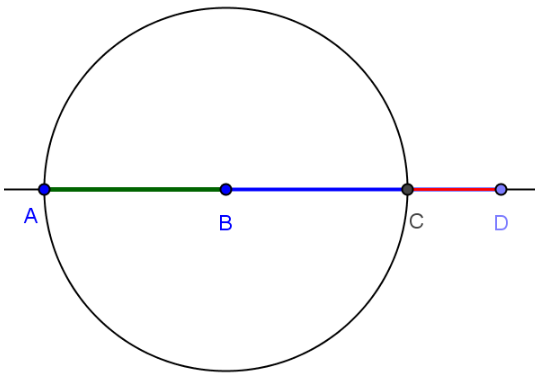

Figura 13: Adição e subtração com régua e compasso.

A multiplicação e a divisão decorrem da aplicação do Teorema de Tales[3]. Tomando as paralelas distintas ***r***, ***s*** e ***t***, intersectadas pelas transversais ***u*** e ***v***, marcam-se os pontos de intersecção ***A***, ***B*** e ***C*** sobre ***u*** e ***A'***, ***B'*** e ***C'*** sobre ***v***, respectivamente. Tomando AB como unidade ($\overline{AB}$ = 1), obtém-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

logo, $\overline{B'C'} = \overline{BC}.\overline{A'B'}$ e, consequentemente, $\overline{A'B'} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ ou $\overline{BC} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}$.

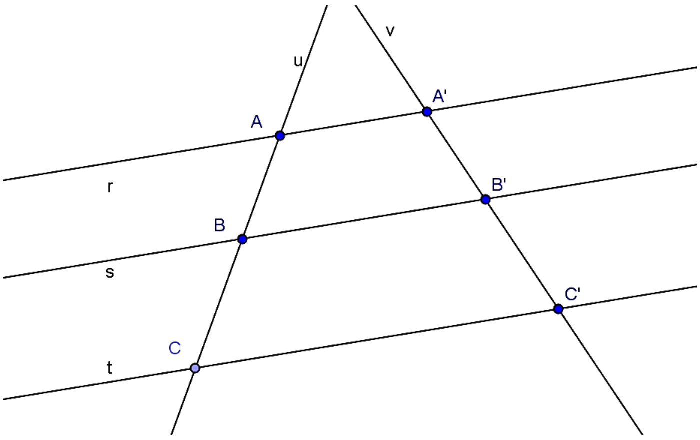

Figura 14: Teorema de Tales.

Para a construção da raiz quadrada, pode-se levar em conta a média geométrica das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa, que corresponde à altura a ela relativa. Assim, considere-se o triângulo ***ABC***, retângulo em ***A***, inscreve-se em uma semicircunferência de diâmetro ***BC***. Sendo ***H*** a projeção ortogonal de ***A*** sobre ***BC***, considerem-se: $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = m$ e $\overline{CH} = n$. Das relações métricas no triângulo retângulo tem-se: $h^2 = m.n$ e, sabendo que h > 0, obtém-se $h = \sqrt{m.n}$.

3 *"Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos* ***quaisquer*** *de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*" [4, p. 185]

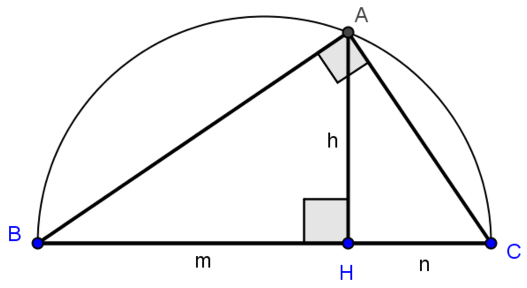

Figura 15: Construção da raiz quadrada.

Para construir uma raiz cujo índice seja uma potência de 2, aplica-se sucessivamente a construção acima, gerando irracionais algébricos. Na tabela a seguir, são apresentados alguns números construtíveis:

m	***n***	***h***^{2} ***= m.n.***	***h*** *(h > 0)*
1	1	$h^2 = 1.1 = 1 \Rightarrow \mathrm{h} = \pm\sqrt{1}$	1
2	1	$h^2 = 2.1 = 2 \Rightarrow \mathrm{h} = \pm\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	$h^2 = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{h} = \pm\sqrt{\sqrt{2}}$	$\sqrt[4]{2}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$h^2 = \sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6} \Rightarrow \mathrm{h} = \pm\sqrt{\sqrt{6}}$	$\sqrt[4]{6}$

Tabela 1: Exemplos de números construtíveis.

Uma prova por indução pode ser feita tomando-se dois números construtíveis da forma $m = a^{2^{-t}}$ e $n = b^{2^{-k}}$, com a, $b \in R_+$; k, $t \in N$. Substituindo em $h^2 = m.n$ tem-se $h^2 = a^{2^{-t}}.b^{2^{-k}}$, ou seja, $h = \sqrt{a^{2^{-t}}.b^{2^{-k}}} = a^{2^{-t}.2^{-1}}.b^{2^{-k}.2^{-1}}$ portanto $h = a^{2^{-(t+1)}}.b^{2^{-(k+1)}}$, que também é um número construtível, pois o produto de dois construtíveis também é construtível. Além disso, para $n = 1$, são obtidos os irracionais que podem ser representados na forma de radical com índice igual a uma potência de 2.

Segundo Sousa [8], os números construtíveis são números algébricos[4] cujo grau é uma potência de 2. De acordo com essa denominação, $\sqrt{5}$ é um número

[4] Um número real é dito *algébrico* se for raiz de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, com $n \in N^*$, e cujos coeficientes são números inteiros não simultaneamente todos nulos. O menor n nestas condições diz-se o *grau* do número algébrico.

algébrico de grau 2 (raiz da equação $x^2 - 5 = 0$), e por isso construtível, mas $\sqrt[3]{5}$ não, pois é algébrico de grau 3 (raiz da equação $x^3 - 5 = 0$).

Somente no século XIX, os estudos sobre a resolução de equações cúbicas através de radicais permitiram chegar ao teorema citado por Sousa [6], reproduzido a seguir: *"Uma equação cúbica de coeficientes inteiros que não tenha raízes racionais não tem raízes construtíveis."*

Apoiado nesse teorema, o francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) demonstrou que a trissecção de um ângulo não pode ser feita apenas com a utilização de compasso e uma régua não graduada. De forma bem simplificada, será feita uma demonstração seguindo os passos de Wantzel. Considerando que ângulos de 60° sejam bastante comuns no cotidiano escolar, deseja-se obter a exata secção para determinar o ângulo de 20°. Para isso será útil voltar ao trissector de Nicomedes, mas sem a *conchoide*.

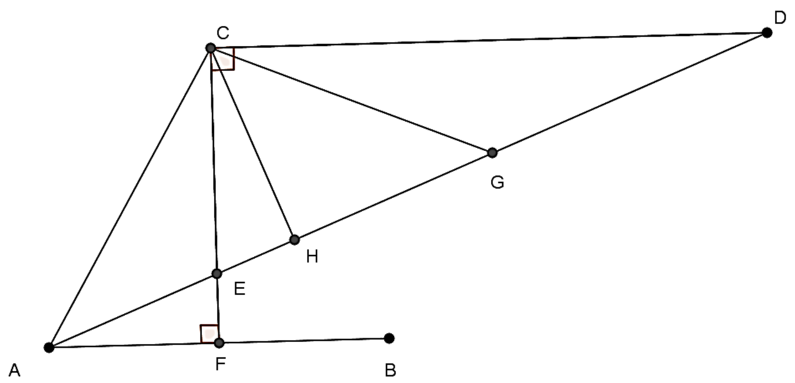

Figura 16: Figura idealizada por Nicomedes.

Portanto, para determinar com precisão o ângulo $D\hat{A}B$ = 20° e assim trissectar $C\hat{A}F$ = 60°, além das propriedades já citadas na análise da *conchoide* foi traçada a altura *CH* relativa à hipotenusa do triângulo *CDE*. Pela semelhança dos triângulos *EAF*, *CDE* e *CDH*, tem-se:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{CD}}$$

Tomando como unidade de medida $\overline{AC} = \overline{CG} = \overline{EG} = \overline{DG} = 1$, fixando $\overline{AF} = a$ e $\overline{AE} = y$, a trissecção agora se resume em determinar a medida $\overline{CD} = x$. Deve-se ainda considerar que *CH* é altura do triângulo isósceles *ACG* e, portanto, mediana relativa ao lado AG. Nessas condições $\boldsymbol{H}$ é ponto médio desse segmento e, por isso $\overline{GH} = \frac{\overline{EG}+\overline{AE}}{2} = \frac{1+y}{2}$, logo $\overline{DH} = \overline{GH} + \overline{DG} = 1 + \frac{1+y}{2} = \frac{3+y}{2}$.

Substituindo na proporção acima tem-se $\frac{a}{y} = \frac{x}{2} = \frac{\frac{3+y}{2}}{x}$, donde vêm as relações: $x^2 = 3 + y$ e $x.y = 2a$. Daí, $x.(x^2 - 3) = 2a$ e, portanto $x^3 - 3x - 2a = 0$. Para cada valor de $\boldsymbol{a}$, fica determinado um ângulo $C\hat{A}F$ a trissectar. Como a proposta inicial mencionava um ângulo de 60°, deve ser considerado a = $\frac{1}{2}$. Assim a equação a ser resolvida é $x^3 - 3x - 1 = 0$ cujas possíveis raízes racionais[5] seriam +1 e –1. Mas $x = 1$ e $x = -1$ não são raízes dessa equação, o que, segundo o teorema já enunciado, garante que as raízes dessa equação não são construtíveis. Com isso, chega-se à conclusão de que o ângulo $C\hat{A}F$ não pode ser trissectado.

A título de curiosidade, tomando $\boldsymbol{a} = 0$ na equação $x^3 - 3x - 2a = 0$, os pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{F}$ da figura 14 coincidem e $B\hat{A}C$ passa a ser reto. Assim é possível obter raízes construtíveis em $x^3 - 3x = 0$, que são 0, $-\sqrt{3}$ e $+\sqrt{3}$. Esta é a prova de que é possível trissectar um ângulo de 90°.

[5] O Teorema das raízes racionais para uma equação algébrica de coeficientes inteiros garante que, se existirem, as raízes racionais da mesma são números da forma $\frac{p}{q}$ onde $\boldsymbol{p}$ é divisor do termo independente e $\boldsymbol{q}$, divisor do coeficiente do termo de maior grau. A sua prova não faz parte dos objetivos deste trabalho, mas pode ser encontrada nos livros didáticos de Ensino Médio.