



**Lúcio Sebastião Coelho da Silva**

## **O Teorema de Morley**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro  
Março 2014



**Lúcio Sebastião Coelho da Silva**

## **O Teorema de Morley**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcos Craizer**

Orientador

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Christine Sertã Costa**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Gabriela dos Santos Barbosa**

Fundação Educacional Unificada Campograndense – FEUC

**Prof. Antonio Carlos Saraiva Branco**

Fundação Getúlio Vargas – FGV

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de março de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

### **Lúcio Sebastião Coelho da Silva**

Licenciou-se em Ciências com habilitação em Matemática pela FEUC (Fundação Educacional Unificada Campograndense) em 1994. Especializou-se em Matemática Pura pelo programa de Pós-graduação do CEPOPE/FEUC em 1996. Atua como professor de Ensino Fundamental na Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro e de Ensino Médio no Centro Educacional da Lagoa (CEL), no qual também faz parte da coordenação de Matemática. Docente dos cursos de graduação em Matemática, Informática, Pedagogia e Ciências Sociais na FEUC.

#### Ficha Catalográfica

Silva, Lúcio Sebastião Coelho da

O teorema de Morley / Lúcio Sebastião Coelho da Silva ; orientador: Marcos Craizer. – 2014.

58 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

CDD: 510

À minha avó Maria (*in memorian*) pelos ensinamentos de vida, pela garra e pelo exemplo de dedicação à família.

Aos meus pais pelo investimento na minha formação como pessoa.

À minha esposa Gleici Naira, que divide comigo a caminhada da vida.

À minha filha, Mariani Vitoria, presente de Deus em minha vida.

A Jorge Crim Valente, meu grande amigo.

Aos meus professores, que me fizeram descobrir o encantamento pelo Magistério, em especial a Vera Bellis, Cleber Amaral, Alzir Fourny e Mary de Sousa e Silva.

## Agradecimentos

A Deus, pois sem Ele nada podemos fazer.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À SBM e à PUC-Rio, pela organização do curso.

Ao meu orientador, professor Marcos Craizer, pela incansável dedicação e incentivo permanente durante todo o curso e, principalmente no desenvolvimento do TCC.

Aos demais professores da PUC, pelas aulas ministradas.

Aos meus colegas de mestrado, pelo companheirismo, pela amizade e pelo bom humor, mesmo nos momentos mais difíceis.

## Resumo

Silva, Lúcio Sebastião Coelho da; Craizer, Marcos. **O Teorema de Morley**. Rio de Janeiro, 2014. 58p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho, o foco principal é o Teorema de Morley, cuja formulação tem como base um dos três problemas clássicos da Geometria: a trissecção de um ângulo. A partir da contextualização histórica, procura-se inserir o tema como motivação ao estudo da Geometria. Seja pela riqueza dos conteúdos envolvidos ou pela dificuldade na sua construção, o Triângulo de Morley é um belo exemplo de aplicação a ser trabalhado em sala de aula. Em paralelo é feita uma análise crítica das dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, principalmente em Geometria, visando oferecer subsídios importantes à atividade docente e impactando positivamente o seu trabalho. Com as demonstrações e aplicações apresentadas, procura-se sedimentar conhecimentos adquiridos, bem como apontar caminhos para soluções de diversos problemas geométricos similares.

## Palavras-Chave

Geometria; triângulo; trissecção; Morley.

## Abstract

Silva, Lúcio Sebastião Coelho da; Craizer, Marcos (Advisor). **Morley's Theorem**. Rio de Janeiro, 2014. 58p. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, the main focus is the Morley's Theorem, whose formulation is based on one of three classical problems of Geometry: a trisection of an angle. From the historical context, it tries to insert the subject as motivation to the study of geometry. By the richness of the content or the difficulty involved in its construction, the Morley's triangle is a fine example of application to work with in the classroom. In parallel, a critical analysis of the difficulties that are found on the process of teaching and learning Mathematics, especially Geometry, is done in order to offer important benefits to the teaching activity and positively impacting their work. With demonstrations and applications that are shown it tries to fix up the acquired knowledge, as well as identifying ways to solutions of several similar geometric problems.

## Keywords

Geometry; triangle; trisection; Morley.

## Sumário

1.	INTRODUÇÃO	13
2.	A GEOMETRIA GREGA	16
3.	A TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO	18
3.1.	A solução de Nicomedes	18
3.2.	As soluções de Arquimedes	21
3.3.	A impossibilidade da trissecção	25
4.	CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO ENSINO DE GEOMETRIA	30
4.1.	O pensar geométrico e a resolução de problemas	30
4.2.	Problemas de Geometria pouco geométricos	32
4.3.	A demonstração em Geometria	34
5.	O TRIÂNGULO DE MORLEY	36
6.	UMA QUESTÃO OLÍMPICA	39
7.	DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE MORLEY	42
7.1.	Através da Geometria Euclidiana Plana	42
7.2.	Através das Relações Trigonométricas	46



8.	EXTENSÕES DO TEOREMA DE MORLEY	48
8.1.	Em paralelogramos	48
8.2.	Em polígonos regulares	50
8.3.	Para as trissetrizes dos ângulos externos do triângulo	51
9.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
10.	BIBLIOGRAFIA	54
	APÊNDICE I	56
	APÊNDICE II	57
	APÊNDICE III	58

## Lista de figuras

Figura 1: <i>Conchoide</i> de Nicomedes.	17
Figura 2: A <i>conchoide</i> sobreposta a uma concha.	17
Figura 3: Trissecção pela <i>Conchoide</i> (1ª parte).	18
Figura 4: Trissecção pela <i>Conchoide</i> (2ª parte).	19
Figura 5: Trissecção sem a <i>Conchoide</i> .	19
Figura 6: Questão em [4].	20
Figura 7: Questão em [5].	20
Figura 8: A trissecção através de <i>neusis</i> .	21
Figura 9: Comparação entre as figuras de Arquimedes e Nicomedes.	22
Figura 10: Espiral de Arquimedes construída com recursos computacionais.	23
Figura 11: Espirais de Arquimedes com segmentos de retas.	24
Figura 12: Trissecção através da espiral de Arquimedes.	24
Figura 13: Adição e subtração com régua e compasso.	25
Figura 14: Teorema de Tales.	26
Figura 15: Construção da raiz quadrada.	27
Figura 16: Figura idealizada por Nicomedes.	28
Figura 17: Triângulo de Morley	36
Figura 18: Os doze pontos de intersecção da trissetrizes de Morley.	37
Figura 19: Teorema de Morley na OBM 2012.	39
Figura 20: Resolução da questão 22, nível 3, da OBM (1ª fase - 2012).	40
Figura 21: Triângulos BDE e BHE congruentes.	41
Figura 22: Um lema importante.	42
Figura 23: Demonstração geométrica - Passo 1.	43
Figura 24: Demonstração geométrica - Passo 2.	43

Figura 25: Demonstração geométrica - Passo 3.	44
Figura 26 : Demonstração geométrica - Passo 4.	45
Figura 27: Demonstração geométrica - Passo 5.	45
Figura 28: Teorema de Morley em um paralelogramo.	48
Figura 29: Losango formado pelas trissetrizes em um retângulo.	49
Figura 30: Retângulo formado pelas trissetrizes em um losango.	50
Figura 31: Paralelogramos formados por trissetrizes.	50
Figura 32: As trissetrizes no pentágono e no octógono.	51
Figura 33: Triângulo de Morley com trissetrizes externas.	51
Figura 34: Cinco triângulos equiláteros formados por trissetrizes.	51

## Lista de tabelas

Tabela 1: Exemplos de números construtíveis.	27
Tabela 2: Teoria van Hiele.	32
Tabela 3: Construção da Conchoide de Nicomedes.	56
Tabela 4: Construção do triângulo de Morley no GeoGebra	57