# 10
# BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1997.

[2] CARVALHO J. P. de. *Os três problemas clássicos da matemática grega*, *Bienal SBM*, 2004.

[3] CARVALHO, J. B. P. de, e ROQUE, T. M. *Tópicos de História da Matemática*, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] DOLCE O. e POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar* - Vol. 9, São Paulo: Atual, 1993.

[5] MORGADO A. C., e. WAGNER e JORGE, M. *Geometria I*, Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1973.

[6] SOUSA J. M. de, "Prof2000," 11 02 2002. Disponível em: < http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/af22/materiais/imp/texto15.htm.> Acesso em 28 janeiro 2014.

[7] CARVALHO A. M. F. T. de, PIRES M. N. M. e Gomes, M. T. *Fundamentos Teóricos do Pensamento Matemático*, Curitiba: ESDE BRASIL S.A., 2009.

[8] POLYA, G., *Sobre a resolução de problemas de matemática na high school*, em *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*, São Paulo: Atual, 1997, pp. 1-12.

[9] LIMA E. L. *Dez mandamentos para professores*, *RPM*, vol. 5, pp. 2-10.

[10] BRASIL. Secretaria de Ensino Médio, *PCN+ Ensino Médio*, Brasília: SEM/MEC.

[11] RODRIGUES, A. C. *O modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento*, Brasília: UCB, 2007.

[12] FETISSOV A. I. *A Demonstração em Geometria*, São Paulo: Atual, 1994.

[13] MORLEY, FRANK. Disponível em:<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Morley.html>. Acesso em 16 janeiro 2014.

[14] FILHO, D. C. D; CUNHA M. A. C. E BARROS, A. D. S. *Teorema de Morley: o que os triângulos ainda podem nos revelar*, *EUREKA*, vol. 37, pp. 22-27, 2013.

[15] CONDE, J. M. “TEOREMA DE MORLEY,” *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática*, vol. 14, pp. 3-4.

[16] FERREIRA, E. S. *Nicomede e os três problemas clássicos gregos*, Revista Brasileira de História da Matemática, vol. 10, n. 20, pp. 193-231, outubro/2010-março/2011.

[17] STEWART, I. *Almanaque das curiosidades matemáticas*, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

[18] KRULIK, S. *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*, São Paulo: Atual, 1997.

[19] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*, Rio de Janeiro: SBM, 2004.

[20] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*, Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[21] NETO, A. C. M. *Geometria* - Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[22] JÚNIOR, L. P. d. S. *Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis*, abril 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/>. Acesso em 17 janeiro 2014.

[23] SMYTH R. *Morley's Miracle*. Disponível em: <http://www.cut-the-not.org/triangle/Morley/Smyth2.shtml>. Acesso em 08 fevereiro 2014.

[24] PAVANELLO, R. M. *Geometria e construção de conceitos aritméticos: investigando algumas inter-relações.* Disponível em:< http://www.ufrrj.br/emanped/ paginas/conteudo_producoes/docs_23/geometria.pdf>. Acesso em fevereiro de 2014

# APÊNDICE I

A seguir são listados os passos para a construção da *Conchoide* de Nicomedes no GeoGebra. Há outras construções possíveis, mas a simplicidade é o diferencial dessa aqui apresentada.

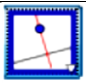
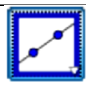
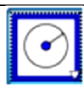
| PASSO | AÇÃO | FERRAMENTA | ÍCONE |
|---|---|---|---|
| 1º) | Traçar um segmento ***AB*** qualquer | segmento definido por dois pontos |  |
| 2º) | Traçar uma reta ***r***, perpendicular a ***AB***, passando por ***B***. | reta perpendicular |  |
| 3º) | Marcar um ponto ***C*** sobre a reta ***r***. | ponto em objeto |  |
| 4º) | Traçar a reta $\overleftrightarrow{AC}$. | reta definida por dois pontos |  |
| 5º) | Determinar uma circunferência centrada em ***C***, de raio qualquer. | círculo dados centro e raio |  |
| 6º) | Marcar os pontos de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AC}$ com a circunferência (***P***). | interseção de dois objetos |  |
| 7º) | Definir os ponto ***P*** e ***Q*** como lugares geométricos em relação a ***C***. | lugar geométrico |  |

**Tabela 3:** Construção da *Conchoide* de Nicomedes.

# APÊNDICE II

A construção do Triângulo de Morley no GeoGebra utiliza alguns recursos que, como já foi demonstrado, vão além da simples utilização de régua não graduada e compasso. Para trissectar os ângulos internos é utilizada uma ferramenta de rotação de um elemento em torno de um ponto, dado o ângulo de rotação.

A sequência de construção é a seguinte:

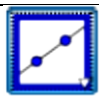
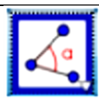
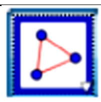
| PASSO | AÇÃO | FERRAMENTA | ÍCONE |
|---|---|---|---|
| 1º) | Construir um triângulo qualquer | polígono |  |
| 2º) | Traçar as retas suporte dos lados | reta definida por dois pontos |  |
| 3º) | Marcar os ângulos internos do triângulo | ângulo |  |
| 4º) | Rotacionar as retas suporte em torno de cada vértice de um ângulo correspondente á terça parte de cada | girar em torno de um ponto por um ângulo |  |
| 5º) | Determinar os vértices do triângulo interior na intersecção de trissetrizes adjacentes a cada lado | interseção entre dois objetos |  |
| 6º) | Construir o triângulo interior com vértices nos pontos obtidos | polígono |  |
| 7º) | Construir os segmentos que ligam os vértices dos dois triângulos | segmento definido por dois pontos |  |
| 8º) | Esconder as retas suporte dos lados e das trissetrizes | "clicar" com o botão direito sobre cada elemento e desmarcar a opção "exibir objeto" | |

**Tabela 4:** Construção do triângulo de Morley no GeoGebra.

# APÊNDICE III

A demonstração da identidade $sen\ x = 4\ sen\ \frac{x}{3}.sen\ \frac{\pi+x}{3}\ .sen\ \frac{2\pi+x}{3}$ parte das relações:

I. $sen\ 2a = 2sen\ a\ .cos\ a$;

II. $sen\ 3a = 3sen\ a - 4sen^3\ a$;

III. $sen\ a + sen\ b = 2.\ sen\left(\frac{a+b}{2}\right).cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;

IV. $sen\ a - sen\ b = 2.sen\left(\frac{a-b}{2}\right).cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Inicia-se com a relação $sen\ 3a = 3sen\ a - 4sen^3\ a$ (II) e, colocando 4***sen a*** em evidência, obtém-se: $sen\ 3a = 4sen\ a.(\frac{3}{4} - sen^2\ a)$. Mas, $sen\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e, portanto, $sen^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$.

Daí, por substituição, decorre que: $sen\ 3a = 4sen\ a.(\ sen^2\frac{\pi}{3} - sen^2\ a)$

$sen\ 3a = 4sen\ a.(\ sen\frac{\pi}{3} + sen\ a)\ .(\ sen\frac{\pi}{3} - sen\ a)$

$sen\ 3a = 4sen\ a.(\ sen\frac{\pi}{3} + sen\ a)\ .(\ sen\frac{\pi}{3} - sen\ a)$

$sen\ 3a = 4sen\ a.[2.sen\left(\frac{\frac{\pi}{3}+a}{2}\right).\ cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}-a}{2}\right)]\ .[2.sen\left(\frac{\frac{\pi}{3}-a}{2}\right).\ cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+a}{2}\right)]$

Tomando os fatores alternadamente, pode-se aplicar a relação (I):

$sen\ 3a = 4sen\ a.[2.sen\left(\frac{\frac{\pi}{3}+a}{2}\right).\ cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+a}{2}\right)]\ .[2.sen\left(\frac{\frac{\pi}{3}-a}{2}\right).\ cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}-a}{2}\right)] =$

$= 4sen\ a.[\ sen\ 2.\left(\frac{\frac{\pi}{3}+a}{2}\right)]\ .[sen\ 2.\left(\frac{\frac{\pi}{3}-a}{2}\right)] = 4sen\ a.\ sen\left(\frac{\pi}{3}+a\right).sen\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

Fazendo $a = \frac{x}{3}$, chega-se a $sen\ x = 4sen\frac{x}{3}.\ sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3}\right)$ ou

$sen\ x = 4sen\ x.\ sen\left(\frac{\pi+x}{3}\right).sen\left(\frac{\pi-x}{3}\right)$.

Mas, pela redução ao 1º quadrante: $sen\left(\frac{\pi-x}{3}\right) = sen\left(\pi - \frac{\pi-x}{3}\right) = sen\left(\frac{2\pi+x}{3}\right)$.

Finalmente é obtido o resultado: $sen\ x = 4\ sen\ \frac{x}{3}.sen\ \frac{\pi+x}{3}\ .sen\ \frac{2\pi+x}{3}$ .