



Luigi de Magalhães Detomi Calvette

**Algoritmos Genéticos e Opções Reais na escolha da
sequência ótima de perfurações de poços
exploratórios**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Marco Aurélio C. Pacheco

Rio de Janeiro
Abril de 2014.



Luigi de Magalhães Detomi Calvette

Algoritmos Genéticos e Opções Reais na Escolha da Sequencia Ótima de Perfurações de Poços Exploratórios

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marco Aurélio Cavalcanti Pacheco

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Dr. Juan Guillermo Lazo Lazo

Intelligent Software and Research Peru SAC

Prof. Marco Antonio Guimarães Dias

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luigi de Magalhães Detomi Calvette

Economista graduado pela UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais). Possui interesse em avaliação de investimentos e contratos utilizando opções reais e técnicas de otimização. Atua como Economista e Coordenador de Otimização Logística na Gerência Geral de Integração de Mercados da América Latina da área Internacional da Petrobras (Petróleo Brasileiro S.A.).

Ficha Catalográfica

Calvette, Luigi de Magalhães Detomi

Algoritmos genéticos e opções reais na escolha da sequência ótima de perfurações de poços exploratórios / Luigi de Magalhães Detomi Calvette ; orientador: Marco Aurélio C. Pacheco.– 2014.
121 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2014.
Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Otimização. 3. Algoritmos genéticos. 4. Opções de aprendizagem. 5. Fator de chance. I. Pacheco, Marco Aurélio C. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

Aos meus queridos pais Rosana e Luiz Angelo (in memoriam)
À minha esposa Taisa
Ao meu querido padrasto Gerardus

Agradecimentos

Agradeço à Petrobras pela liberação em tempo parcial e pelo apoio financeiro.

Um agradecimento especial ao gerente Hermes Gomes da Silva Filho pelo patrocínio e incentivo à realização e conclusão deste. Agradeço também aos gerentes Tancredi, Alessandra Plaga e José Carlos Carvalhinho pela boa vontade e compreensão com as etapas finais do mestrado.

Agradeço do fundo do coração, à minha mãe Rosana, ao meu padrasto Gerardus e à minha esposa Taisa, por sempre me apoiar, incentivar e me fazer acreditar que eu era capaz. Sem vocês esse mestrado não teria sido possível!

Agradeço ao meu orientador, Marco Aurélio Pacheco, pelo apoio, paciência, boa vontade, liberdade e por me incentivar a pesquisar numa área até então desconhecida para mim.

Um agradecimento especial ao colega e amigo Marco Antônio Guimarães Dias. Impossível descrever o quanto sou grato às contribuições das nossas conversas de almoço, em sala de aula, na volta da PUC, nos cursos da UP, e-mails trocados em final de semana, etc. Considero inspirador, e fator fundamental para conclusão do mestrado, o tanto que o colega Marco Antônio é capaz de aliar um trabalho profissional de altíssima qualidade com uma contínua formação acadêmica de primeira linha e um grande amigo. É inspirador! Muito obrigado!

Agradeço aos meus irmãos pelo exemplo de dedicação e amor ao trabalho. Admiro muito vocês!

Agradeço aos amigos da COPEVI e aos meus colegas da Petrobras pelo apoio e incentivo.

Agradeço a todos os professores da PUC pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas que cursei.

Resumo

Calvette, Luigi de Magalhães Detomi; Pacheco, Marco Aurélio C. **Algoritmos Genéticos e Opções Reais na escolha da sequência ótima de perfurações de poços exploratórios.** Rio de Janeiro, 2014. 121p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A exploração e desenvolvimento de um campo de petróleo é permeada de incertezas de diferentes naturezas. A incerteza mais básica que o gestor de um portfólio exploratório enfrenta é aquela relativa à existência (ou não) de petróleo em determinado prospecto. Tipicamente, incertezas técnicas tendem a ser reduzidas com investimentos em aquisição de informação, que são exercícios de opções de aprendizagem. Decorrente da estrutura de correlações presentes nos prospectos de um portfólio exploratório, o resultado da perfuração de um poço pioneiro potencialmente irá revelar informações adicionais sobre a probabilidade de existência (ou não) de petróleo em outros prospectos deste mesmo portfólio. Cada poço a ser perfurado pode ser entendido como uma opção de aprendizagem a ser exercida (ou não) a depender da sua probabilidade de sucesso. Neste contexto, um dos fatores determinantes na otimização da campanha exploratória é a escolha da sequência ideal de perfuração de poços. Tal escolha é mais complexa, quanto maior for a quantidade e diversidade de prospectos no portfólio. Diante dessa realidade, este trabalho propõe uma modelagem que busca, através de Algoritmos Genéticos, otimizar a sequência de perfurações dos poços e, portanto, o valor do portfólio. O modelo proposto considera as interdependências e as especificidades de cada prospecto e usa como função objetivo, a ser maximizada, o valor presente do líquido (VPL). Opções e aprendizagem são os aspectos-chave por trás do modelo de otimização. O modelo foi avaliado em dez diferentes portfólios exploratórios e, em todos os casos, foi capaz de propor pelo menos uma sequência que apresentasse expressivos ganhos de VPL em relação ao caso-base.

Palavras-chave

Otimização; algoritmos genéticos; opções de aprendizagem; fator de chance.

Abstract

Calvette, Luigi de Magalhães Detomi; Pacheco, Marco Aurélio C. (Advisor) **Genetic Algorithms and Real options on the wildcat drilling optimal choice**. Rio de Janeiro, 2014. 121p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

An oil field exploration and development campaign is bounded with different kinds of uncertainty. The most basic one that an E&P portfolio manager deals with is the one related to the existence (or not) of oil in a given prospect. Typically, technical uncertainties are related to learning, and tend to be reduced with investments on information acquisition. From the correlation pattern on the prospects in a given exploratory portfolio, follows that the results from one initial wildcat drilling will, potentially, reveal, additional information about the oil existence (or not) in other prospects in the same *geological play*. This way, each prospect to be drilled might be understood as a learning option to be exercised (or not) depending on its respective success probability. In such case, one of the main factors on optimizing the exploratory campaign is choosing the ideal drilling sequence. Such choice is more complex, as the quantity and diversity of the prospects increases. Given such background, the present work proposes a model that intends, using Genetic Algorithms, to optimize the drilling sequence and, as a consequence, the total portfolio value. The proposed model considers the interdependencies and each prospect specific aspects and has as an objective function (to be maximizes) the portfolio net present value (NPV). Options and learning are the main aspects underlying the optimization model. The model was evaluated on ten different exploratory portfolios and, in every case, was able to deliver at least one sequence that could represent expressive NPV gains compared to the basic scenario.

Keywords

Optimization; Genetic Algorithms; Learning Options; Chance Factor

Sumário

1	Introdução	13
1.1.	Contexto Geral	13
1.2.	Motivação	13
1.3.	Objetivos	14
1.4.	Contribuições	15
1.5.	Organização da Dissertação	15
2	Valoração e sequenciamento de um portfólio exploratório: contribuições e conceitos preliminares	17
2.1.	Opções de Aprendizagem e otimização de um portfólio com Algoritmos Genéticos: contribuições acadêmicas	17
2.2.	Conceitos preliminares: VOI, Medidas de Aprendizagem e Processos de Revelação de Bernoulli	29
2.2.1.	Conceitos Básicos	29
2.2.1.1.	Valor da Informação	29
2.2.1.2.	Incerteza, Prospectos Exploratórios e Fatores de Chance	34
2.2.2.	Medidas de Aprendizagem	36
2.2.2.1.	Limites de Fréchet-Hoeffding	38
2.2.2.2.	Redução Percentual Esperada da Variância de X	39
2.2.3.	Processo de Revelação de Bernoulli	41
2.2.3.1.	Distribuição de Bernoulli e a revisão do Fator de Chance	41
2.2.3.2.	Distribuição Bivariada de Bernoulli: Fator de Chance e Sinal	45
3	Valoração e sequenciamento de um portfólio exploratório: Modelo e Estudos de Caso	51
3.1.	Aspectos gerais	52
3.1.1.	Correlação	52
3.1.2.	Valor Monetário Esperado	53
3.2.	Estrutura do Modelo	54
3.2.1.	CASO 1: Dois prospectos sem correlação	55
3.2.2.	CASO 2: Dois prospectos correlacionados	57

3.2.2.1. Valor: do portfolio, da opcionalidade, do aprendizado e da sinergia	58
3.2.2.2. Impacto da correlação no aprendizado e sinergia	61
3.2.2.3. Conclusões preliminares – sequência ideal	61
3.3. Modelo com três prospectos	64
3.3.1. CASO 3: Três prospectos sem correlação – Trivial	64
3.3.2. CASO 4: Dois prospectos correlacionados e um terceiro prospecto sem correlação – Trivial	65
3.3.3. CASO 5: Três prospectos correlacionados – Configuração I (“em linha”)	66
3.3.3.1. Valor: do portfolio, da opcionalidade e do aprendizado	67
3.3.3.2. Conclusões preliminares – sequência ideal	69
3.3.4. CASO 6: Três prospectos correlacionados – Configuração II (“triangular”)	73
3.3.4.1. Valor: do portfolio, da opcionalidade e do aprendizado	74
3.3.4.2. Conclusões preliminares – sequência ideal	76
3.4. Modelo com quatro prospectos	79
3.4.1. CASO 7: Quatro prospectos correlacionados	79
3.4.1.1. Valor: do portfolio, da opcionalidade e do aprendizado	80
3.4.1.2. Conclusões preliminares – sequência ideal	84
3.5. Portfolios compostos por mais do que quatro prospectos	89
3.5.1. Não-linearidade do problema - Espaço de busca	89
3.5.2. Método de Otimização: Computação Evolucionária	90
3.5.3. Algoritmos Genéticos: Cromossoma	92
3.6. CASO 8: Modelo com 10 prospectos com 2 clusters	92
3.6.1. CASO 9: Modelo com 10 prospectos – Configuração em formato de “U”	97
3.6.2. CASO 10: Modelo com 10 prospectos – Configuração mista	102
4 Conclusões e trabalhos futuros	108
5 Referências bibliográficas	110
Apêndice – I	115

Lista de Figuras

Figura 1 – E&P e Investimento em Informação	35
Figura 2 – Escala subjetiva de probabilidade	45
Figura 3 – Portfolio – Caso 1	56
Figura 4 – Portfolio – Caso 2	58
Figura 5 – Árvore de Decisão- Caso 2: Sequência A-B	62
Figura 6 – Portfolio – Caso 3	64
Figura 7 – Portfolio – Caso 4	65
Figura 8 – Portfolio – Caso 5	66
Figura 9 – Árvore de decisão – Caso 5: sequência <i>BAC</i>	71
Figura 15 – Estratégia ótima de perfurações – Caso 5	72
Figura 11 – Portfolio – Caso 6	74
Figura 12 – Estratégia ótima de perfurações – Caso 6	78
Figura 13 – Portfolio – Caso 7	79
Figura 14 – Campanha otimizada de perfurações – caso 7	86
Figura 15 – Portfolio – Caso 8	93
Figura 16 – Portfolio – Caso 9	97
Figura 17 – Prospectos relevantes – Caso 9	100
Figura 18 – Portfolio – Caso 10	102

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Principais propriedades da distribuição de Bernoulli	43
Tabela 2 – Distribuição marginal e bivariada de Bernoulli	46
Tabela 3 – Matriz de correlações – Caso 5	66
Tabela 4 – Valor do portfolio em cada sequência possível	69
Tabela 5 – Valor do portfolio em diferentes sequências	73
Tabela 6 – Matriz de correlações – Caso 6	74
Tabela 7 – Valor do portfolio em diferentes sequências	77
Tabela 8 – Matriz de distâncias – Caso 7	79
Tabela 9 – Matriz de correlações- Caso 7	80
Tabela 10 – Valores portfolio diferentes sequências	84
Tabela 11 – Valores portfolio quatro prospectos – sensibilidade VPL	88
Tabela 12 – Total alternativas portfolio com dez prospectos	90
Tabela 13 – Matriz de distâncias – Caso 8	93
Tabela 14 – Matriz de correlações – Caso 8	94
Tabela 15 – Sequência otimizada – Caso 8	95
Tabela 16 – Matriz de distâncias – Caso 9	98
Tabela 17 – Matriz de correlação – Caso 9	98
Tabela 18 – Sequência otimizada – Caso 9	99
Tabela 19 – Matriz de distância – Caso 10	103
Tabela 20 – Matriz de correlação – Caso 10	103
Tabela 21 – Sequência otimizada – Caso 10	104
Tabela 22 – Resumo Valores portfolio	108

Lista de Gráficos

Gráfico 1 – FDP e FDA de uma Bernoulli	42
Gráfico 2 – Distribuição bivariada de Bernoulli	47
Gráfico 3 – Distribuição de revelações de Bernoulli com um sinal	47
Gráfico 4 – Probabilidades que não atendem limites de FH	50
Gráfico 5 – Ganhos no portfolio - Aprendizado	59
Gráfico 6 – Ganhos no portfolio – Aprendizado e sinergia	61
Gráfico 7 – Evolução FC sequência de sucessos	87
Gráfico 8 – Valor Sequencia CADB – sensibilidade VPL prospecto D	87
Gráfico 9 – Evolução do AG – Caso 8	94
Gráfico 10 – Composição dos ganhos – Caso 8	96
Gráfico 11 – Sensibilidade taxa mutação – Caso 8	96
Gráfico 12 – Evolução do AG – Caso 9	98
Gráfico 13 – Composição dos ganhos – Caso 9	101
Gráfico 14 – Sensibilidade taxa de mutação – Caso 9	101
Gráfico 15 – Evolução do AG – Caso 10	103
Gráfico 16 – Composição dos ganhos – Caso 10	105
Gráfico 17 – Evolução FC em sequência de sucessos – Caso 10	105
Gráfico 18 – Evolução FC em sequência de sucessos – Caso 10	106
Gráfico 19 – Sensibilidade taxa de mutação – Caso 10	106

1 Introdução

1.1.

Contexto Geral

A exploração e desenvolvimento de um campo de petróleo é permeada de incertezas de diferentes naturezas. A primeira, e talvez a mais básica, das incertezas é aquela relativa à existência ou não de petróleo. Na etapa exploratória, a realização de sísmicas 3D objetiva mapear e adquirir informações sobre áreas com potencial acúmulo de hidrocarbonetos. Em especial, a sísmica traça características da estrutura (como o tamanho, selo e geometria) favoráveis ou não à presença de petróleo.

Decorrente das informações obtidas na sísmica mapeia-se as áreas de maior chance de sucesso na campanha exploratória (prospectos) e faz-se uma estimativa preliminar do potencial de reservas e da probabilidade de encontrar hidrocarbonetos em uma eventual perfuração de cada um dos prospectos. Tais estudos, dentre outros se destinam a estudar de viabilidade econômica de uma eventual perfuração. Entretanto, ainda que a sísmica indique a formação de uma estrutura geológica amplamente favorável à presença de hidrocarbonetos, é possível que a mesma possa conter água e não óleo. A perfuração do poço pioneiro é que irá, de fato, confirmar a existência ou não de óleo naquela estrutura.

Adicionalmente, dois (ou mais) prospectos podem apresentar estruturas na mesma idade geológica (“play” geológico), representadas através de uma correlação positiva. Sendo assim, a perfuração de um prospecto revela informações sobre a existência de óleo naquela área específica como também sobre o potencial de existência em outros prospectos correlacionados. Nesse contexto, considera-se a campanha exploratória como um portfólio de prospectos e cada prospecto representa uma opção que, sendo exercida (perfurar o prospecto), potencialmente revela informações sobre o portfólio exploratório como um todo.

1.2.

Motivação

No processo de seletividade dos investimentos de uma empresa de petróleo, diversos critérios são empregados para determinar a carteira de projetos que

otimize sua função-objetivo (tipicamente, a função lucro). O VPL individual de cada projeto é uma das variáveis comumente consideradas como de maior impacto na composição da carteira. Entretanto, como veremos, decorrente dos aspectos de aprendizagem e sinergia presentes nos projetos da carteira (expressos através da correlação positiva), faz-se necessário um modelo de avaliação do portfólio de investimentos que reflita o valor da carteira de investimentos em tal contexto.

Um dos conceitos fundamentais na literatura de gestão de portfólio é o de sinergia, em que *o valor do todo é maior do que a soma das partes*. No contexto desta dissertação tal conceito fica evidente na medida em que a sequência de perfurações a ser realizadas pode ter um impacto significativo no valor do portfólio. Isto é, dentre um conjunto de possíveis ordens de perfurações na campanha exploratória, o valor do portfólio (*ex-ante*) varia sensivelmente. Num cenário de restrição de recursos, é fundamental priorizar os investimentos a serem realizados e, nesse contexto, obter a adequada valoração da carteira de projetos é uma premissa que se não for obedecida pode gerar decisões equivocadas.

Evidentemente que a otimização do portfólio nem sempre é trivial. Considerando, por exemplo, uma campanha exploratória composta por dez prospectos exploratórios, como veremos, tem-se aproximadamente 10 milhões de possíveis sequências de perfuração de poços pioneiros. Determinar a sequência que otimiza o valor do portfólio, neste contexto, é uma tarefa praticamente inviável de ser feita sem o auxílio de técnicas computacionais.

1.3. Objetivos

Ao planejar uma campanha exploratória, a ordem em que se consideram as perfurações de cada poço pioneiro possui relação direta com o valor do portfólio como um todo. Visto isso, é fundamental planejar a campanha exploratória, considerando todo seu potencial de revelação de informações tal que a sequência de perfurações escolhida seja aquela que maximize a função-objetivo da empresa.

Assim, o objetivo desta pesquisa é propor, implementar e avaliar um modelo computacional baseado em Algoritmos Genéticos, capaz de, considerando portfólio composto por uma grande quantidade de prospectos, maximizar o seu valor otimizando a sequência de perfurações de poços exploratórios. Nesta

dissertação consideram-se diversos estudos de caso que contemplam portfólios compostos por até 10 prospectos correlacionados.

Outro objetivo deste trabalho é desenhar uma estratégia ótima, de continuidade ou não, da campanha exploratória a cada resultado obtido nas perfurações (*ex-post*). Isto é, tendo planejado uma certa sequência de perfurações, na medida em que a mesma é executada e obtêm-se os resultados de cada perfuração (sucesso ou fracasso) deve-se prosseguir com a campanha planejada ou encerrar a campanha exploratória? Nesta dissertação avaliaram-se as estratégias de perfurações de portfólios compostos por até 4 prospectos correlacionados.

1.4. Contribuições

A principal contribuição deste estudo vem da possibilidade de incorporação dos aspectos de opções reais e aprendizagem, presentes no modelo de portfólio exploratório proposto, a modelos de otimização da campanha exploratória de uma empresa de petróleo. Em especial, o trabalho apresenta os seguintes produtos:

- Determinação do valor do portfólio exploratório correlacionado (*ex-ante*)
- Planejamento otimizado da sequência de perfurações de prospectos exploratórios (*ex-ante*)
- Definição da estratégia ótima de continuidade (ou não) da campanha exploratória decorrente de cada resultado revelado (*ex-post*)

1.5. Organização da Dissertação

Esta dissertação contém quatro capítulos descritos a seguir:

O segundo capítulo aborda parte da literatura existente sobre o tema e discute diversos conceitos preliminares. Alguns tópicos como, o papel da correlação; processos de revelação de Bernoulli, Medidas de Aprendizagem,

Teorema de Frechet-Hoeffding, dentre outros, que formam a *base* do presente estudo são discutidos.

O terceiro capítulo contém o modelo proposto e diversos estudos de caso. Inicialmente, apresenta-se o modelo mais simples, composto por apenas dois prospectos, mas que já fornece importantes conclusões aplicáveis a modelos mais complexos. Posteriormente, estende-se a análise para casos com 3 e 4 prospectos onde aspectos como a sequência ideal de perfurações, o valor do aprendizado e tomada de decisão no contexto dinâmico (estratégia de perfurações) são evidenciados. Por fim, apresenta-se o modelo mais geral, composto por 10 prospectos e destaca-se a otimização por Algoritmos Genéticos para resolver o problema proposto.

Por fim, o quarto capítulo conclui o trabalho e apresenta as sugestões para trabalhos posteriores.

2

Valoração e sequenciamento de um portfolio exploratório: contribuições e conceitos preliminares

O propósito do presente capítulo é o de introduzir o problema de sequenciamento de um portfolio de projetos de exploração de petróleo. A importância das opções reais, do valor da aprendizagem, da sinergia e o uso de Algoritmos Genéticos para resolver problemas similares ao que é proposto neste estudo, são alguns dos tópicos que serão abordados neste capítulo. Será apresentada uma revisão do estado-da-arte de algumas contribuições acadêmicas sobre o tema e também serão apresentados alguns conceitos preliminares.

Isso posto, o presente capítulo se divide da seguinte forma. Na seção 2.1 será apresentada uma revisão da literatura à luz dos tópicos relevantes para o presente estudo. Na seção 2.2 serão discutidos alguns conceitos básicos inerentes ao problema. Alguns tópicos como: o papel da correlação; processos de revelação de Bernoulli, Medidas de Aprendizagem, Teorema de Frechet-Hoeffding, dentre outros, que formam a *base* do presente estudo são discutidos.

2.1.

Opções de Aprendizagem e otimização de um portfolio com Algoritmos Genéticos: contribuições acadêmicas

Atualmente há uma extensa literatura sobre um portfolio de opções financeiras. Também sobre opções reais há uma grande quantidade de contribuições tanto acadêmicas quanto de cunho prático nas mais diversas áreas de pesquisa¹. Menos comuns são as contribuições que tratam de portfolio de opções reais, em particular, aquelas que, como no presente estudo, fazem uso de Algoritmos Genéticos para resolver problemas de sequenciais com opções de aprendizagem. No presente debate destacam-se algumas interessantes contribuições.

¹ Lander e Pinches (1998) apresentam uma ampla revisão da bibliografia existente sobre opções reais. Sob tal pano de fundo, os autores se propõem a discutir os desafios na implementação de modelos e precificação de opções reais.

As contribuições de Smith (2004) Smith e Thompson (2004) discutem o problema de otimizar o valor de uma campanha exploratória de petróleo através do gerenciamento ativo das opções reais. A tomada de decisão pela perfuração de determinado poço se dá não apenas com base no conteúdo do prospecto geológico, mas, também, na informação trazida por perfurações anteriores, decorrente da estrutura de interdependência destacada pelos autores. Assim, decorrente do ganho de informação e da existências de opções reais, a escolha pela sequência de poços a serem perfurados, afeta diretamente o valor final do portfólio.

How much should management be willing to pay to acquire such a portfolio? Certainly more than the sum of the intrinsic values, because that measure ignores the value created by using intervening information to actively manage the exploration sequence. Holding all else equal, the existence of dependence among prospects adds value to the portfolio of options (Smith & Thompson, 2004, p.1-2).

Os autores propõem o uso de Programação Dinâmica Estocástica como ferramenta para resolver o problema de exercício ótimo das opções. Uma das conclusões encontradas é a de que, embora a dependência entre prospectos aumente o risco (variância) do retorno do portfólio potencial, por outro lado, aumenta também o valor esperado do portfólio ao considerar a natureza sequencial do gerenciamento das opções reais. O problema proposto pelos autores considera um portfólio de opções reais existentes sob diferentes ativos subjacentes – como o presente estudo se propõe. Entretanto, o foco daqueles autores é o de, usando opções reais e programação dinâmica, resolver um problema de parada ótima numa sequência de perfurações de poços secos - um foco distinto do que aqui se propõe.

Murtha (1996) se propõe a explorar aspectos da presença de dependência nos prospectos exploratórios de petróleo, em particular, analisando os resultados em termos de risco e *payoff* esperado. Em sua argumentação o autor faz uso de probabilidades condicionais, simulação de Monte Carlo e um estudo de caso de um campo de petróleo offshore em Louisiana, com três camadas geológicas dependentes. A modelagem proposta considera que toda a campanha exploratória deve ser feita (não há priorização/seleção dos prospectos a serem perfurados). Sob tal perspectiva o autor propõe que o volume total das reservas não é afetado pela presença de dependência nos prospectos havendo, sim, um incremento na

variância dos *payoffs*. “*The impact of geological dependence is to increase the dispersion of reserves. For two otherwise identical prospects, one where the layers would be dependent would be riskier*” (Murtha, 1996, p.42). O autor chega a tais conclusões fazendo uso de uma abordagem que não considera o uso de opções reais na tomada de decisão pela perfuração dos poços exploratórios e, tampouco, os aspectos de flexibilidade, aprendizagem e sinergia inerentes ao problema.

Delfiner (2000) também apresenta uma abordagem semelhante à de Murtha (1996) na discussão de um portfólio exploratório. Em sua contribuição o autor trata diferentemente riscos que são compartilhados (correlação perfeita entre os prospectos) e riscos considerados independentes. Apesar de tal contribuição a conclusão obtida de que a presença de dependência entre os prospectos tende a aumentar o risco exploratório não é coerente com o presente estudo. Uma abordagem por opções reais, como veremos, traz conclusões bastante distintas sobre tal problema.

Wang *et al.* (2000) discute métodos para calcular o valor de uma campanha exploratória de petróleo com múltiplos prospectos com riscos dependentes. Em sua abordagem o autor, ao contrário de Delfiner (2000) e Murtha (1996), considera que a existência de dependência (correlação) positiva entre os prospectos traz ganhos ao portfólio (“*High risk dependency and prior successes tend to result in prospect risks more favorable than the initially assessed risk values while risk Independence would keep the risks unchanged despite prior successes or failures*”). Ao considerar a informação advinda da perfuração de determinado poço exploratório e reconhecer que ordenamento das perfurações importa (considerando que nem todos os prospectos necessariamente devem ser perfurados), a abordagem do autor se assemelha à perspectiva considerada no presente estudo. Entretanto, Wang *et al.* (2000) não se propõe a calcular o valor das opções no portfólio exploratório e não destaca aspectos de aprendizado e sinergia.

Trigeorgis (1993) apresenta uma das primeiras contribuições a respeito de um portfólio de opções reais. O autor se propõe a analisar as diferentes possíveis interações entre opções bem como valorar os investimentos sob tal perspectiva. Sua análise, entretanto, diz respeito à diferentes tipos opções (postergação, abandono, escala, etc.) coexistindo relativas a um mesmo ativo subjacente (e não

diferentes ativos como o presente estudo aborda). O autor demonstra que, havendo múltiplas opções a ser consideradas, a contribuição individual de cada uma delas para o portfólio como um todo é, em geral, inferior ao seu valor analisado isoladamente. Adicionalmente, quão mais opções coexistirem sobre esse mesmo ativo menor é o valor da contribuição incremental de cada opção presente no portfólio (sub-aditividade). Por fim, o autor trata a ordem na qual as opções podem ser exercidas como previamente definida, não sendo esta mais uma ferramenta à disposição do gestor do portfólio, como o presente estudo considera.

Vishnawath (1992), por sua vez, se propõe a discutir o sequenciamento otimizado de um conjunto de opções existente sob diferentes ativos subjacentes. Em sua análise a autora faz uso de Programação Dinâmica e do conceito de bem-estar (expresso através da função de utilidade). Na perspectiva da autora, todas as opções devem ser exercidas, sendo que a sequência ótima de exercício das opções é uma variável de saída. O estudo busca ainda apresentar condições suficientes para resolver o problema de investir em um portfólio (mais uma vez, considerando que não é possível exercer apenas algumas opções).

Surprisingly, as shown here, if the distributions associated with the projects satisfy certain ordering conditions which is characterized via the notion of second order stochastic dominance, the sequential strategy for parallel operation that maximizes the total expected utility is the simple highest expected utility (assessed for each Project in isolation) rule (Vishnawath, 1992).

A contribuição de Cortazar *et al.* (2001), semelhantemente a Trigeorgis (1993), também diz respeito a um conjunto de opções reais relativas apenas a um mesmo ativo subjacente. Em particular, o estudo foca em quantificar os investimentos relativos à exploração de recursos naturais (no caso, petróleo e cobre), sob incertezas relativas a preço e aspectos geológicos. Os autores consideram diferentes opções reais relativas a diferentes fases no desenvolvimento do projeto exploratório.

The optimal value of the exploration project (total value) is decomposed into: (a) the value of the project if there is no flexibility (or there is no volatility) at any stage (Value without options); (b) the value added for optimally opening close, closing or abandoning the mine during the extraction stage (Operational options); (c) the extra value for optimal deferring the development investment (Development Options) and (d) the additional value for optimally investing during the exploration stage (Exploration Option) (Cortazar et al., 2001, p.186).

Tal perspectiva evidencia a natureza gerencial inerente ao uso das opções reais.

Stabell (2000) se propõe a estudar diferentes abordagens para modelar riscos em prospectos com camadas interdependentes. Semelhantemente a Murtha (1996) e Delfiner (2000) a discussão do risco gira em torno dos diferentes aspectos (geológicos) presentes em determinado prospecto. O autor também faz uso da distinção entre riscos compartilhados e riscos independentes e, em seu estudo, também não faz uso das opções reais e, tampouco, evidencia a importância do aprendizado e do investimento sequencial.

Brennan & Schwartz (1985) assim como Trigeorgis (1993) e Cortazar *et al.* (2001) apresentam as interações entre opções relativas a um mesmo ativos subjacente. Os autores se propõem a avaliar investimentos em mineração e em outros recursos naturais. A tradicional metodologia de fluxo de caixa descontado não se aplica adequadamente a esse tipo de investimento, na perspectiva de Brennan & Schwartz (1985), em função do alto grau de incerteza existente relativos ao preços do produto. Adicionalmente, a abordagem tradicional não capta os efeitos da gestão sequencial do projeto (em função da opções). Com isso, os autores propõem um modelo que, sob incerteza e fazendo uso de Opções Reais, irá avaliar adequadamente os investimentos em projetos de recursos naturais e também determinar a decisão ótima do gestor do projeto em função da trajetória de preços e expectativas. Em particular, a contribuição dos autores dá grande destaque à gestão sequencial do projeto.

The model also takes explicit accounts of managerial control over the output rate, which is assumed to be variable in response to the output price; moreover the possibility that a project may be closed down or even abandoned if the output prices fall far enough is considered (Brennan & Schwartz, 1985, p.136).

A contribuição de Childs *et al.* (1998) é de particular interesse para o presente estudo. Os autores estudam a interdependência entre projetos, mutuamente excludentes, fazendo uso das opções reais. Consideram a existência de opções diferentes relativas a diferentes ativos subjacentes – como fazemos no presente estudo. A consideração da ordem em que os investimentos são feitos também é abordada, ainda que o estudo considere apenas o caso de um portfolio

composto por apenas dois projetos. Os autores se propõem a estudar os efeitos dos diferentes tipos de inter-relações entre projetos, sendo os projetos executados em paralelo ou sequencialmente. Em particular, destacam que projetos altamente correlacionados são preferíveis que sejam executados sequencialmente, e não em paralelo, uma vez que o investimento em um projeto traz ganhos de informações que podem ajudar o gestor na tomada de decisão sobre o projeto seguinte. Uma das conclusões encontradas pelos autores é de particular interesse no presente estudo.

We find that the information advantage of developing in sequence also implies that the optimal ordering of the sequential projects does not always begin with the highest value project, contrary to what the traditional technique would suggest (i.e., committing to the single project with the highest net benefit). (Childs et al. 1998, p. 307).

O modelo considera uma distribuição normal para os retornos dos projetos e a intensidade da aprendizagem é feita pelo coeficiente de correlação quadrática ρ^2 . Neste estudo faremos uso de uma medida de aprendizagem mais geral, percentual esperado de redução na variância, proposta em Dias (2005).

Dias (2005a) é também uma contribuição muito relevante para o presente estudo. O autor apresenta e discute uma teoria para a incerteza técnica e o ganho de informação decorrente da aprendizagem dentro do contexto de opções reais e de jogos de opções reais. Em particular, investimentos em pesquisa e desenvolvimento e exploração de campos de petróleo, são exemplos de aplicações na qual é necessário haver uma medida de aprendizagem que traduza adequadamente a redução na incerteza decorrente do investimento em aquisição de informação. Sob tal pano de fundo, o autor discute um tipo particular de processo de incerteza técnica, gerado pelo exercício sequencial de opções de aprendizado: o processo de Revelação de Bernoulli que diz respeito a uma sequência bivariada de distribuições de Bernoulli. O autor faz uso dos conceitos de Valor da Informação (VDI) e Fator de Chance, ambos fundamentais no presente estudo. É proposta uma medida de aprendizagem, η^2 , que possui interessantes propriedades matemáticas, uma delas ser uma medida de informação assimétrica (assim como o aprendizado também pode ser). Em outras palavras, dependendo de qual distribuição de probabilidades for considerada, pode haver assimetria nas distribuições condicionais no que diz respeito ao efeito do

aprendizado (o ganho de informação de $X|Y$ pode ser diferente de $Y|X$). Como o aprendizado pode ser assimétrico, é importante que a medida de aprendizagem também seja capaz de refletir isso e essa é uma das propriedades da medida proposta, η^2 . Adicionalmente, a medida possui uma interpretação bastante intuitiva como a redução esperada na variância com o processo de aprendizagem.

Note that η^2 uses the variance as measure of uncertainty. So, learning means that is expected the reduction of uncertainty measured by the variance. In this way, maximum learning means full reduction of variance (posterior variance equal to zero) and zero learning means zero reduction of variance (Dias, 2005, p. 24).

Brosch (2001) se propõe a estudar aspectos da gestão de um portfólio de opções reais em termos da inter-relação entre os projetos e precificação do portfólio como um todo. A contribuição de Brosch (2001) como em Childs (1998) também diz respeito a diferentes opções existindo relativas a diferentes ativos subjacentes. Em sua análise o autor apresenta as relações entre os projetos como variando entre “estritamente substitutos” e “estritamente complementares” passando por “independentes”². Seja qual for o tipo de interação que ocorra entre os projetos o autor pontua que todas as opções devam ser precificadas simultaneamente. Para tal Brosch (2001) faz uso de programação dinâmica e considera, ao contrário do presente estudo, apenas opções europeias. O autor se restringe a precificar apenas o portfólio composto por dois projetos com correlação positiva perfeita (“estritamente positiva”) chegando a conclusões semelhantes ao caso de uma opção composta. “[...] a firm must consider its portfolio of real options as one single compound option. Managing this option consists in pricing it repeatedly over time and implementing the implicitly generated optimal exercise policy” (Brosch, 2001, p.20).

Stulz (1982) discute a precificação de um portfólio financeiro com opções de compra e venda europeias relativas a dois ativos de risco. O autor considera

² *Since both options affect each other, they have to be priced simultaneously: the value of the first call increases because of the value of the second put, but to find the value of the call we need the value of the put and vice versa. The extreme case of negative interaction can be that the value of the portfolio equals the value of the most valuable option in isolation. This is the lower limit of value, because in the worst case all other options simply would not be exercised. The other extreme is super-additivity: the value of the portfolio is higher than the sum of the option values in isolation. Finally, it is conceivable that there is no interaction at all. Considering these cases together results in all possible options interactions being outlined. If more than two options on the same underlying asset exist, the problem becomes much more complex, but the principle of interaction remains the same: all options have to be priced simultaneously (Childs, 1998, p.8).*

que os projetos são mutuamente exclusivos, que possuem incertezas de mercado correlacionadas e que, ao contrário do que se propõe no presente estudo, não há aprendizado. Sob tais premissas, uma correlação positiva entre os ativos possui apenas o papel de reduzir o valor do portfólio. Margrabe (1978) chega a resultados semelhantes ao apresentar o caso de opções financeiras relativas a projetos mutuamente exclusivos, entretanto, ao contrário de Stulz (1982) precificando tanto opções americanas quanto europeias. A contribuição de Margrabe (1978) demonstra também que o exercício ótimo de uma opção americana somente irá ocorrer na expiração se o ativo subjacente não pagar dividendos. Caso pague dividendos pode ser que seja ótimo o exercício antecipado e, isso faz com que a opção americana tenha mais valor do que a europeia.

Carr (1995) propõe a precificação de opções americanas aplicadas às opções reais. Semelhantemente a Stulz (1982) e Margrabe (1978), também considera projetos mutuamente exclusivos e sem ganhos de aprendizado. O autor propõe o uso da fórmula de uma opção pseudo-americana, mais conhecida por opção de Bermuda (ou opção Bermudiana)³ para precificar opções reais de espera, abandono e troca. Carr (1995) destaca que uma potencial restrição à aplicação direta de tal fórmula às opções reais seria a dificuldade em obter os valores reais dos ativos subjacentes. Para resolver tal impedimento o autor propõe que em alguns casos os valores dos ativos possam ser obtidos a partir de determinado modelo de *valuation* que considere os preços correntes como entrada ou mesmo modelando, explicitamente o “ruído” presente em tal apreçamento. Em ambos os casos, ainda há o risco induzir o exercício sub-ótimo da opção.

In particular, real options might be exercised when they are out-of-the-money, and deep in-the-money options may sometimes fail to be optimally exercised. These effects work to reduce option value relative to the case with perfect observability. The magnitude of mispricing would depend positively on the the amount of noise (or the variance of the error term) (Carr, 1995, p.14).

Vassolo *et al.* (2004) apresentam uma contribuição à luz das opções reais, à discussão sobre a avaliação de um portfólio de ativos exploratórios. Os autores se

³ [...] view an American put option as the limit to a sequence of pseudo-American puts. A pseudo-American option can only be exercised at a finite number of discrete exercise points. As the number of possible exercise points grows, the value of a pseudo-American option approaches that of a true American one (Carr, 1995, p.6). Ver também Geske & Johnson (1984).

propõem a estudar as aplicações do modelo proposto ao setor de biotecnologia, em particular, avaliando aspectos estratégicos decorrentes das interações existentes entre os projetos. O chamado “efeito portfolio” pode ser tanto negativo (sub-aditividade do portfolio) quanto positivo (super-aditividade do portfolio) dependendo do cenário

[...] when a firm invests in multiple and competing projects, correlations among the outcomes of the projects lead to a sub-additive value of the portfolio [...] when a firm invests in multiple projects, fungibility of shared resources with the projects leads to a super-additive value of the portfolio (Vassolo et al., 2004, p.1047-1048).

Adicionalmente, na análise de Vassolo *et al.* (2004), oportunidades de investimento que são sub-aditivas para determinada firma para outra podem ser super-aditivas dependendo de sua capacidade ociosa e disponibilidade de recursos para investimentos e exercer opções de expansão. Sob tal pano de fundo, os autores consideram que as alianças estratégicas, no setor de biotecnologia são um tipo de opções reais. Por fim, os autores apresentam e testam um modelo econométrico que reflete a aplicação da teoria proposta a dados de 1989-1999, relativos a 363 acordos tecnológicos feito entre 30 indústrias farmacêuticas.

Luehrman (1998) apresenta uma contribuição que, semelhantemente a Vassolo *et al.* (2004) também destaca a gestão estratégica como a gestão de um portfolio de opções reais. Ao contrário da análise convencional por fluxo de caixa descontado, destaca que o uso de opções reais incorpora tanto a incerteza inerente às tomadas de decisões quanto o aspecto ativo do gestor na execução da estratégia (exercendo ou não opções em função do aprendizado, cenário, expectativas, etc.). “In financial terms, a business strategy is much more likely a series of options than a series of cash flows” (Vassolo *et al.*, 2004, p.90). O framework utilizado pelo autor foi utilizado em outros trabalhos empíricos, como Bravo *et al.* (2009) que avalia o portfolio da empresa à luz das opções reais. Luehrman (1998) não apresenta a quantificação do portfolio de opções reais e, tampouco destaca aspectos de sinergia e aprendizado decorrente da correlação existente entre ativos.

Dias (2005) é, talvez, a mais importante contribuição para o presente estudo. O autor discute a teoria de portfolio de ativos reais, com destaque para a exploração e desenvolvimento de campos de petróleo. Ao contrário da contribuição de outros autores como Murtha (1996), e Delfiner (2000), Dias

(2006) aborda explicitamente os aspectos de aprendizado (externalidade positiva gerada ao exercer uma opção, tal que exercer as outras opções se torna mais ou menos atrativo), sinergia (o desenvolvimento conjunto é mais valioso que a soma dos desenvolvimentos individuais) e opção de espera (pode ser melhor aguardar as expectativas de mercado para exercer uma opção de desenvolvimento). Em particular, as interações entre tais opções são consideradas na avaliação do portfólio. Sob tal pano de fundo, a opcionalidade e a correlação entre os ativos possui papel fundamental, segundo o autor, na avaliação do portfólio de opções reais. Para representar a aprendizagem (endógena), expressa no Fator de Chance dos prospectos exploratórios, o autor considera que o coeficiente de correlação quadrático é uma medida adequada. Os ganhos de sinergia, por sua vez, são função do coeficiente de correlação (ρ e não ρ^2). A opção de postergar o desenvolvimento do campo é função da expectativa de preços que foi modelada como um Movimento Geométrico Browniano. Por fim, o autor demonstra que, uma condição necessária para exercício imediato da opção de perfurar um poço exploratório é a existência de pelo menos um cenário com possibilidade estritamente positiva no qual a opção de desenvolvimento está *Deep-in-the-money* (ou seja, é ótimo o exercício imediato da opção de desenvolver o campo descoberto).

No que diz respeito à literatura de Computação evolucionária atualmente há uma vasta quantidade de material teórico e de aplicações nos mais diversos campos do conhecimento. Os textos clássicos de Holland (1992) e Koza (1992) são importantes contribuições para a popularização dos Algoritmos Genéticos e da Programação Genética. Pacheco (2000) traz um panorama geral sobre os Algoritmos Genéticos. Especificamente sobre a indústria de petróleo, Nikraves (2007) discute a aplicação de diversas técnicas de Inteligência Computacional (Redes Neurais, Lógica Fuzzy, Algoritmos Genéticos, Ondoletas, etc.) para a caracterização dos aspectos geofísicos e geológicos dos reservatórios a partir da interpretação de dados de sísmicas. Semelhantemente, Cuddy & Glover (2001) e McCormack *et al.* (1999) apresentam aplicações de Algoritmos Genéticos destinadas a melhorar a performance dos sistemas de reservatórios e produção. Velez-Langs (2005) sintetiza a literatura existente sobre aplicações de GA a diferentes problemas de exploração e produção na indústria de petróleo.

Há também uma extensa literatura sobre o uso de GA para resolver problemas de portfolio financeiros, fazendo uso da tradicional teoria de Markowitz (portfolio de média-variância). Anione (1993) é uma aplicação da computação evolucionária à tradicional teoria de portfolios, usando a probabilidade de perda como medida de risco ao invés da variância. Chang *et al.* (2009) mostra a eficácia da aplicação de algoritmos genéticos para problemas de otimização de portfolio de ativos financeiros, sob diferentes medidas de risco (semi-variância, desvio médio absoluto e variância assimétrica).

Até o presente momento não foram encontrados estudos que utilizem Algoritmos Genéticos especificamente para determinar o portfolio otimizado composto por opções sequenciais de exploração que incorporam os ganhos de aprendizagem conforme feito aqui. Apesar disso, notadamente, algumas contribuições como as de Pacheco & Vellasco (2007), Dias (2001) e Blau *et al.* (2004) merecem destaque e são peças-chave para resolver o estudo.

Pacheco & Vellasco (2007) apresenta uma interessante contribuição para o presente estudo. O autor propõe o uso de Algoritmos Genéticos para selecionar a quantidade e tipos de poços a serem perfurados no desenvolvimento de um campo de petróleo. Adicionalmente, incertezas de mercado de mercado também são consideradas o que aproxima a discussão teórica da realidade da indústria de petróleo. Interessante também a interação entre diferentes metodologias de apoio à decisão, como Lógica Fuzzy e Redes Neurais, com a computação evolucionária. A contribuição de Pacheco & Vellasco (2007) trata, essencialmente, das alternativas de desenvolvimento de um campo de petróleo. Nesse sentido, o presente estudo, ao se propor a analisar a sequência ótima de perfurações de poços exploratórios (e não de desenvolvimento), diz respeito a uma etapa anterior no processo de produção de petróleo e, portanto, poderia ser entendido como uma contribuição adicional ao conteúdo proposto em Pacheco & Vellasco (2007).

Dias (2001) apresenta uma aplicação de algoritmos genéticos para resolver um problema de selecionar a melhor alternativa de investimento em aquisição de informação no desenvolvimento de campo de petróleo. As alternativas avaliadas para aquisição de informação, ao contrário do presente estudo, são mutuamente excludentes. São consideradas tanto incertezas técnicas quanto de mercado (Movimento Geométrico Browniano e Processo de Reversão à média são os dois processos estocásticos utilizados para o preço do petróleo). Os resultados

encontrados usando computação evolucionária foram semelhantes àqueles obtidos usando métodos tradicionais (por exemplo, equações diferenciais parciais). “*In addition, the evolutionary approach looks much more flexible when choosing the stochastic processes and the way to combine technical and Market uncertainties*” (Dias, 2001, p.27). Uma interessante conclusão de Dias (2001) é que a melhor alternativa é aquela na qual, comparativamente, mais investimento é necessário, mas, em contrapartida, há também maior ganho de informação.

Blau *et al.* (2004) é uma interessante contribuição para o tema de pesquisa do presente estudo. É apresentado o problema de seleção de projetos aplicado à indústria farmacêutica, em particular, com o objetivo de desenvolver um novo medicamento. Assim como é feito aqui, o autor faz uso de algoritmos genéticos para encontrar a sequência ideal de projetos que maximize o retorno do portfólio, considerando as interdependências dos projetos, restrição de recursos e as incertezas inerentes ao setor farmacêutico. São consideradas quatro tipos de interdependências: (1) recursos, (2) custo, (3) retorno financeiro e (4) sucesso técnico⁴. Semelhantemente ao presente estudo, o aprendizado é considerado no modelo e é refletido como uma interdependência de recursos. No exemplo apresentado, decorrente de uma curva de aprendizado, há uma redução de 20% na dificuldade para cada medicamento testado em sequência para uma mesma doença. Ainda semelhantemente ao presente estudo, também a sinergia é considerada, embora dentro do contexto de Blau *et al.* (2004) a sinergia pode ser negativa (canibalização de mercado ao lançar dois produtos concorrentes). Assim, no modelo proposto, a sinergia, afeta tanto a dependência de custos quanto a de retorno financeiro. Por fim, a dependência de sucesso técnico tem um papel semelhante ao desempenhado pelo Fator de Chance no presente estudo.

Technical dependencies occur when the technical success or failure of a drug candidate affects the probability of technical success of an as-yet-untested trailing

⁴ É interessante notar que, apesar do autor não destacar explicitamente o diferente significado das correlações entre projetos (cujo conceito dentro do contexto de Opções Reais é diferente do conceito tradicional de Markowitz), ele destaca a sua importância no problema. “*Much like the exploitation of negative correlations between individual asset returns in managing a portfolio of financial assets (Markowitz, 1991), the structure of correlations and dependencies among development activity durations, capital investments, resource requirements, clinical success probabilities, and marketplace performance can be used in managing a portfolio of new drugs. However, unlike financial portfolio management, exploiting product dependencies requires prudent selection of drug candidates within a product portfolio and the sequence in which the drugs are developed*” (Blau *et al.* 2004, p.231).

drug candidate. For example, two drug candidates might be developed to release an active ingredient in a controlled fashion. If the precedent candidate is successful, the probability of success of the as-yet untested second candidate will be increased (Blau et al., 2004, p.233).

2.2.

Conceitos preliminares: VOI, Medidas de Aprendizagem e Processos de Revelação de Bernoulli

Nesta seção serão discutidos alguns conceitos básicos inerentes ao problema. Alguns tópicos como: o Valor da Informação, o papel da correlação; processos de revelação de Bernoulli, Medidas de Aprendizagem, Teorema de Frechet-Hoeffding, dentre outros, que formam a *base* do presente estudo são discutidos.

2.2.1.

Conceitos Básicos

2.2.1.1.

Valor da Informação

A discussão sobre a escolha da sequência otimizada de um portfólio exploratório, no contexto proposto, tem como pano de fundo a abordagem de Valor da Informação (VDI – no inglês “*Value of Information: VOI*”). A análise de VOI, por sua vez, tem sido desenvolvida no meio acadêmico desde a década de 1950 com os artigos de Arrow (1978) e Marschak (1959). Na década de 1960 o livro texto de Raiffa (1967) foi uma importante referência para a disseminação das técnicas de VDI, no meio acadêmico e profissional, com a emergente teoria de *análise de decisão*.

O valor da informação é sempre calculado ex-ante. Pretende-se, em última instância, avaliar se é coerente investir em aquisição de informações antes de realizar determinados investimentos. Na indústria de petróleo, por exemplo, as aplicações mais comuns dizem respeito a avaliar os ganhos decorrentes da aquisição de dados (realização de sísmicas 4D, por exemplo) previamente à perfuração de poços exploratórios, em comparação com os respectivos custos de aquisição.

A definição de que “*A análise de valor da informação avalia o benefício de coletar informação adicional para reduzir ou eliminar incerteza num contexto de*

tomada de decisão específico” (Yokota & Thompson, 2004 parece adequada para os propósitos da presente dissertação). Como veremos, a perfuração de determinado poço exploratório, além de revelar a existência ou não de petróleo em determinada região, fornece informações também sobre os demais poços que sejam correlacionados. Neste sentido, faz-se uma análise do Valor da Informação no contexto de tomada de decisão sobre um portfólio de investimentos.

Adicionalmente, chama atenção na definição acima, o aspecto de redução ou eliminação da incerteza. Em última instância, o investimento na aquisição de informação só faz sentido se resulta em alguma redução da *incerteza*⁵ considerada no problema. Como veremos no item 2.2.2 o presente estudo necessita de uma medida de redução da incerteza (ou alternativamente, uma medida que reflita o ganho de aprendizagem) e também de um modelo que incorpore o processo dinâmico de investimentos exploratórios e ganhos de aprendizagem. O conceito de *Revelação de Informações* a ser abordado aplica-se a uma gama de disciplinas além das finanças, e, no contexto aqui apresentado, é um elemento crucial para quantificar o valor do portfólio exploratório composto por opções de Aprendizagem.

A aquisição de informações adicionais, em geral, é mais valiosa sob incerteza. “[...] *quando existe incerteza, existe usualmente a possibilidade de reduzi-la através da aquisição de informação. Logo, a informação é a medida negativa de incerteza*” (Arrow, 1973). Com base em Dias (2005) **Informação** pode ser entendida como qualquer estímulo que altere o conhecimento prévio do receptor de tal informação. Em outras palavras, qualquer sinal que mude a distribuição de probabilidade do receptor a respeito de determinada variável de interesse – em um conjunto de possíveis estados da natureza.

Da definição acima podemos destacar dois casos extremos: (i) caso *não-informativo* onde a informação é irrelevante e a distribuição de probabilidades não muda, ou seja, a incerteza permanece inalterada e (ii) caso *informação perfeita*, onde a distribuição muda bruscamente sendo a incerteza integralmente eliminada

⁵ Há uma extensa discussão dentro das Ciências Econômicas, em particular em Macroeconomia entre Incerteza e Risco. Em geral, assume-se Risco como o grau de desconhecimento do valor futuro que possa ser refletido através de alguma distribuição estatística. Nesse contexto, todos os possíveis valores a serem assumidos pela variável aleatória são conhecidos e atribuídos uma determinada probabilidade de ocorrência a cada um deles. A incerteza, por sua vez, não pode ser “quantificada” como tal e refletiria o desconhecimento de todos os possíveis cenários futuros. Para os fins do presente estudo vamos considerar ambos conceitos como sendo sinônimos. Uma discussão sobre isto é apresentada em Langlois (1993).

e distribuição de probabilidades colapsada em um único ponto. Evidentemente que os casos intermediários, no qual alguma incerteza é reduzida, são os mais frequentes em aplicações práticas ao lado do caso não-informativo. Isso é, investimento em aquisições de informação podendo revelar alguma ou nenhuma informação, mas nunca chegando ao ponto de eliminar totalmente a incerteza.

É oportuno citar aqui a diferença entre informação e conhecimento. Uma analogia interessante é feita com a teoria econômica do capital⁶ na distinção entre capital físico e investimentos. Capital físico é o estoque (ativo) e investimentos é fluxo, sendo que quando ocorre altera o estoque de capital. Analogamente, o conhecimento é estoque e informação é o fluxo que altera o conhecimento. Tal como definimos, o conhecimento é entendido como uma distribuição de probabilidades acerca de uma determinada variável e nova informação é um sinal que revê os parâmetros de tal distribuição⁷.

De acordo com Lawrence (1999) todo o conhecimento inicial do decisor em relação à probabilidade de realização de cada estado da natureza está refletido na *distribuição a priori*. A nova informação obtida, expressa através de um *sinal* ou *mensagem*, pode ter por efeito a eliminação de alguns estados da natureza, aumento da probabilidade de outros e redução da probabilidade dos demais. Tal atualização do conhecimento pela nova informação tem como resultado a *distribuição posterior*.

Em um modelo probabilístico de aprendizagem, como o que se faz necessário nesta dissertação, é imprescindível que o mesmo reflita o relacionamento de variáveis aleatórias de interesse (vetor de estados da natureza \mathbf{X}) com variáveis aleatórias que geram sinais (vetor \mathbf{S}) para se conhecer melhor \mathbf{X} . Mais formalmente, o modelo deve conter distribuições a priori de variáveis aleatórias $G(\mathbf{X})$, distribuições conjuntas de $J(\mathbf{X},\mathbf{S})$ e distribuições condicionais de variáveis aleatórias $H(\mathbf{X}|\mathbf{S})$ ⁸.

Seja o conhecimento inicial representado pela densidade de probabilidades $p(x)$, o conjunto de escolhas possíveis α e o payoff representado pela opção real

⁶Ver Boulding (1996) e Lawrence (1993).

⁷ Como extensão, pode haver casos em que a própria distribuição de probabilidades (e não apenas os parâmetros) sejam alterados decorrentes de uma nova informação. Tal caso não será abordado no presente estudo.

⁸ Toda o desenvolvimento seguinte tem por base Dias (2005).

$F(\mathbf{X}, t, a)$, sendo que $a \in \alpha$, então o Valor da decisão a priori (VDP) é obtido como sendo o resultado da maximização do valor esperado da opção real:

$$VDP = \text{Max}_a \{E[F(\mathbf{X}, t, a)]\} = \text{Max}_a \left\{ \int_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}, t, a) p(x) dx \right\} \quad (1)$$

Assim, dentre o conjunto de todas as ações possíveis α é escolhida aquela que maximiza o valor da opção real que, por sua vez, é função das variáveis aleatórias (representada pelo vetor \mathbf{X}) e pelo tempo t .

Ao considerarmos o efeito da nova informação sobre a equação anterior, temos que, para cada possível sinal $s \in S$, será escolhida a ação α que maximiza o valor esperado da opção real dada a informação revelada. Assim, o Valor esperado da decisão informada (VEDI)⁹ é:

$$\begin{aligned} VEDI &= E[\text{Max}_a \{E[F(\mathbf{X}, t, a) | S]\}] \\ &= \int_S \text{Max}_a \left\{ \int_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}, t, a) p(x|s) dx \right\} p(s) ds \end{aligned} \quad (2)$$

Das equações acima fica evidente que o Valor da informação (VDI) é a diferença a seguir¹⁰:

$$VDI = VEDI - VDP \quad (3)$$

Segundo Hilton (1981), o VDI, por sua vez, está relacionado com: (i) o espaço de ações possíveis a serem tomadas -refletem o grau de flexibilidade do problema; (ii) a composição da função valor - *payoff*, no caso desta dissertação

⁹ As equações dizem respeito ao caso em que as distribuições de $p(x)$, $p(s)$ e $p(x|s)$ são contínuas, mas, evidentemente que o mesmo se aplica no caso de distribuições discretas (caso que será abordado neste estudo).

¹⁰ Como apontado em Dias (2005) não havendo interações estratégicas (múltiplos decisores) o VDI será sempre maior ou igual a zero. A informação adicional não reduz o VPL “previamente existente”, no caso limite, não o aumenta. Já havendo múltiplos decisores isso não procede. “Um exemplo clássico é o mercado de seguros de automóveis (e de seguros em geral). Se tanto o segurador como os segurados tivessem, antes de assinar o contrato, acesso à informação perfeita (“bola de cristal”) sobre o que ocorrerá com o bem segurado no período de contrato (sinistro ou não-sinistro), então um dos dois lados não iria querer assinar o contrato de seguro. Isso faria desaparecer o mercado de seguros, o que seria pior tanto para a seguradora (deixaria até de existir) como para os consumidores que demandam seguro (que não poderiam fazê-los). Assim, essa informação perfeita seria pior para ambas as partes” (Dias, 2005, p.143).

considerado o valor da Opção Real no cálculo do *payoff*; (iii) o nível de incerteza inicial – *distribuição a priori* e (iv) o reflexo para o decisor do mapeamento dos sinais S em relação aos estados de natureza da variável de interesse X, usualmente expressa através da função de verossimilhança mas que, neste estudo, como em Dias (2005), será usada a *redução esperada da variância*¹¹ como veremos no item 2.2.2.2.

A distinção entre o valor esperado da informação perfeita (VEIP) e valor esperado da informação imperfeita (VEII) é recorrente na literatura de VOI. Sendo o valor esperado da Opção Real $E[F(\mathbf{X},t)|S_{perf}]$ para o caso com informação perfeita e $F(\mathbf{X},t)$ o valor esperado da opção para o caso sem informação (ou incondicional à informação), tem-se que:

$$VEIP = E[F(\mathbf{X},t)|S_{perf}] - F(\mathbf{X},t) \quad (4)$$

Analogamente, o VEII é expresso por:

$$VEII = E[F(\mathbf{X},t)|S_{imperf}] - F(\mathbf{X},t) \quad (5)$$

Evidentemente que o grau de *perfeição* da informação revelada tem a ver com a informatividade do sinal emitido. Considerando θ uma medida que representa tal grau tem-se que a mesma varia desde $\theta=0$ (ausência de informação) até o caso de informação perfeita (máxima informatividade). Em todo o intervalo contido dentro destes limites está a informação imperfeita. Nesta dissertação é considerado o caso da informação imperfeita no qual a informação não revela o verdadeiro cenário e sim uma nova distribuição de probabilidades (*distribuição posterior*)

Segundo Lawrence (1999, p.16) a Estrutura de informação diz respeito ao espaço de sinais e a medida conjunta de estados e mensagens. Formalmente, tem-se a Estrutura de Informação, l como:

¹¹ A função de verossimilhança é a distribuição $g(s|x)$ como função de x. Dias (2005) propõe uma medida de aprendizagem η^2 – redução esperada da variância que, como veremos, possui melhores propriedades para o tipo de aplicação proposto, além de ser mais prática, intuitiva e de fácil obtenção por métodos estatísticos tradicionais (regressão e Tabela ANOVA, por exemplo) do que a anterior.

$$l = \{S, p(x, s)\} \quad (6)$$

A medida conjunta representa a distribuição conjunta de probabilidades de duas variáveis aleatórias $p(x,s)$. Da definição acima decorre a importância de considerar distribuições de probabilidades bivariadas (e também multivariadas) de probabilidades na análise de VOI. Como veremos no item 2.2.3.2, nesta dissertação usamos a Distribuição bivariada de Bernoulli na modelagem do problema proposto. Neste caso, a *distribuição posterior* é também uma Bernoulli com parâmetro p atualizado pela nova informação e a decisão é tomada com base na média da *distribuição posterior* revelada, ou seja, no valor esperado condicional à informação revelada.

2.2.1.2.

Incerteza, Prospectos Exploratórios e Fatores de Chance

Na literatura de Opções Reais é presente a distinção entre incertezas de diferentes tipos de natureza. Do ponto de vista econômico, os tipos que são mais relevantes são:

1. *Incerteza Econômica (ou de mercado)*: São incertezas exógenas ao projetos. Em geral, são relacionadas aos movimentos da economia. Na indústria de petróleo, alguns exemplos seriam: projeção do preço de petróleo; taxa de câmbio; demanda por derivados, entre outros.
2. *Incerteza Estratégica*: São presentes quando se considera a interação entre os agentes. Relaciona-se ao comportamento ou às preferências de outros agentes que interagem num ambiente econômico. São endógenas e modeladas com teoria dos jogos Bayesianos. Na indústria de petróleo, alguns exemplos são: Lances de outras empresas no leilão da ANP; negociações de *farm-in* e *farm-out*; definições de regras de exploração (Concessão X Partilha de produção).
3. *Incertezas Técnicas*: São incertezas específicas (endógenas) do projeto. Não são correlacionadas aos movimentos da economia. Na indústria de petróleo alguns exemplos são: incertezas em relação à existência, volume e qualidade de um campo de petróleo.

O foco desta dissertação está nas incertezas técnicas que, por serem endógenas, podem ser equacionadas através do investimento em informação (aprendizado) para revelar o verdadeiro cenário ou, pelo menos, reduzir a incerteza.

Na indústria de petróleo, a modelagem de incertezas técnicas é muito importante em todas as fases do projeto de exploração e desenvolvimento de determinado campo de petróleo. A Figura 1, adaptada de Dias (2005), ilustra as diferentes incertezas técnicas inerentes à campanha de E&P e as respectivas formas de aquisição de informação que, potencialmente, as minimizariam.



Figura 1 – E&P e Investimento em Informação
 Fonte: Dias (2005).

Dentre as diversas incertezas técnicas presentes da campanha de E&P, esta dissertação aborda, especificamente, aquelas inerentes ao processo exploratório. Ou seja, todo o investimento exploratório a ser feito para se quantificar o potencial de produção de determinada área.

Para tal, parte-se dos **prospectos exploratórios** que são, em última instância, uma área com probabilidade de se encontrar hidrocarbonetos. Normalmente a área do prospecto é mapeada pela sísmica, que dá uma ideia da estrutura (tamanho da potencial reserva, presença ou não de selo, se a geometria é ou não favorável a ter hidrocarbonetos, etc.). Entretanto, a despeito da sísmica indicar a presença de uma estrutura com ótimas propriedades, pode ser que a mesma esteja cheia de água e não de óleo. Só a perfuração de um poço exploratório (ou mais) pode comprovar ou não a existência de um campo de petróleo ou de gás.

Cada prospecto exploratório possui uma probabilidade inicial de ter ou não petróleo que é estimada a partir dos dados preliminares (obtidos antes da perfuração do poço *wildcat*). Essa probabilidade é uma variável-chave nesta dissertação e ela é chamada de **Fator de Chance (FC)**. Como veremos no item 2.3.2.1 o a distribuição que será usada para modelar o FC é a distribuição de *Bernoulli* cujo parâmetro p reflete, exatamente, a probabilidade de sucesso na perfuração do poço exploratório (*wildcat*).

Na indústria de petróleo é comum tratar o FC como uma função (produto) de alguns sub-fatores independentes, sendo que, cada fator em si tem uma distribuição de *Bernoulli*. Em geral, são considerados 6 sub-fatores: (i) Existência (ou não) de rocha geradora; (ii) migração; (iii) sincronismo geológico, (iv) trapa geométrica; (v) retenção (selo e preservação) e (vi) reservatório.

O fator (i) Existência de rocha geradora é um fator global. Já (ii) Migração e (iii) Sincronismo geológico são fatores regionais. Os demais são fatores locais. Fatores globais e regionais são comuns aos prospectos de bacia ou de uma região da bacia. Já os fatores locais são específicos da locação. Tal distinção é particularmente útil por que os efeitos da aprendizagem decorrente do investimento em aquisição de informação, claramente, são diferentes em cada um dos fatores. Por exemplo, no caso de uma bacia ainda não explorada não há conhecimento prévio sequer sobre a existência de rocha geradora. Nesse caso, uma perfuração do poço exploratório pode alterar significativamente o fator dos demais prospectos. Já os fatores locais são mais específicos e já teriam sido previamente “mapeados” pela sísmica, de forma que o fator de chance do prospecto já reflete tais informações e os ganhos de informação decorrente da perfuração do prospecto exploratório são menos expressivos¹².

2.2.2. Medidas de Aprendizagem

Um pré-requisito no presente estudo é obter uma medida que represente adequadamente a relação entre as duas variáveis aleatórias em questão e seja capaz de expressar as especificidades do presente problema. A distribuição

¹² Mas, mesmo nesse caso local, existe o ganho de aprendizagem pois, a calibração da sísmica pode ser ajustada após a perfuração de um prospecto (melhora a calibração do tempo-profundidade) e essa melhor calibração impacta no fator de chance de outros prospectos correlacionados.

conjunta de $p(x,s)$ normalmente é composta pelas distribuições marginais univariadas de X e de S e um parâmetro (ou medida) que irá determinar o grau de dependência entre tais variáveis.

A escolha pela medida de dependência adequada é função do tipo de problema que está sendo analisado. A simetria, por exemplo, é um aspecto da medida que pode ser mais ou menos relevante conforme a natureza do problema considerado. Uma medida de dependência muito popular é o *coeficiente de correlação* (ρ). Apesar de ser amplamente utilizado nem sempre pode ser a melhor opção. Como veremos, depende das distribuições marginais envolvidas e do tipo de problema.

Há uma extensa discussão acadêmica sobre uma relação de axiomas (propriedades desejáveis) para as medidas de dependência probabilística. Rényi (1959), Mari & Kotz (2001) e Hall (1970) são algumas contribuições sobre este debate. A partir de Dias (2005) são listadas as propriedades desejáveis para uma medida de aprendizagem $M(X|S)$ adequada ao presente estudo. Tal medida deve atender aos seguintes axiomas:

- (a) $M(X|S)$ deve existir pelo menos para todas as variáveis aleatórias X e S com incerteza *não-trivial* (não-determinística) e todas as variáveis aleatórias com incerteza *finita*;
- (b) $M(X|S)$ deve em geral ser assimétrica;
- (c) $M(X|S)$ deve ser normalizada no intervalo unitário;
- (d) Se X e S forem independentes $\Rightarrow M(X|S) = M(S|X) = 0$.
Além disso, se $M(X|S) = 0 \Rightarrow$ Não haver aprendizagem;
- (e) Em caso de dependência funcional a medida deverá ser máxima $M(X|S) = 1$. Além disso, se $M(X|S) = 1 \Rightarrow$ Aprendizagem é máxima;
- (f) $M(aX + b|S) = M(X|S)$ e $M(X|S) = M(X|aS + b)$ para a e b constantes reais e $a \neq 0$;
- (g) $M(X|S)$ deve ser prática no sentido de ter fácil interpretação e quantificação;
- (h) $M(X|S)$ deve ser aditiva. $M(X|S_1) + M(X|S_2) + \dots + M(X|S_n) = 1$, onde S_1, S_2 são variáveis aleatórias independentes e X uma soma de funções reais quaisquer desses sinais, $X = f(S_1) + g(S_2) + \dots + h(S_n)$.

O axioma (a) essencialmente diz que a medida M tem de existir para os casos de interesse prático, isto é, nos casos em que a variância de X não seja zero

(não haver incerteza) nem seja infinita. Por sua vez, (b) é algo desejável neste estudo pois é importante poder medir os casos em que se aprende mais de S conhecendo X do que o contrário (aprender de X , se conhecendo S). Decorrente de (c) a interpretação da medida de aprendizagem é facilitada sendo, $0 \leq M(X|S) \leq 1$, podendo ser lida com um percentual. O axioma (d) trata dos casos em que, caso os eventos fossem independentes (como lançar duas moedas ao ar no mesmo tempo), não haveria nenhum tipo de aprendizagem, ou seja, o resultado de um lançamento em nada afeta o outro. Em (e) está definido que, havendo dependência funcional, conhecendo-se S a função determina um único X (decorrente da definição de função) e a incerteza é eliminada. O axioma (f) define que a medida de aprendizagem deva ser invariante a transformações lineares (mudança de escala da variável aleatória X ou S). A propriedade destacada em (g) reflete o caráter intuitivo da medida de aprendizagem. Por fim (h) diz respeito ao caso no qual a informação possa ser decomposta numa soma de n fatores independentes $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ e o conhecimento de todos os fatores proporcionem uma aprendizagem máxima, então a soma das medidas de aprendizagem deve ser unitária.

2.2.2.1. Limites de Fréchet-Hoeffding

Os *limites de Fréchet-Hoeffding* para distribuições bivariadas dadas as marginais foram estabelecidos na década de 50 e, neste estudo são de particular interesse por, definirem algumas restrições ao problema. Considere a distribuição (acumulada) conjunta bivariada G com duas distribuições marginais (acumuladas) G_1 e G_2 . Fréchet e Hoeffding¹³ provaram que:

$$L(x, y) \leq G(x, y) \leq U(x, y) \quad (7)$$

Onde, $L(x,y)$ é definido como o Limite Inferior de Fréchet-Hoeffding e $U(x,y)$ o Limite Superior, os quais são dados por¹⁴:

$$L(x, y) = \text{Max}\{0, G_1(x) + G_2(y) - 1\} \quad (8)$$

¹³ Ver Hoeffding (1994, 1994a).

¹⁴ A prova pode ser vista, por exemplo em Mari e Kotz (2001).

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{Min}\{G_1(\mathbf{x}), G_2(\mathbf{y})\} \quad (9)$$

A partir de tais limites é possível construir uma família de distribuições bivariadas a partir das distribuições marginais através de uma combinação convexa ($w_1, w_2 \geq 0$; $w_1 + w_2 = 1$):

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w_1 L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + w_2 U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (10)$$

Considerando o caso mais geral, distribuição multivariada com n variáveis aleatórias de distribuições marginais $G_1(x_1), G_2(x_2) \dots, G_n(x_n)$, os limites de Fréchet-Hoeffding são¹⁵:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{Max}\{0, G_1(x_1) + G_2(x_2) + \dots + G_n(x_n) - (n - 1)\} \quad (11)$$

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{Min}\{G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)\} \quad (12)$$

Tais equações definem os limites prevalecentes na estrutura de dependência das variáveis, qualquer que seja a maneira como ela seja medida¹⁶. A partir das equações acima e das distribuições marginais de cada variável aleatória é possível calcular os limites para cada medida de dependência. Tais limites serão definidos na distribuição conjunta de Bernoulli e serão aplicados aos estudos de caso considerados no capítulo 3.

2.2.2.2.

Redução Percentual Esperada da Variância de X

Dentre as diversas medidas de dependência existentes na literatura de probabilidade e estatística uma que é pouco mencionada é a Redução esperada da Variância (η^2)¹⁷. Uma possível causa para a medida não ser tão comumente referenciada é o fato de que a mesma é assimétrica, uma característica que, muitas vezes, não é desejável mas que, nesta dissertação representa uma vantagem e uma boa qualidade da medida de aprendizagem considerada.

¹⁵ A prova pode ser vista, por exemplo em Müller & Stoyan (2002).

¹⁶ Como será visto, neste estudo, os limites irão definir valores máximos e mínimos para o coeficiente de correlação entre os prospectos.

¹⁷ Joe (1997) e Mari e Kotz (2001) são exemplos de literaturas que deram pouca (ou nenhuma ênfase na Redução Percentual Esperada da Variância de X).

Definição: Sejam duas variáveis aleatórias X e S com médias e variâncias finitas, definidas no espaço de probabilidades (Ω, Σ, P) . Define-se a redução esperada da variância de X dado S como:

$$\eta^2(X|S) = \frac{Var(X) - E[Var(X|S)]}{Var(X)} \quad (13)$$

A notação com o termo quadrático (η^2) tem por propósito, tanto facilitar a conexão com a interpretação estatística (razão de correlação), quanto porque em determinados casos (em particular, Processos de Bernoulli, como considerados nesta dissertação) é mais intuitivo (do ponto de vista da interpretação) usar a raiz positiva de η^2 , ou seja, η (Dias, 2005).

A notação com o termo quadrático (η^2) tem por propósito, tanto facilitar a conexão com a interpretação estatística (razão de correlação), quanto porque em determinados casos (em particular, Processos de Bernoulli, como considerados nesta dissertação) é mais intuitivo (do ponto de vista da interpretação) usar a raiz positiva de η^2 , ou seja, η .

Em Dias (2005, p.201) é provado que a variância da distribuição de revelações é dada pela redução esperada da variância de X induzida pelo sinal S, ou seja:

$$Var(R_x) = Var(X) - E[Var(X|S)] \quad (14)$$

Com isso, a fórmula da Redução Percentual Esperada da Variância de X pode ser reescrita como:

$$\eta^2(X|S) = \frac{Var[E(X|S)]}{Var(X)} = \frac{Var(R_x)}{Var(X)} \quad (15)$$

Uma possível interpretação da medida de aprendizagem é como sendo a variância normalizada da distribuição de revelação. Neste caso, a variância da distribuição a priori (a variância inicial) é considerada como fator de normalização.

Evidentemente que, de forma análoga podemos definir a redução esperada da variância de S dado X como:

$$\eta^2(S|X) = \frac{\text{Var}(S) - E[\text{Var}(S|X)]}{\text{Var}(S)} \quad (16)$$

Como destacamos, uma vez que a medida não é simétrica, no caso geral, temos que $\eta^2(X|S) \neq \eta^2(S|X)$.¹⁸

Em relação às propriedades desejáveis (ou axiomas) de uma medida de aprendizagem, listados no item 2.2.2, Dias (2005, p.239-243) demonstra que a medida η^2 é atende às mesmas sendo adequada aos fins deste estudo. Destaca-se que:

- (a) A medida $\eta^2(X|S)$ existe sempre que $\text{Var}(x) > 0$ e finita;
- (b) $\eta^2(X|S)$ é, no caso geral, assimétrica. $\eta^2(X|S) \neq \eta^2(S|X)$;
- (c) $0 \leq \eta^2 \leq 1$;
- (d) Se X e S forem independentes $\Rightarrow \eta^2(X|S) = \eta^2(S|X) = 0$.

Além disso, vale a expressão:

$$\eta^2(X|S) = 0 \Leftrightarrow \text{Var}[E(X|S)] = \text{Var}[R_x(S)] = 0;$$

- (e) Se $\eta^2(X|S) = 1 \Leftrightarrow$ existe uma função real, a variável aleatória $g(S)$, em que $X=g(S)$;
- (f) A medida η^2 é invariante a transformações lineares de X;
- (g) A medida η^2 é invariante a transformações lineares e não-lineares de S se $g(S)$ for uma função 1-1. Ou seja, $\eta^2(X|g(S)) = \eta^2$, se $g(s)$ é função 1-1;
- (h) A medida η^2 é aditiva. Ou seja, $\eta^2(X|S_1) + \eta^2(X|S_2) + \dots + \eta^2(X|S_n) = 1$ aditiva, onde S_1, S_2 são variáveis aleatórias independentes e X uma soma de funções reais quaisquer desses sinais, $X = f(S_1) + g(S_2) + \dots + h(S_n)$.

2.2.3.

Processo de Revelação de Bernoulli

2.2.3.1.

Distribuição de Bernoulli e a revisão do Fator de Chance

A distribuição de Bernoulli é uma das distribuições de probabilidades mais comuns, e também mais simples da estatística. É uma distribuição que possui apenas um parâmetro e dois cenários possíveis. Com probabilidade p ocorre um

¹⁸ Ver Dias (2005, p.229-230) para uma ilustração de como assimetria é uma propriedade desejável no contexto do presente estudo.

dos cenários (com valor 1; *sucesso*) e com probabilidade (1-p) ocorre o outro cenário (com valor 0; *fracasso*). O exemplo mais comum de uma aplicação da distribuição de Bernoulli é o lançamento de uma moeda, não-viesada, ao ar. Com probabilidade p o resultado é *cara* e com probabilidade 1-p o resultado é *coroa*. Nesse caso, claramente, se a moeda não for viesada p será 50%.

No contexto desta dissertação a distribuição será adequada para modelar a incerteza mais básica inerente à exploração de petróleo, a saber, a incerteza relativa à existência de petróleo em um prospecto exploratório. A variável que expressa tal incerteza é o Fator de Chance (FC) que reflete a probabilidade de existência de petróleo em determinado prospecto. Assim,

$$FC \sim Be(p)$$

A função densidade de probabilidade (fdp) de uma Bernoulli pode ser expressa através de uma das equações a seguir

$$Be(x) = \begin{cases} 1 - p & \text{para } x = 0 \\ p & \text{para } x = 1 \end{cases} \quad (17)$$

$$Be(x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \text{ sendo } x = 0 \text{ ou } 1 \quad (18)$$

A distribuição acumulada G(x) é expressa por

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - p & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

O Gráfico 1 retrata a fdp de uma Bernoulli cujo parâmetro p é 0,3 (caso base do capítulo seguinte) e também a função G(x) com parâmetro genérico p.

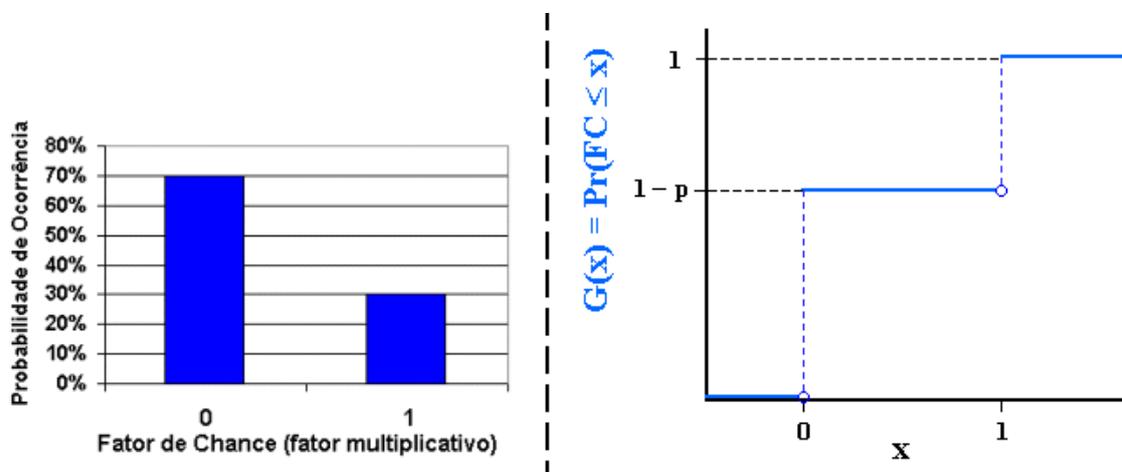


Gráfico 1 – FDP e FDA de uma Bernoulli
Fonte: Dias (2005)

As propriedades mais importantes da Bernoulli, em particular para este estudo são a média e a variância, sendo:

$$E[Be(p)] = E[FC] = p \quad (20)$$

$$Var[Be(p)] = Var[FC] = p(1 - p) \quad (21)$$

Nota-se que a variância é máxima quando $p = 0,5$ e mínima (igual a zero) nos casos em que $p=1$ ou $p=0$. Tal como no caso da distribuição normal, a informação de Fisher $I(p)$ para a distribuição de Bernoulli é o inverso da variância.

$$I(p) = 1/[p(1 - p)] \quad (22)$$

Nota-se que a informação de Fisher é mínima quando $p=50\%$ e tende ao infinito nos casos de revelação total, isto é, $p=1$ ou $p=0$.

A Tabela seguinte resume algumas das propriedades mais importantes do distribuição univariada de Bernoulli.

Tabela 1 – Principais propriedades da distribuição de Bernoulli

Propriedade/ Função	Equação
Média	$E[Be(p)] = p$
Variância	$Var[Be(p)] = p(1 - p)$
Assimetria	$\gamma_3[Be(p)] = \frac{1 - 2p}{\sqrt{p(1 - p)}}$
Curtose	$\gamma_4[Be(p)] = \frac{1}{p(1 - p)} - 3$
Função Característica	$\phi(t) = 1 + p(e^{it} - 1)$
Função Geradora de Momentos	$M(t) = (1 - p) + p e^t$
Estimador de p (n sucessos na amostra N)	$\hat{p} = \frac{n}{N}$

Fonte: Dias (2005).

Nos casos em que $p=1$ ou $p=0$ a distribuição de Bernoulli é chamada degenerada. Em tais situações se tem a revelação total do verdadeiro cenário da distribuição ou seja, se $p=0$ então com 100% de probabilidade $FC = 0$ (e, claro, se $p=1$ então com 100% de chance $FC=1$). Isso significa que, nesses casos a

incerteza é eliminada. No contexto da exploração de petróleo isso ocorre no momento em que um determinado prospecto é perfurado e então se tem o resultado como sendo *sucesso* ou *fracasso*.

Alternativamente pode-se entender a revelação total como através de determinado sinal S que resulte em aprendizagem máxima. Considere dois prospectos 100% correlacionados (positivamente). Nesse caso, ao perfurar um prospecto e o resultado da perfuração ser *sucesso* com 100% de probabilidade o resultado da perfuração do outro prospecto também será *sucesso*

O caso acima ilustra um aspecto interessante a ser evidenciado no capítulo seguinte. Considerando um portfólio de prospectos exploratórios, mesmo um resultado negativo (*fracasso*) na perfuração de um prospecto pode ser muito valioso. Decorrente da aprendizagem obtida na perfuração do prospecto inicial poderia evitar fazer um investimento adicional que resultaria num *poço seco*. Evidentemente que o caso acima é um limite (correlação 100% entre dois prospectos) e que, no mundo real, o grau de correlação entre os prospectos é que irá determinar essa intensidade da aprendizagem.

O conceito de “*play geológico*” é muito importante para determinar a sequência ótima de perfurações do portfólio exploratório (Dias, 2005, p.265).

Play geológico é uma família de campos, descobertas, prospectos e caminhos/regiões (“leads”) que tem similaridade geológica, isto é, compartilham a mesma origem geológica. A similaridade se dá principalmente em termos de tipo de rocha do reservatório, geometria da trapa (para aprisionar o petróleo no reservatório) e a rocha geradora do petróleo (Dias, 2005, p.265).

Assim, temos que os prospectos situados em um mesmo *play geológico* são correlacionados, ou seja, decorrente de compartilharem as mesmas características geológicas, a informação decorrente da perfuração de um determinado prospecto, é considerada para revisar (positivamente, ou não) os fatores de chance de todos os demais prospectos naquele *play geológico*.

Conforme visto no item 2.2.1.2, O Fator de Chance de um prospecto usualmente é a combinação de outros sub-fatores, como (i) Existência (ou não) de rocha geradora; (ii) migração; (iii) sincronismo geológico, (iv) trapa geométrica;

(v) retenção (selo e preservação) e (vi) reservatório¹⁹. Sendo FC composto pela multiplicação de todos os sub-fatores acima, se qualquer um destes não ocorrer, necessariamente não haverá reserva de petróleo. Evidentemente que o resultado da perfuração de um prospecto terá impactos diferentes (em termos de revisão do FC) em cada um dos sub-fatores acima.

A estimativa inicial de cada um dos sub-fatores é feita por estudos de especialistas. Rose (2001, p. 34-36) sugere a utilização da escala de subjetiva de probabilidade que relaciona frases com faixas de valores de probabilidade do fator (ou sub-fator) de chance. Tal Tabela seria a base para os especialistas quantificarem os riscos de cada sub-fator do prospecto.

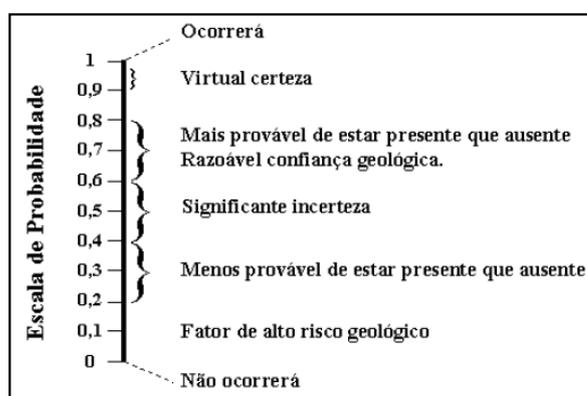


Figura 2 – Escala subjetiva de probabilidade
Fonte: Dias (2005).

2.2.3.2.

Distribuição Bivariada de Bernoulli: Fator de Chance e Sinal

Na análise de portfólio exploratório é necessário modelar como determinado sinal S pode revisar o fator de chance (FC) de um prospecto. No contexto desta dissertação, o sinal S representa a informação adquirida decorrente da perfuração de um poço vizinho cujo resultado irá impactar na revisão do FC de prospectos correlacionados. Isso é particularmente interessante dentro da perspectiva de priorização e sequenciamento otimizado da campanha de perfurações.

Esta dissertação considera que tanto o sinal S como o Fator de Chance do prospecto de interesse são variáveis aleatórias que seguem a distribuição de Bernoulli. A relação de dependência entre as duas distribuições é especificada,

¹⁹ Ver Rose (2001) e Delfiner (2000) como referência para discussão sobre a composição dos sub-fatores.

usualmente, através da distribuição de probabilidade conjunta entre S e FC, no caso a distribuição Bivariada de Bernoulli.

No caso geral, uma distribuição multivariada de Bernoulli com k distribuições marginais, possui $2^k - 1$ parâmetros (Marshall & Olkin, 1985). Para os propósitos desta dissertação, $k=2$, de forma que a distribuição é inteiramente definida com três parâmetros. Ainda que na análise de portfólio exploratório sejam avaliadas um grande número de variáveis (geralmente, $n > 2$) que sejam correlacionadas e seguem a distribuição de Bernoulli, a distribuição bivariada (e não a multivariada) se mostra como adequada pois, a evolução do Fator de Chance (processo de revelação de Bernoulli) se dá através de uma sequência de distribuições bivariadas de Bernoulli.

Os parâmetros que definem a distribuição bivariada são os dois parâmetros das distribuições marginais (probabilidades de sucesso p ou q) e um terceiro parâmetro que represente a correlação entre as distribuições marginais. Neste estudo o terceiro parâmetro considerado é o coeficiente de correlação ($\rho = \eta$). A Tabela 2 apresenta a distribuição bivariada de Bernoulli e as suas distribuições marginais univariadas.

Tabela 2 – Distribuição marginal e bivariada de Bernoulli

		Sinal S (ex.: sísmica)		Distribuição Marginal de X (FC)
		S = 1	S = 0	
Variável X (ex.: fator de chance)	X = 1	p_{11}	p_{10}	p
	X = 0	p_{01}	p_{00}	$1 - p$
Distribuição Marginal de S		q	$1 - q$	

Fonte: Dias (2005)

Aplicando a equação 18, tem-se a função densidade de probabilidade bivariada de Bernoulli como:

$$p(x, s) = (p_{00})^{(1-s)(1-x)} (p_{01})^{(1-s)x} (p_{10})^{s(1-x)} (p_{11})^{s,x}, x \text{ e } s = 0,1 \quad (23)$$

A Figura abaixo traz um exemplo no qual a distribuição bivariada de Bernoulli tem como parâmetros, $FC_a = FC_b = 30\%$ e o $\eta = 40\%$.

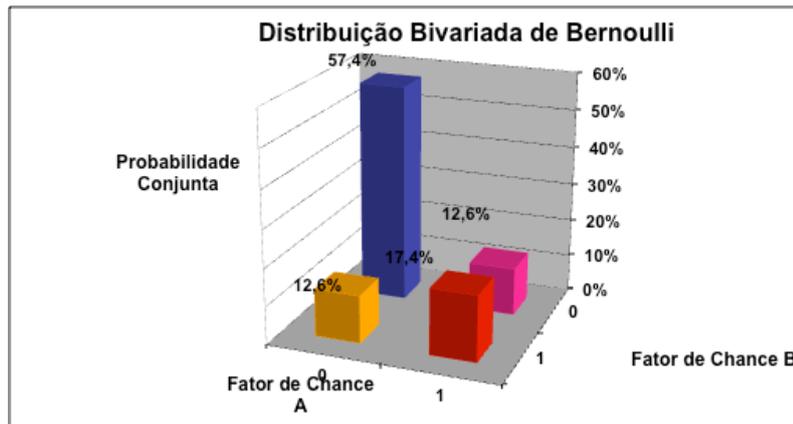


Gráfico 2 – Distribuição bivariada de Bernoulli
Fonte: Elaboração própria

Aqui, iremos adotar a mesma notação de Dias (2005) na qual, a probabilidade de sucesso do prospecto, antes da informação proveniente do sinal S , é FC_0 .

$$FC_0 = p \quad (24)$$

Como $FC \sim Ber(p)$ a distribuição de revelações tem apenas dois cenários, FC^+ e FC^- , que são as possíveis evoluções de FC_0 , em função do sinal S (com probabilidades q e $1-q$, respectivamente). O Gráfico 3 ilustra a evolução de FC decorrente de um sinal e a função densidade de probabilidade de revelações de Bernoulli.

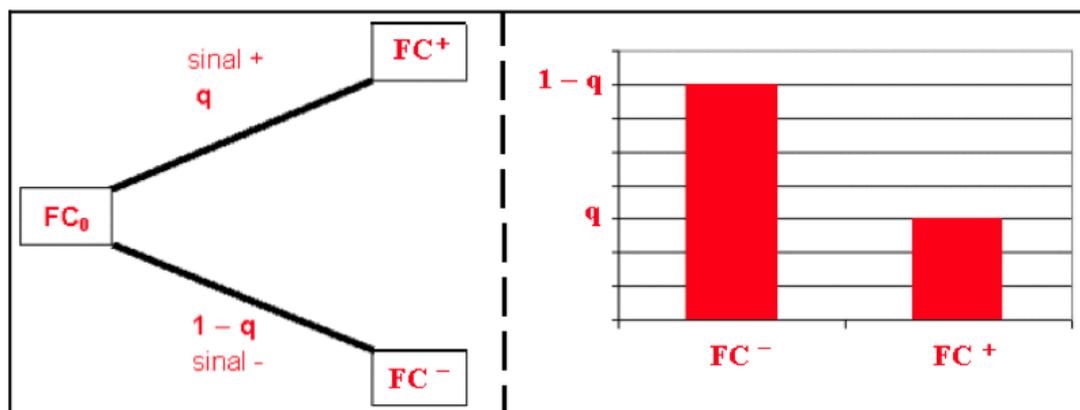


Gráfico 3 – Distribuição de revelações de Bernoulli com um sinal
Fonte: Dias (2005)

A variância da distribuição de revelações (Dias, 2005, p. 277-278), em função da medida de aprendizagem η é dada por:

$$Var[R_{FC}(S)] = \eta^2(FC|S)FC_0(1 - FC_0) \quad (25)$$

A partir da teoria elementar sobre distribuições marginais e conjuntas, temos as seguintes probabilidades de sucesso marginais:

$$FC_0 = p = p_{11} + p_{10} \quad (26)$$

$$q = p_{11} + p_{01} \quad (27)$$

$$p_{11} + p_{10} + p_{01} + p_{00} = 1 \quad (28)$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, podemos reescrever os valores dos cenários FC^+ e FC^- , em função das variáveis básicas FC^0 , q e p_{11} , como:

$$FC^+ = \frac{p_{11}}{q} \quad (29)$$

$$FC^- = \frac{p_{10}}{1-q} = \frac{FC_0 - p_{11}}{1-q} \quad (30)$$

Combinando as equações 26 e 27 na equação 28, encontramos o valor da probabilidade p_{00} em função das variáveis básicas FC^0 , q e p_{11} , como:

$$p_{00} = 1 + p_{11} - FC_0 - q \quad (31)$$

Kocherlakota & Kocherlakota (1992, p.57) demonstram que o fator de chance, FC , e o sinal são variáveis independentes de Bernoulli, se e somente se, a probabilidade conjunta de sucesso for igual ao produto das probabilidades marginais, ou seja:

$$FC \text{ e } S \text{ independentes} \Leftrightarrow p_{11} = FC_0 q \quad (32)$$

Os autores definem²⁰ a covariância e o coeficiente de correlação da distribuição bivariada de Bernoulli, respectivamente, como:

$$Cov(FC, S) = p_{11} - FC_0 q \quad (33)$$

²⁰ Ver Kocherlakota & Kocherlakota (1992, p.57).

$$\rho(FC, S) = \frac{p_{11} - FC_0q}{\sqrt{FC_0(1 - FC_0)q(1 - q)}} \quad (34)$$

Da equação 33 acima $COV(FC, S) = 0$ se e somente se $p_{11} = FC_0q$, então no caso específico da distribuição bivariada de Bernoulli (ao contrário do caso geral na maioria das distribuições) covariância igual a zero implica em independência estatística.

Semelhantemente à covariância, para a distribuição bivariada de Bernoulli, ao contrário da regra geral, não-correlação das variáveis aleatórias também implicam em independência estatística. Com isso, especificamente para o caso da distribuição bivariada de Bernoulli, dependência implica $|\rho(X, S)| > 0$ e *correlação* significa *dependência*

A partir da equação 34, os casos não correlacionados, com correlação positiva e negativa são, respectivamente:

$$\rho(FC, S) = 0 \Leftrightarrow p_{11} = FC_0q \quad (35)$$

$$\rho(FC, S) > 0 \Leftrightarrow p_{11} > FC_0q \quad (36)$$

$$\rho(FC, S) < 0 \Leftrightarrow p_{11} < FC_0q \quad (37)$$

Os limites de Fréchet-Hoeffding, para o coeficiente de correlação são²¹:

$$\text{Max} \left\{ -\sqrt{\frac{FC_0q}{(1 - FC_0)(1 - q)}}, -\sqrt{\frac{(1 - FC_0)(1 - q)}{FC_0q}} \right\} \leq \rho \quad (38)$$

$$\rho \leq \sqrt{\frac{\text{Min}\{FC_0, q\}(1 - \text{Max}\{FC_0, q\})}{\text{Max}\{FC_0, q\}(1 - \text{Min}\{FC_0, q\})}} \quad (39)$$

Considere o caso com 2 prospectos, A e B, cujo fatores de chance, são respectivamente $FC_a = 20\%$, $FC_b = 45\%$ e o coeficiente de correlação $\rho = 70\%$. Aplicando os limites dados pela equação anterior temos $-40,8\% \leq \rho \leq 61,3\%$. O Gráfico 4 evidencia como os limites de Fréchet Hoeffding não são obedecidos

²¹ A prova está em: JOE, 1997, p.210

tendo por consequência uma a probabilidade conjunta negativa em um dos cenários possíveis.

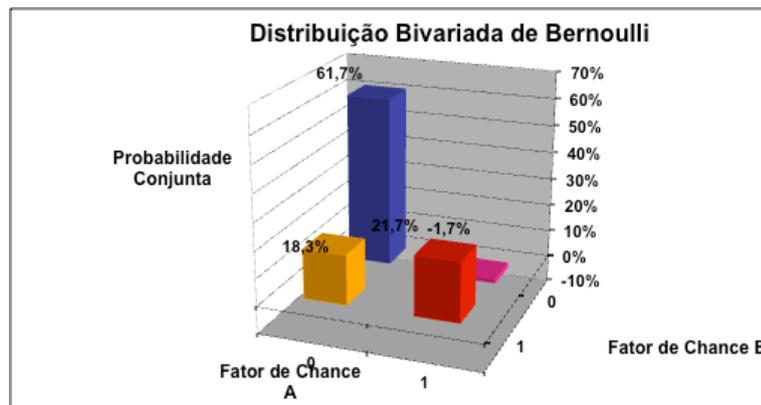


Gráfico 4 – Probabilidades que não atendem limites de FH
Fonte: Elaboração própria

Dias (2005, p.280-282) demonstra que, considerando duas variáveis aleatórias $FC \sim Ber(p)$ e $S \sim Ber(q)$ a definição de η^2 (equação 13), as probabilidades de sucesso reveladas por S são²²:

$$FC^+ = FC_0 + \sqrt{\frac{1-q}{q}} \sqrt{FC_0(1-FC_0)} \sqrt{\eta^2(FC|S)} \quad (40)$$

$$FC^- = FC_0 - \sqrt{\frac{q}{1-q}} \sqrt{FC_0(1-FC_0)} \sqrt{\eta^2(FC|S)} \quad (41)$$

As equações acima são particularmente importantes no próximo capítulo no qual será considerado o conjunto de revisões simultâneas de Fatores de Chance possíveis em cada passo da campanha exploratória.

Mostra-se também que, a medida de aprendizagem η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ e que a medida é simétrica:

$$\eta^2(FC|S) = \rho^2(FC, S) = \frac{(\rho_{11} - FC_0 q)^2}{FC_0(1-FC_0)q(1-q)} \quad (42)$$

$$X \text{ e } S \sim \text{Bernoulli} \Rightarrow \eta^2(FC|S) = \eta^2(S|FC) \quad (43)$$

²² A definição acima considera a premissa de não-negatividade da correlação, coerente com o conteúdo desta dissertação. Para casos de não-positividade a diferença nas equações é que o sinal é invertido após o termo FC_0 .

3 Valoração e sequenciamento de um portfólio exploratório: Modelo e Estudos de Caso

O propósito do presente capítulo, em última instância, é o de apresentar o problema de sequenciamento de um portfólio de projetos de exploração de petróleo e discutir um modelo de otimização adequado para resolver tal. A intenção aqui é a de fornecer algumas possíveis respostas para perguntas como: Considerando um conjunto de prospectos exploratórios correlacionados, quanto estou disposto a pagar por ele? Qual é seu valor? Ao optar por iniciar determinada campanha exploratória, qual o número ótimo de perfurações a serem executadas? Nesse caso, qual é a sequência de perfurações a serem seguidas de modo a obter o portfólio de maior valor? Deve-se rever a estratégia exploratória planejada após a perfuração de certos poços exploratórios?

Essencialmente, trata-se de propor uma resposta a um problema clássico de tomada de decisão sob ambientes de incerteza.

O tema é multidisciplinar envolvendo, em maior ou menor grau, definições e técnicas de diversas áreas de estudo/campos do conhecimento. Toda a discussão aqui apresentada tem como background desenvolvimentos acadêmicos e de cunho prático relacionados a Valor da Informação, Opções Reais, Otimização por Algoritmos Genéticos, Probabilidade e Estatística e conceitos específicos da indústria de Petróleo. Os conceitos e técnicas acima descritos são aqui empregados para ajudar a modelar e equacionar o problema e algumas de suas especificidades e complexidades. Como todo modelo, trata-se de uma simplificação da realidade mas que deve capturar os elementos essenciais do problema, de modo a refletir, da maneira mais robusta possível, as incertezas existentes e prover uma solução racional ao tomador de decisão.

Serão estudados alguns casos de otimização do portfólio exploratório que abordam os conceitos de opcionalidade, aprendizado e sinergia. Em última instância, a intenção é a de quantificar o valor do portfólio e determinar a sequência ideal de perfurações a serem executadas.

3.1. Aspectos gerais

Os portfólios considerados nesta dissertação são compostos desde casos mais simples, (2 prospectos não-correlacionados, por exemplo) até casos mais realistas (10 prospectos com forte dependência). Os conceitos fundamentais de opcionalidade, aprendizado e sinergia, são mais ou menos evidentes em cada caso e evidenciam a necessidade de uma abordagem que contemple técnicas robustas de otimização, como o uso de algoritmos genéticos, na definição da sequência ideal de perfurações numa campanha exploratória.

Dois conceitos subjacentes à análise proposta neste capítulo são: (i) Correlação e (ii) Valor Monetário Esperado. Enquanto o primeiro expressa o grau de dependência (e, portanto, o potencial de aprendizagem) inerente ao portfólio, o segundo reflete os ganhos (ou perdas) possíveis decorrente da escolha do gestor por determinado *caminho* a ser seguido na campanha exploratória.

3.1.1. Correlação

Como vimos no capítulo anterior, pode-se decompor o Fator de Chance de um prospecto, como (i) Existência (ou não) de rocha geradora; (ii) migração; (iii) sincronismo geológico, (iv) trapa geométrica; (v) retenção (selo e preservação) e (vi) reservatório. Tais características podem ser mais semelhantes entre dois prospectos, dentre outros aspectos, decorrente da distância entre tais prospectos. Essa é uma premissa do modelo proposto nesta dissertação. Isto é, a distância entre dois prospectos exploratórios, é um aspecto que irá impactar fortemente no grau de aprendizagem inerente a uma campanha exploratória.

Como premissa foi assumido que a correlação (e, portanto, a aprendizagem) decai linearmente com a distância. Quão mais próximos forem dois prospectos, mais fortemente relacionados ambos são tal que, desta forma, os resultados obtidos na perfuração de um prospecto impactam em maior intensidade na probabilidade de sucesso noutro prospecto. Considera-se, nesta dissertação, como uma hipótese simplificadora apenas a distância bidimensional entre dois prospectos. Assim, sendo os prospectos $A = (a_x, a_y)$ e $B = (b_x, b_y)$ a distância entre eles é dada por:

$$D_{a,b} = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2} \quad (44)$$

Assume-se como premissa que a distância máxima na qual pode haver algum aprendizado é²³ $D_{limite} = 50 \text{ km}$. Isso é, prospectos que estejam a distâncias lineares menores que 50km apresentam algum grau (ainda que baixo) de dependência.

A menos que seja explícito o contrário, via-de-regra é considerado que o fator de chance inicial de todos os prospectos é de 30%. Isso é, a partir apenas dos dados preliminares das sísmicas (antes portanto da perfuração de poços exploratórios), a probabilidade de se encontrar petróleo em um dado prospecto é de 30%. Evidentemente que, caso os prospectos estejam correlacionados, o potencial de aprendizagem é maior e, portanto, é coerente que as probabilidades iniciais de sucesso sejam maiores.

Em contrapartida, como vimos, nem todos os sub-fatores de chance são diretamente afetados apenas pela distância entre dois prospectos. Com isso, assume-se, por premissa básica que a correlação inicial máxima que dois prospectos podem ter decorrente apenas da distância é $\rho_{max} = 60\%$.

Assim, a correlação entre dois prospectos, considerada nessa dissertação é definida como:

$$\rho_{a,b} = \frac{D_{limite} - D_{a,b}}{D_{limite}} \rho_{max} \text{ se } D_{a,b} < D_{limite} \quad (45)$$

$$\rho_{a,b} = 0 \text{ se } D_{a,b} \geq D_{limite} \quad (46)$$

3.1.2. Valor Monetário Esperado

Um termo que é amplamente utilizado na economia da exploração para valorar um determinado prospecto que considera o Fator de Chance (FC) é o Valor Monetário Esperado (VME). Sendo o I_w o investimento necessário para

²³ Evidentemente que a premissa considerada traz consigo uma série de simplificações que fogem ao escopo deste estudo. Destaca-se apenas que, o valor considerado foi obtido a partir da análise de especialistas em E&P e, que, apesar do valor de 50 km ser considerado como premissa básica o mesmo pode ser objeto de simulação em estudos posteriores.

perfurar um poço pioneiro, VPL, o valor presente líquido do desenvolvimento da produção (condicional à descoberta de petróleo) e $FC \sim \text{Ber}(p)$, então o valor do prospecto (W) é dado por:

$$W = -I_w + FC.VPL \quad (47)$$

Como o FC pode assumir o valor 0 ou o valor 1, então o valor de W é:

$$W = -I_w \text{ com probabilidade } (1 - p) \quad (48)$$

$$W = -I_w + VPL \text{ com probabilidade } p \quad (49)$$

Sendo a decisão de perfurar ex-ante é usado o valor esperado para tomar a decisão, chamado de Valor Monetário Esperado (VME). Usualmente, substitui-se FC no lugar de p nas fórmulas sendo:

$$VME = -I_w + FC.VPL \quad (50)$$

Como premissa, a menos que seja explícito o contrário, via-de-regra é considerado que o investimento no poço pioneiro é de US\$ 70 milhões²⁴. O VPL, por sua vez, no caso base será considerado como US\$ 200 milhões²⁵. Assim, considerando a premissa básica de um FC inicial de 30%, tem-se que, o prospecto, no caso base, não parece atrativo do ponto de vista econômico (VME de $-\text{US\$ } 10 \text{ milhões} = -70 + 30\% \times 200$).

3.2. Estrutura do Modelo

A seguir, serão abordados vários estudos de caso, em ordem crescente de complexidade, que servirão para ilustrar o sequenciamento ideal do portfólio exploratório. Como veremos, o modelo proposto nesta dissertação consiste basicamente dos seguintes passos:

²⁴ Considerando-se a confidencialidade das informações existentes sobre prospectos exploratórios optou-se por adotar números fictícios, apenas a título ilustrativo, que não comprometem os resultados da pesquisa. Adicionalmente, a falta de dados públicos acerca do tema contribui pela escolha do autor pela adoção de tal premissa

²⁵ Tais premissas servem como ponto de partida, e, quando oportuno será apresentada uma sensibilidade a variações nas mesmas e os impactos no valor final do portfólio.

- (i). Dada uma Configuração de prospectos, decorrente da distância entre os mesmos, encontrar a estrutura de correlações do portfólio (matriz de correlação);
- (ii). Escolher, aleatoriamente, uma possível sequência de perfurações;
- (iii). Para a sequência escolhida, calcular todos os fatores de chance revisados em todos os possíveis resultados obtidos na campanha exploratória (*caminhos* na árvore de decisão);
- (iv). Calcular, de-trás-para-frente *backwards* o VME da perfuração de cada prospecto;
- (v). Encontrar o valor do portfólio considerando a sequência previamente escolhida no item (i);
- (vi). Repetir os passos (i)-(v) para outra possível sequência, até esgotar todas as sequências possíveis.

Como veremos, da seção 3.2 até a seção 3.4, o valor máximo do portfólio pode ser calculado *na força bruta*, tal como descrito acima. Entretanto, a partir da seção 3.5 fica evidente a necessidade do uso de Algoritmos Genéticos para encontrar a sequência ideal. Nesse caso, o item (vi) acima passa a ser, *repetir os passos (i)-(v) para outro indivíduo gerado a partir da evolução do Algoritmo Genético, até que o algoritmo atinja o limite especificado*.

3.2.1.

CASO 1: Dois prospectos sem correlação

Inicialmente consideraremos o caso no qual o portfólio exploratório é composto por dois prospectos (A e B) que não estejam no mesmo *play geológico*, portanto, não correlacionados. A perfuração de qualquer um dos prospectos não é obrigatória, isto é, o portfólio é composto por duas opções a serem exercidas caso oportuno.

Como premissa, considera-se:

- (a) Ambos os prospectos possuem a mesma probabilidade de sucesso: ($FC_A = FC_B = 30\%$);
- (b) Os custos de perfuração de ambos os prospectos são iguais: $I_{wA} = I_{wB} = US\$ 70 \text{ milhões}$;

- (c) Em caso de descobertas, o desenvolvimento individual de cada campo tem o mesmo valor $VPL_A = VPL_B = US\$ 200 \text{ milhões}$

A Figura 3 ilustra os dois prospectos, representados pelos pontos A e B. O círculo em torno de cada prospecto representa a região na qual é possível que o aprendizado obtido na perfuração de um prospecto seja refletido nas probabilidades de sucesso ou fracasso do outro prospecto.

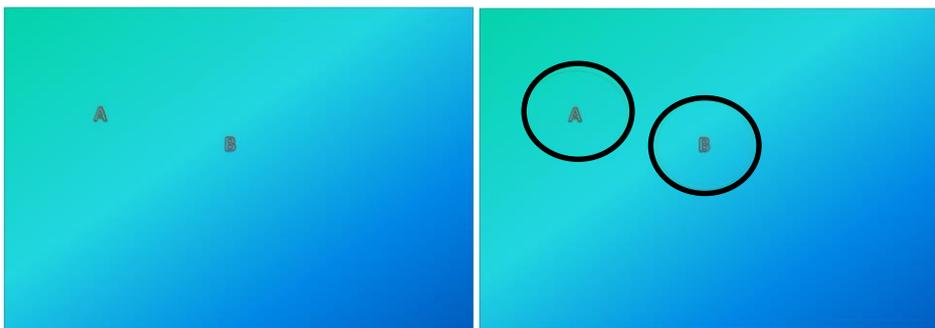


Figura 3 – Portfolio – Caso 1

Fonte: Elaboração própria

Aplicando as premissas acima na equação 50, obtemos:

$$VME_A = VME_B = -70 + 30\% * 200 = -10 \quad (51)$$

Assim, a perfuração de um ou outro prospecto não se mostrou economicamente viável. Não havendo correlação entre os prospectos não há também quaisquer ganhos decorrentes do aprendizado e da sinergia. Tampouco a sequência na qual as perfurações sejam executadas é relevante. Sendo ambos os prospectos opcionais, este é único ganho efetivo ao valor do portfolio ($\Pi_{A,B}$).

Assim:

$$\Pi_{A,B} (\text{opcional}) = \max\{0, VME_A, VME_B, VME_A + VME_B\} = 0 \quad (52)$$

Nesse caso, não fazer a campanha exploratória trouxe um ganho (ou uma *economia*) no valor de US\$ 20 milhões.

$$\Pi_{A,B} (\text{obrigatórios}) = VME_A + VME_B = -20 \quad (53)$$

Como sensibilidade, se alterássemos a premissa (d) tal que $VPL_A = 250$ mantendo inalterado o VPL do outro prospecto então, sendo a perfuração de pelo menos um dos prospectos opcional, claramente a solução ótima seria, para perfurar apenas o prospecto A e o portfolio passaria a valer US\$ 5 milhões. Caso ambos os prospectos fossem obrigatórios então, novamente, a campanha exploratória não é atraente para a empresa pois, o ganho obtido com o prospecto A (US\$ 5 milhões) não seria suficiente para compensar o prejuízo obtido na perfuração do prospecto B (- US\$ 10 milhões).

O caso 1, apesar de ser trivial, evidencia dois aspectos fundamentais desta dissertação. Primeiro, destaca a importância do exercício ótimo das opções agregando valor ao portfolio exploratório. Segundo, por se tratar de prospectos não correlacionados, não permite atribuir qualquer valor adicional ao portfolio, senão aquele de seus prospectos considerados separadamente.

3.2.2.

CASO 2: Dois prospectos correlacionados

Consideraremos agora as mesmas premissas do caso anterior exceto que agora ambos os prospectos dizem respeito a áreas que estão relativamente próximas, no mesmo *play geológico*. Aqui será considerada a distância entre os prospectos de 20,3 km. Como premissa, a correlação função da distância (ver equações 45 e 46), a distância máxima na qual há alguma correlação 50 km e a correlação inicial máxima que dois prospectos podem ter decorrente apenas da distância é $\rho_{max} = 60\%$. Nesse caso, a correlação entre os prospectos é de $\rho_{AB} = 35,7\%$

A Figura 4 ilustra os dois prospectos, representados pelos pontos A e B. A região de interseção entre os círculos A e B representa o grau de aprendizado inerente ao portfolio e reflete a correlação existente entre seus prospectos. Como veremos, quão maior for a interseção, maior é o potencial de aprendizagem e sinergia.

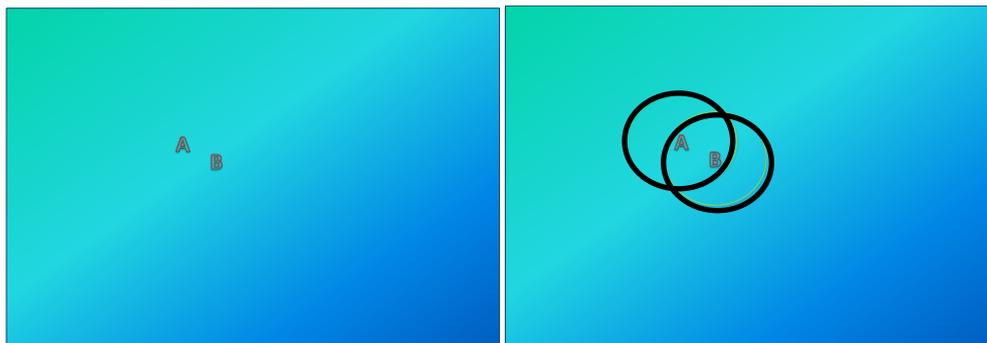


Figura 4 – Portfolio – Caso 2
Fonte: Elaboração própria.

3.2.2.1.

Valor: do portfolio, da opcionalidade, do aprendizado e da sinergia

Neste caso, o valor inicial de cada um dos prospectos considerados separadamente é o mesmo que aquele previamente encontrado no Caso 1. A avaliação preliminar indicou que cada prospecto tem o VME de – US\$ 10 milhões, e, portanto, sendo a campanha exploratória opcional, a alternativa de melhor retorno econômico seria não executar a campanha. Se desconsiderarmos o potencial de aprendizado e sinergia tais conclusões podem também ser tiradas a respeito do portfolio aqui considerado. Entretanto, decorrente da correlação entre os prospectos, claramente o valor do portfolio será diferente (no mínimo igual, ou superior) e tais conclusões aparentemente não estariam adequadas.

Consideremos que o prospecto escolhido para ser perfurado inicialmente seja o prospecto A. O portfolio é resolvido por retro indução (*backwards*). Nesse caso, decorrente da correlação positiva presente entre os prospectos, o Fator de Chance de B será revisado. A partir das equações de atualização dos fatores de chance (equações 40 e 41), temos

$$FC_B^+ = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 30\%}{30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 35,7 = 55\% \quad (54)$$

$$FC_B^- = 30\% - \sqrt{\frac{30\%}{1 - 30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 35,7 = 19,3\% \quad (55)$$

A partir de tais valores revisados calcula-se o VME do prospecto 2 em ambos os cenários possíveis do prospecto 1. Assim,

$$VME_B^+ = -70 + 55\% * 200 = 40 \quad (56)$$

$$VME_B^- = -70 + 19\% * 200 = -31 \quad (57)$$

O VME do prospecto A continua o mesmo daquele previamente calculado. A partir disso calculamos o valor do portfolio pela equação a seguir:

$$\Pi_{A+B} = \text{Max}\{0; VME_A + FC_A \text{Max}[VME_B^+, 0] + (1 - FC_A) \text{Max}[VME_B^-, 0]\} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{A+B} &= \text{Max}\{0; -10 + 30\% \text{Max}[40, 0] + (1 - 30\%) \text{Max}[-31, 0]\} \\ &= \text{USD } 2 \text{ MM} \end{aligned} \quad (59)$$

Assim, decorrente da correlação entre os prospectos, o valor o portfolio altera-se significativamente. Ao invés de ter o valor negativo de -USD 20 MM passa ter um retorno econômico positivo de USD 2 MM. O Gráfico abaixo separa o valor do portfolio em ganhos decorrentes das opções e ganhos decorrentes do aprendizado. Como se vê o ganho decorrente do aprendizado é tão maior quanto maior for a correlação, sendo que, para valores abaixo de determinado limite (neste exemplo, aproximadamente, 31%) o ganho de informação decorrente da perfuração dos primeiro prospecto não é suficiente para tornar o portfolio economicamente viável.

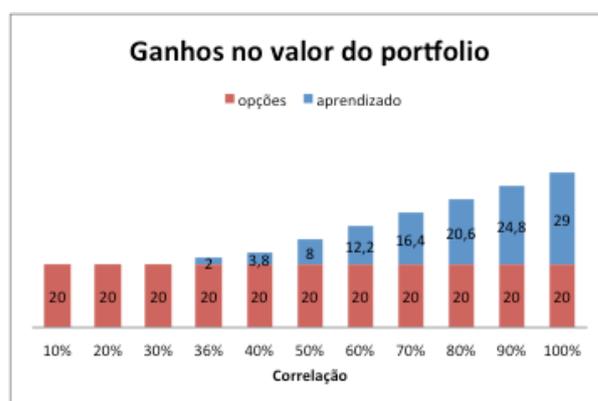


Gráfico 5 – Ganhos no portfolio - Aprendizado
Fonte: Elaboração própria

A partir das equações 38 e 39, calcula-se os limites inferior e superior de Frechét-Hoeffding para a correlação entre os prospectos A e B²⁶. Como a correlação entre os prospectos ($\rho_{AB} = 35,7\%$) está dentro dos limites ($Lim_{inferior} = -42\%$ e $Lim_{superior} = 100\%$) definidos por Frechét-Hoeffding, então existe a distribuição bivariada de Bernoulli dos fatores de chance dos dois prospectos.

Ao considerar na análise também os ganhos decorrentes da sinergia, o modelo se aproxima de situações reais e apresenta maiores valores para o portfolio. A sinergia ocorre apenas no caso em que há duplo sucesso, em ambas as perfurações da campanha exploratória tal que seja possível, por exemplo, o compartilhamento da infraestrutura (dutos, logística, etc) para desenvolvimento da produção. Decorrente do compartilhamento da infraestrutura tem-se uma redução nos custos de produção que se reflete em maior VPL do portfolio.

Assim, modificando a equação 58 para incorporar também os ganhos de sinergia tem-se:

$$\begin{aligned} \Pi_{A+B}(sinergia) = & Max\{0; -I_{WA} \\ & + FC_A Max[VPL_A, -I_{WB} + FC_B^+ VPL_{A+B} + (1 - FC_B^+) VPL_A] \\ & + (1 - FC_A) Max[VME_B^-, 0]\} \end{aligned} \quad (60)$$

Vamos assumir que no caso de dupla descoberta o valor presente líquido do desenvolvimento conjunto (VPL_{A+B}) seja de USD 500 MM, ou seja, um acréscimo de 25% em relação aos valores de cada prospecto considerado separadamente. Neste caso, temos então que o valor do portfolio é dado por:

$$\begin{aligned} \Pi_{A+B}(sinergia) = & Max\{0; -70 \\ & + 30\% Max[200, -70 + 55\%500 + (1 - 55\%)200] \\ & + (1 - 30\%) Max[-31, 0]\} = USD 18,5 MM \end{aligned} \quad (61)$$

Vê-se, portanto, que claramente o portfolio assume um valor ainda maior do que quando apenas se considera a presença de opções e aprendizado. Tais

²⁶ A memória de cálculo encontra-se no Apêndice.

resultados evidenciam a o importante papel desempenhado pela correlação entre os prospectos no portfolio exploratório.

3.2.2.2.

Impacto da correlação no aprendizado e sinergia

Para avaliar o efeito *puro* da correlação sobre a sinergia pode-se calcular o mesmo como sendo o valor todo do portfolio menos os ganhos decorrentes da aprendizagem e opções. Alternativamente, a sinergia pode ser calculada também como sendo a probabilidade de duplo sucesso ($FC_A * FC_B^+$) multiplicada pelos ganhos da sinergia ($VPL_{A+B} - VPL_A - VPL_B$). O Gráfico 5a apresenta os ganhos no portfolio para diferentes percentuais de correlação entre os prospectos.

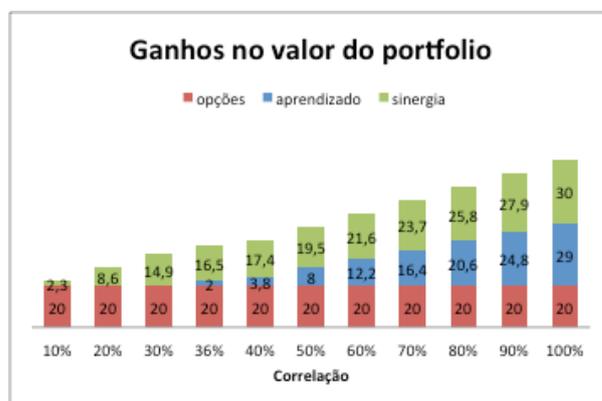


Gráfico 6 – Ganhos no portfolio – Aprendizado e sinergia

Fonte: Elaboração própria

É interessante notar como que, ao considerar os ganhos de sinergia, mesmos prospectos pouco correlacionados (10%) se mostram economicamente atrativos quando se avalia o valor do portfolio como um todo. A sinergia ocorre quando há dupla descoberta que, por sua vez, aumenta com a correlação (ρ). Adicionalmente, vê-se que, tanto a sinergia quanto o aprendizado são maiores quanto maior for a correlação, mas o efeito da sinergia é mais sensível com a correlação (ρ).

3.2.2.3.

Conclusões preliminares – sequência ideal

No caso com dois prospectos há apenas duas sequências possíveis sendo, primeiro perfurar o prospecto A e depois o prospecto B, ou o contrário. A árvore de decisão (Figura 5) ilustra o caso da sequência A-B.

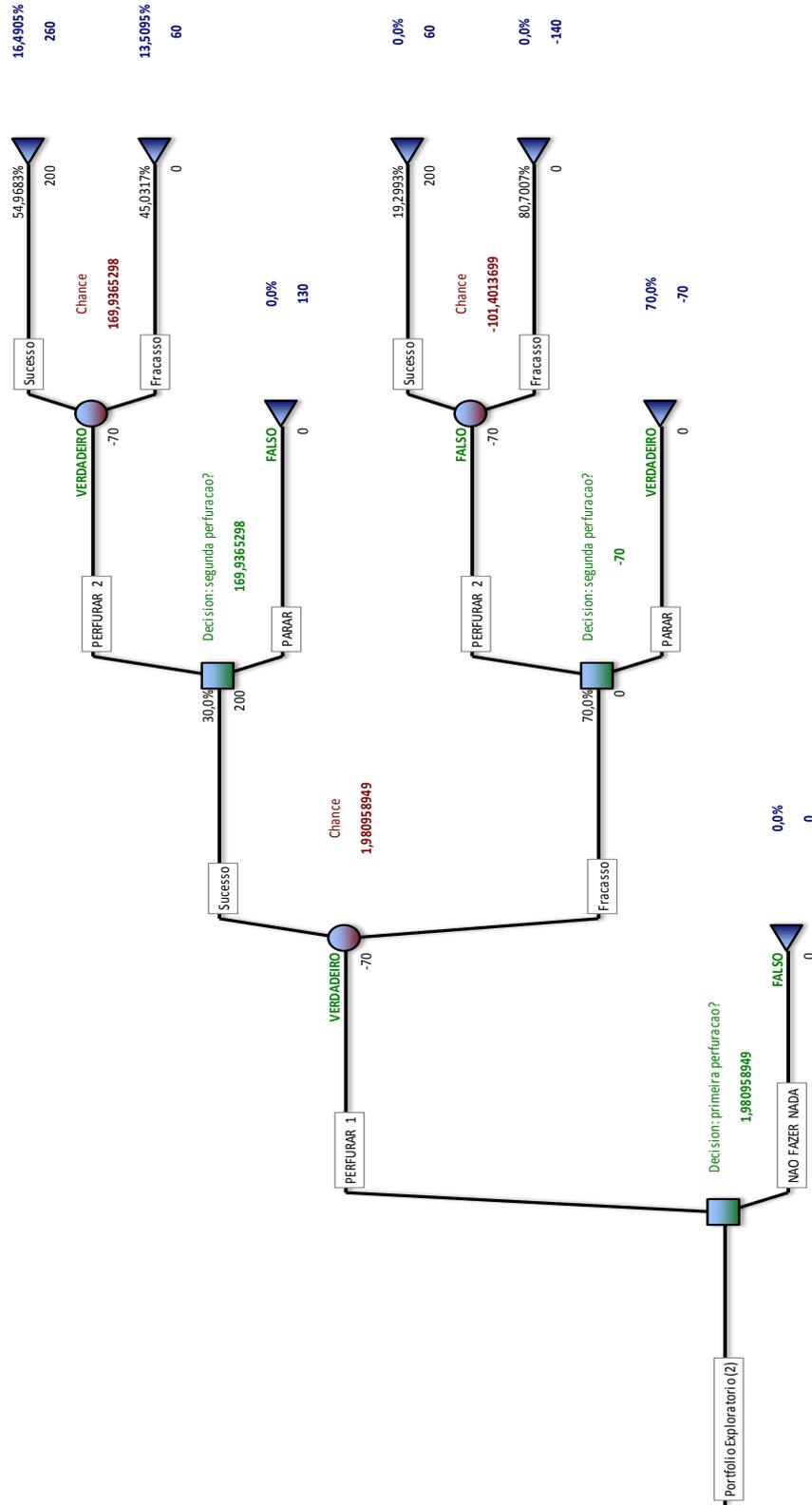


Figura 5 – Árvore de Decisão- Caso 2: Sequência A-B
 Fonte: Elaboração própria

Trocando a ordem das perfurações, a árvore de decisão apresenta o mesmo valor, apenas mudando qual prospecto foi o pioneiro (*revelador de informações*) As conclusões gerais em ambos os casos são as mesmas. Isto é, como estratégia de exploração, perfure o primeiro prospecto. Em caso de sucesso continue a campanha e perfure o segundo prospecto, caso contrário não perfure o segundo prospecto.

Como sensibilidade, vamos considerar agora que o VPL de um dos prospectos seja significativamente maior do que o de outro. Vamos assumir que o VPL de B seja 400 e que será perfurado primeiro o prospecto A. Nesse caso, tem-se

$$VME_A = -70 + 30\% * 200 = -10 \quad (62)$$

$$VME_B^+ = -70 + 55\% * 400 = 150 \quad (63)$$

$$VME_B^- = -70 + 19\% * 400 = 6 \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{A+B} &= \text{Max}\{0; -10 + 30\% \text{Max}[150, 0] + (1 - 30\%) \text{Max}[6, 0]\} \\ &= \text{USD } 39,2 \text{ MM} \end{aligned} \quad (65)$$

Vamos assumir que o VPL de B seja 400 e que será perfurado primeiro o prospecto B. Nesse caso, tem-se:

$$VME_B = -70 + 30\% * 400 = 50 \quad (66)$$

$$VME_A^+ = -70 + 55\% * 200 = 40 \quad (67)$$

$$VME_A^- = -70 + 19\% * 200 = -31 \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{B+A} &= \text{Max}\{0; +50 + 30\% \text{Max}[40, 0] + (1 - 30\%) \text{Max}[-31, 0]\} \\ &= \text{USD } 62 \text{ MM} \end{aligned} \quad (69)$$

Esse caso evidencia um importante aspecto da otimização do portfolio exploratório. A sequência na qual as perfurações são executadas é fundamental para quantificar o valor do portfolio e determinar a estratégia ótima. Vale notar que a conclusão é distinta em cada um dos casos. Na primeira sequência (AB) a estratégia ótima é sempre perfurar ambos os prospectos. Já na segunda sequência (BA) a estratégia ótima é perfurar o primeiro prospecto e apenas em caso de sucesso perfurar o segundo prospecto.

Por fim, destaca-se que nesse caso com dois VPLs distintos a estratégia ótima foi a de investir primeiro naquele prospecto que tem maior VPL. Tal estratégia parece intuitiva mas isso nem sempre irá acontecer. Como veremos, conforme o portfolio for aumentando em tamanho e em complexidade, conclusões triviais se tornam menos frequentes e a correlação e as opções passam a desempenhar um papel mais importante.

3.3.

Modelo com três prospectos

3.3.1.

CASO 3: Três prospectos sem correlação – Trivial

O caso de um portfolio com três prospectos sem nenhuma correlação é muito semelhante ao caso 1, previamente demonstrado. Isto é, não havendo quaisquer correlações entre os prospectos, então o valor do portfolio será exatamente igual à soma de cada um dos prospectos considerados separadamente. A Figura 6 demonstra este caso.

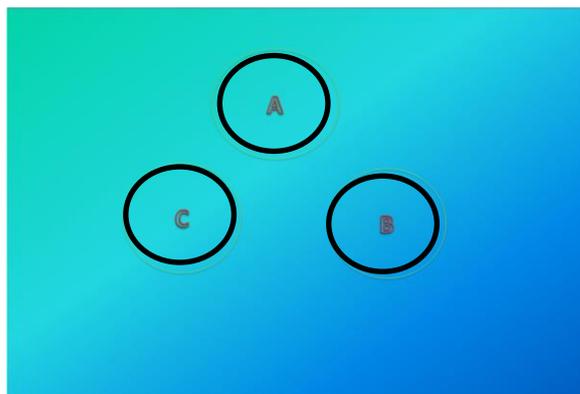


Figura 6 – Portfolio – Caso 3

Fonte: Elaboração própria

A equação do valor do portfolio é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_{A,B,C}(\text{opcional}) &= \max\{0, VME_A, VME_B, VME_C, VME_A + VME_B, VME_A \\ &+ VME_C, VME_B + VME_C, VME_A + VME_B + VME_C\} \quad (70) \end{aligned}$$

Neste caso a sequência das perfurações pouco importa. A única regra a ser seguida na campanha exploratória é: apenas perfurar os prospectos que tenham

VME positivo. O caso é trivial e de pouca contribuição para os propósitos desta dissertação.

3.3.2.

CASO 4: Dois prospectos correlacionados e um terceiro prospecto sem correlação – Trivial

O caso de um portfolio com dois prospectos correlacionados e um terceiro prospecto sem nenhuma correlação é muito semelhante ao caso 2, previamente demonstrado. Isto é, para os dois prospectos correlacionados pode-se reduzir a análise ao caso 2 e, para o terceiro prospecto continuar valendo a regra do caso 3, isto é, apenas perfurar caso tenha um VME positivo. A Figura 7 demonstra este caso:

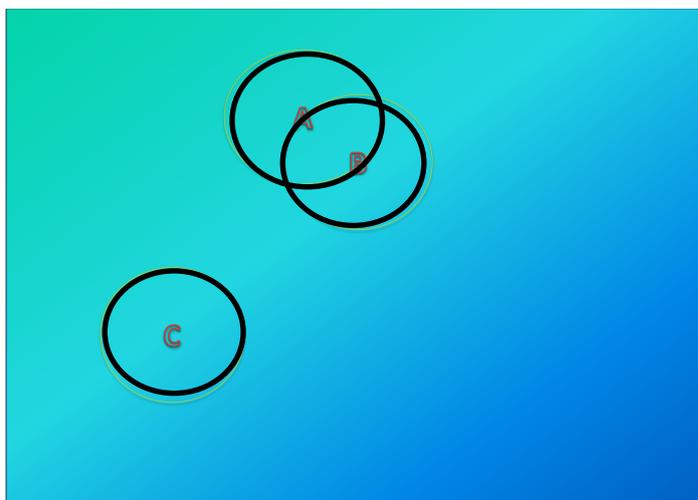


Figura 7 – Portfolio – Caso 4
Fonte: Elaboração própria

$$\begin{aligned} \Pi_{A+B+C} = & \text{Max}\{0; VME_A + VME_C + FC_A \text{Max}[VME_B^+, 0] \\ & + (1 - FC_A) \text{Max}[VME_B^-, 0]; VME_A + FC_A \text{Max}[VME_B^+, 0] \\ & + (1 - FC_A) \text{Max}[VME_B^-, 0]; VME_C\} \end{aligned} \quad (71)$$

Neste caso apenas a sequência das perfurações dos prospectos relacionados pode importar para o valor final do portfolio. A contribuição do prospecto C ao portfolio (se houver) será a mesma se ele for o primeiro, segundo ou terceiro prospecto a ser perfurado. A única regra válida para o prospecto C é: apenas perfurar se seu VME for positivo. Este caso também é trivial e de pouca contribuição para os propósitos desta dissertação.

3.3.3.

CASO 5: Três prospectos correlacionados – Configuração I (“em linha”)

Vamos considerar agora o caso no qual os três prospectos estão todos no mesmo “*play geológico*”, mas estão dispersos no espaço como em forma aproximadamente linear. Nessa Configuração, cada prospecto é apenas correlacionado com um outro prospecto.

Aqui é considerada a distância entre os prospectos A e B de 30,3 km. Já os prospectos B e C tem 26,4 km de distância. Decorrente da Configuração proposta a distância entre A e C, por sua vez, é tal que não há qualquer correlação entre os prospectos (56,3 km). A Figura 8 demonstra este caso.

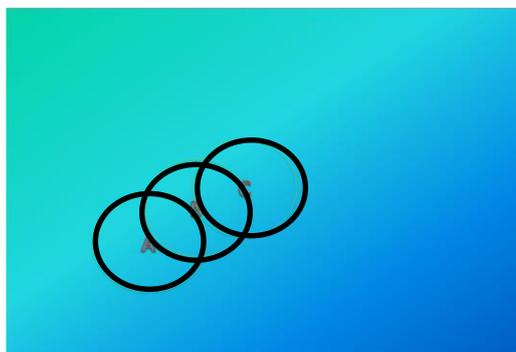


Figura 8 – Portfolio – Caso 5
Fonte: Elaboração própria

Aplicando as fórmulas 45 e 46 chegamos à seguinte matriz de correlações:

Tabela 3 – Matriz de correlações – Caso 5

MATRIZ CORRELAÇÃO	A	B	C
A	1,000	0,237	0,000
B	0,237	1,000	0,283
C	0,000	0,283	1,000

Fonte: Elaboração própria

Como caso-base vamos considerar que os três prospectos inicialmente possuem os mesmos fatores de chance (30%), os mesmos custos de perfuração dos poços exploratórios (USD 70 MM) e, em caso de descoberta, o mesmo valor presente líquido do desenvolvimento (USD 200 MM).

3.3.3.1.

Valor: do portfólio, da opcionalidade e do aprendizado

Consideremos inicialmente a sequência composta pela perfuração primeiro do prospecto A, depois B e, por fim, o prospecto C. Tal como no CASO 2, o portfólio é resolvido *backwards*. Inicialmente calcularemos os fatores de chance revisados do prospecto B após a perfuração do prospecto A. A partir das equações de atualização dos fatores de chance (equações 40 e 41), temos:

$$FC_B^+ = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 30\%}{30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 23,7\% = 46,6\% \quad (72)$$

$$FC_B^- = 30\% - \sqrt{\frac{30\%}{1 - 30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 23,7\% = 22,89\% \quad (73)$$

Agora iremos considerar as possíveis revisões dos Fatores de Chance de C decorrente de cada cenário ocorrido (sucesso ou fracasso) na perfuração do prospecto B. Assim, temos 4 possíveis Fatores de Chance para o prospecto C, sendo:

$$FC_C^{++} = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 46,6\%}{46,6\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 28,3\% = 43,9\% \quad (74)$$

$$FC_C^{+-} = 30\% - \sqrt{\frac{46,6\%}{1 - 46,6\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 28,3\% = 17,9\% \quad (75)$$

$$FC_C^{-+} = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 22,89\%}{22,89\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 28,3\% = 53,8\% \quad (76)$$

$$FC_C^{--} = 30\% - \sqrt{\frac{22,89\%}{1 - 22,89\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 28,3\% = 22,93\% \quad (77)$$

Agora calculamos primeiro o VME de cada possível resultado do prospecto C.

$$VME_C^{++} = -70 + 43,9\% * 200 = 17,76 \quad (78)$$

$$VME_C^{+-} = -70 + 17,9\% * 200 = -34,20 \quad (79)$$

$$VME_C^{+-} = -70 + 53,8\% * 200 = 37,56 \quad (80)$$

$$VME_C^{--} = -70 + 22,9\% * 200 = -24,12 \quad (81)$$

Aplicando a mesma metodologia do caso anterior encontramos o valor do prospecto C *backwards* em relação a cada possível resultado do prospecto B. Assim:

$$\begin{aligned} VME_{C|B+} &= \text{Max}\{0; 46,6\% \text{Max}[17,76 ; 0] + (1 - 46,6\%) \text{Max}[-34,20 ; 0]\} \\ &= \text{USD } 8,27 \text{ MM} \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} VME_{C|B-} &= \text{Max}\{0; 22,89\% \text{Max}[37,56 ; 0] + (1 - 46,6\%) \text{Max}[-24,12 ; 0]\} \\ &= \text{USD } 8,60 \text{ MM} \end{aligned} \quad (83)$$

Calcula-se então o VME de cada possível cenário da perfuração B, sendo:

$$VME_B^+ = -70 + 46,6\% * 200 = 23,15 \quad (84)$$

$$VME_B^- = -70 + 22,89\% * 200 = -24,21 \quad (85)$$

Vamos então encontrar os valores dos prospectos B e C *backwards* em relação a cada possível resultado do prospecto A. Assim, temos:

$$\begin{aligned} VME_{C,B|A+} &= \text{Max}\{0; 30\% \text{Max}[23,15 + 8,27 ; 0] \\ &+ (1 - 30\%) \text{Max}[-70 + 8,27 ; 0]\} = \text{USD } 9,43 \text{ MM} \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} VME_{C,B|A-} &= \text{Max}\{0; 70\% \text{Max}[-24,21 + 8,60 ; 0] \\ &+ (1 - 70\%) \text{Max}[-70 + 8,60 ; 0]\} = 0 \end{aligned} \quad (87)$$

Estendendo o conceito da equação 58 para o caso com três prospectos, chegamos à equação geral do valor do portfolio:

$$\begin{aligned} \Pi_{A+B+C} &= \text{Max}\{0; VME_A + FC_A \text{Max}[VME_B^+ + VME_{C|B+}, 0] \\ &+ (1 - FC_A) \text{Max}[VME_B^- + VME_{C|B-}, 0]\} \end{aligned} \quad (88)$$

Como o VME do prospecto A tem o valor de – USD 10 MM, os ganhos decorrentes das perfurações dos prospectos B e C não são suficientes para compensar as “perdas” incorridas na perfuração do prospecto A. Assim, sendo todo o portfolio exploratório opcional, em relação à sequência ABC, a decisão racional do ponto de vista econômico seria não perfurar nenhum poço. Com

$$\begin{aligned} \Pi_{A+B+C} = & \text{Max}\{0; VME_A + FC_A \text{Max}[VME_B^+ + VME_{C|B+}, 0] \\ & + (1 - FC_A) \text{Max}[VME_B^- + VME_{C|B-}, 0]\} \end{aligned} \quad (89)$$

A partir das equações 38 e 39, calcula-se os limites inferior e superior de Frechét-Hoeffding para a correlação entre os prospectos A e B²⁷ e depois B e C. Como a correlação entre os prospectos se situou nos limites definidos por Frechét-Hoeffding, então existe a distribuição bivariada de Bernoulli dos fatores de chance dos prospectos (considerados dois-a-dois) deste modelo.

3.3.3.2. Conclusões preliminares – sequência ideal

No caso com três prospectos há seis possíveis sequências de perfurações de todos os prospectos. A questão que se põe então é: *Em todas as possíveis sequências a conclusão de que não é recomendável perfurar nenhum poço está mantida?* Ou seja, há alguma sequência de perfurações a ser escolhida tal que o valor do portfolio possa ser economicamente atraente? No Apêndice estão todas as árvores de decisão relativas às seis possíveis sequências contendo os respectivos fatores de chance revisados e valores de cada portfolio. A Tabela abaixo resume os valores de portfolio encontrados em cada possível sequência.

Tabela 4 – Valor do portfolio em cada sequência possível

²⁷ A memória de cálculo encontra-se no Apêndice I

SEQUENCIA	VALOR PORTFOLIO
ABC	0,000
ACB	0,000
BAC	5,821
BCA	5,821
CAB	0,000
CBA	0,638

Fonte: Elaboração própria

É interessante notar como os resultados variam sensivelmente, em especial, ao perfurar o prospecto B inicialmente. Isto é, na Configuração dos prospectos deste caso 5, o prospecto B é o único prospecto que está correlacionado tanto com A quanto com C. Isso evidentemente se reflete num inicial potencial de revelação de informações muito mais expressivo que dos demais prospectos. Tomando por exemplo a sequência BAC temos a árvore de decisão ilustrada na Figura 9.

A árvore ilustra que, nesta sequência, após perfurar o primeiro prospecto os fatores de chance de todos os demais prospectos são revisados (e não apenas de um outro prospecto). Tal Configuração de prospectos sugere que os resultados da primeira perfuração são fundamentais para avaliar a continuidade da campanha exploratória. Tal conclusão fica evidenciada ao analisar a árvore de estratégias ótimas ilustrada na Figura 10.

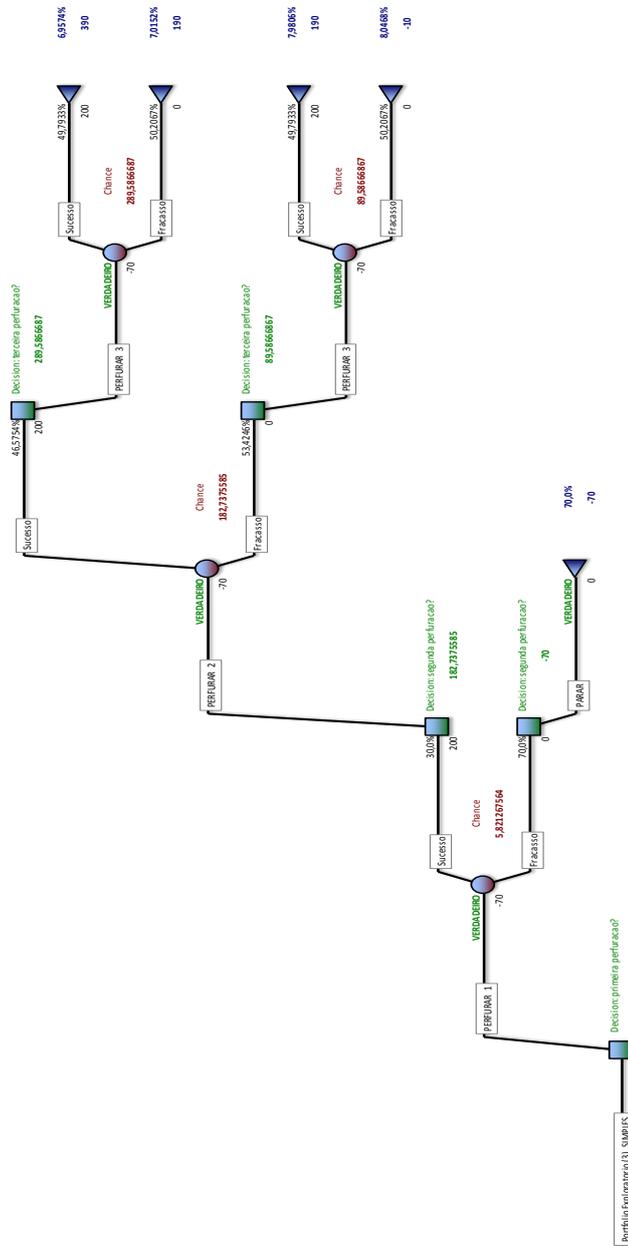


Figura 10 – Estratégia ótima de perfurações = Caso 5
Fonte: Elaboração própria

Como sensibilidade, vamos considerar o caso no qual um dos prospectos tenha um VPL maior do que o dos demais. Digamos que o prospecto C tem seu VPL 10% maior do que o dos prospectos A e B. A intuição tende a dizer que o primeiro prospecto a ser perfurado é o de maior VPL. Mas será que tal avaliação estaria correta? A Tabela 5 ilustra os valores do portfolio considerando o maior VPL do prospecto C (USD 220 MM).

Tabela 5 – Valor do portfolio em diferentes sequências

SEQUENCIA	VALOR PORTFOLIO
ABC	0,652
ACB	0,000
BAC	8,809
BCA	8,809
CAB	1,876
CBA	6,640

Fonte: Elaboração própria

Contrariando a expectativa preliminar, apesar do prospecto C ter maior VPL, o valor do portfolio é maximizado quando o prospecto B é perfurado inicialmente. Isto é, o potencial de revelação sobre o portfolio inerente ao prospecto B é tal que se sobrepõe a quaisquer ganhos advindos da perfuração inicial do prospecto de maior VPL. Essa é uma conclusão que evidencia a importância de se incorporar as opções e o valor da aprendizagem no cálculo do valor do portfolio.

3.3.4.

CASO 6: Três prospectos correlacionados – Configuração II (“triangular”)

Vamos considerar agora o caso no qual os três prospectos estão todos no mesmo *play geológico*, mas estão dispersos no espaço como em forma aproximadamente *triangular*. Nessa Configuração, cada prospecto é correlacionado com os demais.

Aqui é considerada a distância entre os prospectos A e B de 28,3 km. Já os prospectos B e C têm 26,2 km de distância e, por fim, A e C têm 25,6 km de distância. A Figura a seguir demonstra este caso.

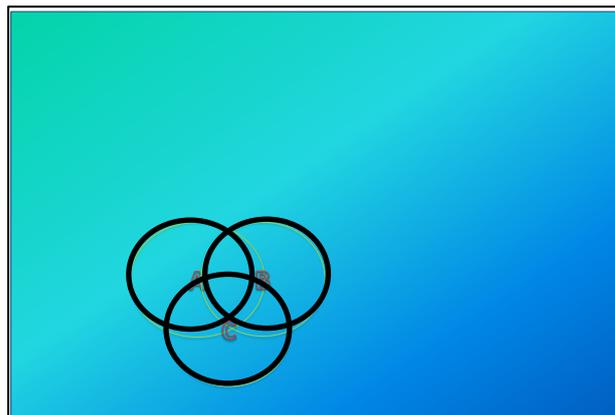


Figura 11 – Portfolio – Caso 6
 Fonte: Elaboração própria

Aplicando as equações 45 e 46, nas premissas deste caso, chegamos à seguinte matriz de correlações:

Tabela 6 – Matriz de correlações – Caso 6

	A	B	C
A	1,000	0,260	0,293
B	0,260	1,000	0,286
C	0,293	0,286	1,000

Fonte: Elaboração própria

Como caso-base vamos considerar que os três prospectos têm as mesmas premissas do CASO 5.

3.3.4.1.

Valor: do portfolio, da opcionalidade e do aprendizado

Consideremos inicialmente a sequência composta pela perfuração primeiro do prospecto A, depois B e, por fim, o prospecto C. Tal como no CASO 5, o portfolio é resolvido *backwards*. Inicialmente calcularemos os fatores de chance revisados tanto do prospecto B quanto do prospecto C após a perfuração do prospecto A. A partir das equações de atualização dos fatores de chance (equações 40 e 41), temos:

$$FC_B^+ = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 30\%}{30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} \sqrt{26\%} = 48,2\% \quad (90)$$

$$FC_B^- = 30\% - \sqrt{\frac{30\%}{1 - 30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} \sqrt{26\%} = 22,2\% \quad (91)$$

$$FC_C^+ = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 30\%}{30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} \sqrt{29\%} = 50,5\% \quad (92)$$

$$FC_C^- = 30\% - \sqrt{\frac{30\%}{1 - 30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} \sqrt{29\%} = 21,2\% \quad (93)$$

Agora iremos considerar as possíveis revisões dos Fatores de Chance de C decorrente de cada cenário ocorrido (sucesso ou fracasso) na perfuração do prospecto B. Assim, temos 4 possíveis Fatores de Chance para o prospecto C, sendo:

$$FC_C^{++} = 50,5\% + \sqrt{\frac{1 - 48,2\%}{48,2\%}} \sqrt{50,5\%(1 - 50,5\%)} 28,6\% = 65,3\% \quad (94)$$

$$FC_C^{+-} = 50,5\% - \sqrt{\frac{48,2\%}{1 - 48,2\%}} \sqrt{50,5\%(1 - 50,5\%)} 28,6\% = 36,7\% \quad (95)$$

$$FC_C^{-+} = 21,2\% + \sqrt{\frac{1 - 22,2\%}{22,2\%}} \sqrt{21,2\%(1 - 21,2\%)} 28,6\% = 43,1\% \quad (96)$$

$$FC_C^{--} = 21,2\% - \sqrt{\frac{22,2\%}{1 - 22,2\%}} \sqrt{21,2\%(1 - 21,2\%)} 28,6\% = 15,0\% \quad (97)$$

Agora calculamos primeiro o VME de cada possível resultado do prospecto C.

$$VME_C^{++} = -70 + 65,3\% * 200 = 60,6 \quad (98)$$

$$VME_C^{+-} = -70 + 36,7\% * 200 = 3,37 \quad (99)$$

$$VME_C^{-+} = -70 + 43,1\% * 200 = 16,23 \quad (100)$$

$$VME_C^{--} = -70 + 15\% * 200 = -40,0 \quad (101)$$

Aplicando a mesma metodologia do caso anterior encontramos o valor do prospecto C, *backwards* em relação a cada possível resultado do prospecto B. Assim:

$$\begin{aligned} VME_{C|B+} &= \text{Max}\{0; 48,2\% \text{Max}[60,6, 0] + (1 - 48,2\%) \text{Max}[3,37, 0]\} \\ &= \text{USD } 31,0 \text{ MM} \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} VME_{C|B-} &= \text{Max}\{0; 22,2\% \text{Max}[16,23, 0] + (1 - 22,2\%) \text{Max}[-40, 0]\} \\ &= \text{USD } 3,60 \text{ MM} \end{aligned} \quad (103)$$

Calcula-se então o VME de cada possível cenário da perfuração B, sendo:

$$VME_B^+ = -70 + 48,2\% * 200 = 26,4 \quad (104)$$

$$VME_B^- = -70 + 22,2\% * 200 = -25,6 \quad (105)$$

Vamos então encontrar os valores dos prospectos B e C *backwards* em relação a cada possível resultado do prospecto A. Assim, temos:

$$\begin{aligned} VME_{C,B|A+} &= \text{Max}\{0; 30\% \text{Max}[26,4 + 31, 0] \\ &\quad + (1 - 30\%) \text{Max}[-70 + 31, 0]\} = \text{USD } 17,2 \text{ MM} \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} VME_{C,B|A-} &= \text{Max}\{0; 70\% \text{Max}[-25,6 + 3,60, 0] \\ &\quad + (1 - 70\%) \text{Max}[-70 + 3,60, 0]\} = 0 \end{aligned} \quad (107)$$

Como o VME do prospecto A tem o valor de – USD 10 MM, os ganhos decorrentes das perfurações dos prospectos B e C são mais do que suficientes para compensar as *perdas* incorridas na perfuração do prospecto A. Assim, sendo todo o portfolio exploratório opcional, em relação à sequência ABC, a decisão racional do ponto de vista econômico seria proceder com a campanha exploratória. A partir da fórmula 50 vemos que o valor do portfolio nesta sequência é de USD 7,2 MM.

3.3.4.2. Conclusões preliminares – sequência ideal

Tal como no caso 5, há seis possíveis sequências de perfurações de todos os prospectos. No Apêndice A estão todas as árvores de decisão relativas às seis possíveis sequências contendo os respectivos fatores de chance revisados e valores de cada portfolio. A Tabela 7 resume os valores de portfolio encontrados em cada possível sequência.

Tabela 7 – Valor do portfolio em diferentes sequências

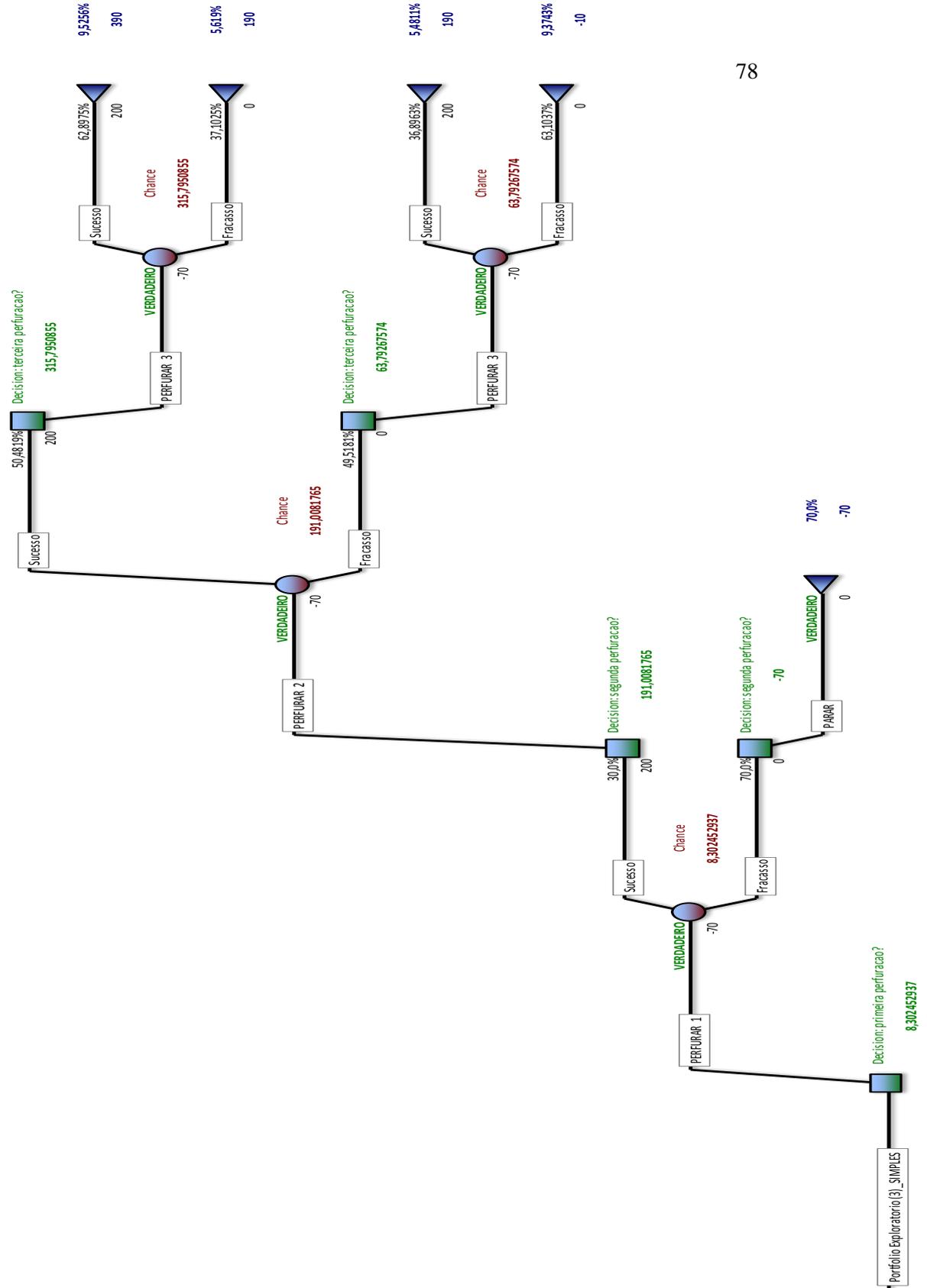
SEQUENCIA	VALOR PORTFOLIO
ABC	7,209
ACB	7,575
BAC	6,933
BCA	7,361
CAB	8,302
CBA	8,302

Fonte: Elaboração própria

É interessante notar como os resultados de cada sequência neste caso, variam menos entre si (em especial, ao comparar com o caso 5). Destaca-se também que o prospecto C é aquele que deve ser perfurado inicialmente. Tal conclusão está relacionada com o fato de que o prospecto C apresenta maior correlação com os demais prospectos do portfolio (na Tabela 6, a correlação entre prospectos A e B é a menor de todas).

Tomando por exemplo a sequência CAB temos uma estratégia de perfurações muito semelhante à do caso 5, conforme Figura 12.

Figura 12 – Estratégia ótima de perfurações – Caso 6
 Fonte: Elaboração própria



3.4. Modelo com quatro prospectos

3.4.1.

CASO 7: Quatro prospectos correlacionados

Estenderemos a análise anterior passando a considerar agora o caso no qual o portfólio é composto por quatro prospectos. Neste caso também todos os prospectos estão no mesmo *play geológico* apresentando diferentes graus de dependência entre si. Como veremos, a complexidade do problema aumenta significativamente. Tomemos como exemplo a seguinte Configuração de prospectos.

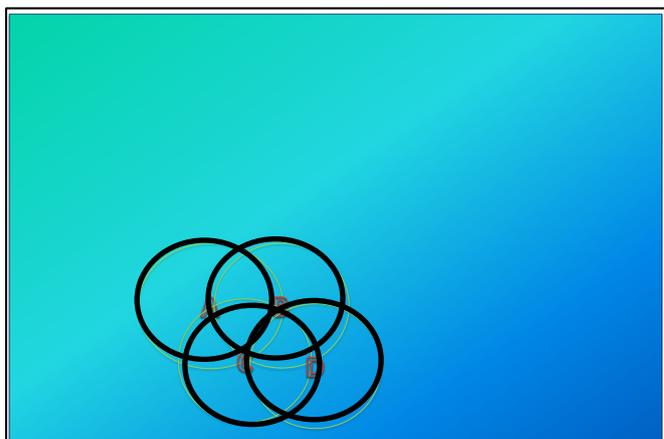


Figura 13 – Portfólio – Caso 7

Fonte: Elaboração própria

A matriz de distâncias e a respectiva matriz de correlações estão representadas nas Tabelas 8 e 9.

Tabela 8 – Matriz de distâncias – Caso 7

MATRIZ DISTÂNCIAS	A	B	C	D
A	1	85	77	147
B	85	1	78	86
C	77	78	1	86
D	147	86	86	1

Fonte: Elaboração própria

Tabela 9 – Matriz de correlações- Caso 7

MATRIZ CORRELAÇÃO	A	B	C	D
A	1,000	0,260	0,293	0,011
B	0,260	1,000	0,286	0,255
C	0,293	0,286	1,000	0,257
D	0,011	0,255	0,257	1,000

Fonte: Elaboração própria

Como se vê, em tal Configuração, o a perfuração de um prospecto gera um impacto em termos de revisão do fator de chance de todos os demais prospectos. Como caso-base vamos considerar que os quatro prospectos têm as mesmas premissas do anterior.

3.4.1.1.

Valor: do portfólio, da opcionalidade e do aprendizado

Consideremos inicialmente a sequência composta pela perfuração primeiro do prospecto A, depois B, C e, por fim, o prospecto D. Tal como tem sido feito, o portfólio é resolvido *backwards*. Inicialmente calcularemos os fatores de chance revisados dos prospectos B, C e D após a perfuração do prospecto A. A partir das equações de atualização dos fatores de chance (equações 40 e 41), temos:

$$FC_B^+ = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 30\%}{30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 26\% = 48,2\% \quad (108)$$

$$FC_B^- = 30\% - \sqrt{\frac{30\%}{1 - 30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 26\% = 22,2\% \quad (109)$$

$$FC_C^+ = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 30\%}{30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 29,3\% = 50,5\% \quad (110)$$

$$FC_C^- = 30\% - \sqrt{\frac{30\%}{1 - 30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 29,3\% = 21,2\% \quad (111)$$

$$FC_D^+ = 30\% + \sqrt{\frac{1 - 30\%}{30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 1,1\% = 30,8\% \quad (112)$$

$$FC_D^- = 30\% - \sqrt{\frac{30\%}{1 - 30\%}} \sqrt{30\%(1 - 30\%)} 1,1\% = 29,7\% \quad (113)$$

Agora iremos considerar as possíveis revisões dos Fatores de Chance de C e D decorrente de cada cenário ocorrido (sucesso ou fracasso) após a perfuração do segundo prospecto (B). Assim, temos 4 possíveis Fatores de Chance para o tanto para o prospecto C quanto para o prospecto D, sendo:

$$FC_C^{++} = 50,5\% + \sqrt{\frac{1 - 48,2\%}{48,2\%}} \sqrt{50,5\%(1 - 50,5\%)} 26\% = 65,3\% \quad (114)$$

$$FC_C^{+-} = 50,5\% - \sqrt{\frac{48,2\%}{1 - 48,2\%}} \sqrt{50,5\%(1 - 50,5\%)} 26\% = 36,7\% \quad (115)$$

$$FC_C^{-+} = 21,2\% + \sqrt{\frac{1 - 22,2\%}{22,2\%}} \sqrt{21,2\%(1 - 21,2\%)} 26\% = 43,1\% \quad (116)$$

$$FC_C^{--} = 21,2\% - \sqrt{\frac{22,2\%}{1 - 22,2\%}} \sqrt{21,2\%(1 - 21,2\%)} 26\% = 15,0\% \quad (117)$$

$$FC_D^{++} = 30,8\% + \sqrt{\frac{1 - 48,2\%}{48,2\%}} \sqrt{30,8\%(1 - 30,8\%)} 25,5\% = 43\% \quad (118)$$

$$FC_D^{+-} = 30,8\% - \sqrt{\frac{48,2\%}{1 - 48,2\%}} \sqrt{30,8\%(1 - 30,8\%)} 25,5\% = 19,5\% \quad (119)$$

$$FC_D^{-+} = 29,7\% + \sqrt{\frac{1 - 22,2\%}{22,2\%}} \sqrt{29,7\%(1 - 29,7\%)} 25,5\% = 51,4\% \quad (120)$$

$$FC_D^{--} = 29,7\% - \sqrt{\frac{22,2\%}{1 - 22,2\%}} \sqrt{29,7\%(1 - 29,7\%)} 25,5\% = 23,4\% \quad (121)$$

Por fim, vamos considerar as revisões dos fatores de chance do quarto prospecto (D) decorrente da perfuração do terceiro prospecto (C). Nesse caso, serão 8 possíveis cenários sendo:

$$FC_D^{+++} = 43\% + \sqrt{\frac{1 - 65,3\%}{65,3\%}} \sqrt{43\%(1 - 43\%)} 26\% = 52,3\% \quad (122)$$

$$FC_D^{++-} = 43\% - \sqrt{\frac{65,3\%}{1 - 65,3\%}} \sqrt{43\%(1 - 43\%)} 26\% = 25,5\% \quad (123)$$

$$FC_D^{\pm+} = 19,5\% + \sqrt{\frac{1 - 36,7\%}{36,7\%}} \sqrt{19,5\%(1 - 19,5\%) 26\%} = 32,8\% \quad (124)$$

$$FC_D^{+-} = 19,5\% - \sqrt{\frac{36,7\%}{1 - 36,7\%}} \sqrt{19,5\%(1 - 19,5\%) 26\%} = 11,7\% \quad (125)$$

$$FC_D^{\mp+} = 51,4\% + \sqrt{\frac{1 - 43,1\%}{43,1\%}} \sqrt{51,4\%(1 - 51,4\%) 26\%} = 66,2\% \quad (126)$$

$$FC_D^{-+} = 51,4\% - \sqrt{\frac{43,1\%}{1 - 43,1\%}} \sqrt{51,4\%(1 - 51,4\%) 26\%} = 40,2\% \quad (127)$$

$$FC_D^{\mp-} = 23,4\% + \sqrt{\frac{1 - 15\%}{15\%}} \sqrt{23,4\%(1 - 23,4\%) 26\%} = 49,4\% \quad (128)$$

$$FC_D^{--} = 23,4\% - \sqrt{\frac{15\%}{1 - 15\%}} \sqrt{23,4\%(1 - 23,4\%) 26\%} = 18,9\% \quad (129)$$

Agora calculamos primeiro o VME de cada possível resultado do prospecto

D.

$$VME_D^{+++} = -70 + 52,3\% * 200 = 34,5 \quad (130)$$

$$VME_D^{++-} = -70 + 25,5\% * 200 = -18,9 \quad (131)$$

$$VME_D^{+-+} = -70 + 32,8\% * 200 = -4,3 \quad (132)$$

$$VME_D^{+--} = -70 + 11,7\% * 200 = -46,6 \quad (133)$$

$$VME_D^{-++} = -70 + 66,2\% * 200 = 62,4 \quad (134)$$

$$VME_D^{-+-} = -70 + 40,2\% * 200 = 10,5 \quad (135)$$

$$VME_D^{--+} = -70 + 49,4\% * 200 = 28,8 \quad (136)$$

$$VME_D^{---} = -70 + 18,9\% * 200 = -32,3 \quad (137)$$

Aplicando a mesma metodologia do caso anterior encontramos o valor do prospecto D *backwards* em relação a cada possível resultado do prospecto C.

Assim:

$$\begin{aligned} VME_{D|B,C}(++) &= \text{Max}\{0; 65,3\% \text{Max}[34,5, 0] + (1 - 65,3\%) \text{Max}[-18,9, 0]\} \\ &= \text{USD } 22,5 \text{ MM} \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} VME_{D|B,C(+)} &= \text{Max}\{0; 36,7\% \text{Max}[-4,3, 0] + (1 - 36,7\%) \text{Max}[-46,6, 0]\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} VME_{D|B,C(-)} &= \text{Max}\{0; 43,1\% \text{Max}[62,4, 0] + (1 - 43,1\%) \text{Max}[10,5, 0]\} \\ &= \text{USD } 32,9 \text{ MM} \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} VME_{D|B,C(--)} &= \text{Max}\{0; 15\% \text{Max}[28,8, 0] + (1 - 15\%) \text{Max}[-32,3, 0]\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (141)$$

Agora calculamos o VME de cada possível resultado apenas do prospecto

C.

$$VME_C^{++} = -70 + 65,3\% * 200 = 60,6 \quad (142)$$

$$VME_C^{+-} = -70 + 36,7\% * 200 = 3,4 \quad (143)$$

$$VME_C^{-+} = -70 + 43,1\% * 200 = 16,2 \quad (144)$$

$$VME_C^{--} = -70 + 15\% * 200 = -40,0 \quad (145)$$

Vamos então encontrar os valores dos prospectos C e D “backwards” em relação a cada possível resultado do prospecto B. Assim, temos:

$$\begin{aligned} VME_{C,D|B+} &= \text{Max}\{0; 48,2\% \text{Max}[60,6 + 22,5, 0] \\ &\quad + (1 - 48,2\%) \text{Max}[3,4 + 0, 0]\} = \text{USD } 41,8 \text{ MM} \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} VME_{C,D|B-} &= \text{Max}\{0; 22,2\% \text{Max}[16,2 + 32,9, 0] \\ &\quad + (1 - 22,2\%) \text{Max}[-40 + 4,4, 0]\} = \text{USD } 10,9 \text{ MM} \end{aligned} \quad (147)$$

Agora calculamos o VME de cada possível resultado apenas da perfuração do prospecto B, sendo:

$$VME_B^+ = -70 + 48,2\% * 200 = 26,4 \quad (148)$$

$$VME_B^- = -70 + 22,2\% * 200 = -25,6 \quad (149)$$

Tal como feito previamente, devemos encontrar os valores dos prospectos B, C e D *backwards* em relação a cada possível resultado do prospecto A. Assim, temos:

$$VME_{B,C,D|A+} = \text{Max}\{0; 30\%\text{Max}[26,4 + 41,8, 0] + (1 - 30\%)\text{Max}[-70 + 0, 0]\} = \text{USD } 20,5 \text{ MM} \quad (150)$$

$$VME_{B,C,D|A-} = \text{Max}\{0; 70\%\text{Max}[-25,6 + 10,9, 0] + (1 - 70\%)\text{Max}[-70 + 0, 0]\} = 0 \quad (151)$$

Como o VME do prospecto A tem o valor de – USD 10 MM, os ganhos decorrentes das perfurações dos prospectos B, C e D são mais do que suficientes para compensar as “perdas” incorridas na perfuração do prospecto A. Assim, sendo todo o portfólio exploratório opcional, em relação à sequência ABCD, a decisão racional do ponto de vista econômico seria proceder com a campanha exploratória. A partir da fórmula XX vemos que o valor do portfólio nesta sequência é de USD 10,5 MM.

3.4.1.2. Conclusões preliminares – sequência ideal

Considerando o caso do portfólio com quatro prospectos o número de possíveis combinações aumenta sensivelmente. No Apêndice A estão todas as árvores de decisão relativas às seis possíveis sequências contendo os respectivos fatores de chance revisados e valores de cada portfólio. A Tabela 10 resume os valores de portfólio encontrados em cada possível sequência e destaca as sequências que maximizam o valor do portfólio.

Tabela 10 – Valores portfólio diferentes sequências

SEQUÊNCIA	VALOR PORTFOLIO	SEQUÊNCIA	VALOR PORTFOLIO
ABCD	10,47	CABD	16,44
ABDC	8,99	CADB	17,63
ACBD	10,85	CBAD	16,13
ACDB	9,86	CBDA	16,1
ADBC	5,83	CDAB	17,63
ADCB	6,42	CDBA	16,21
BACD	15,05	DABC	4,97
BADC	16,39	DACB	4,72
BCAD	15,06	DBAC	8,1
BCDA	15,06	DBCA	9,22
BDAC	16,4	DCAB	8,62
BDCA	15,2	DCBA	9,36

Fonte: Elaboração própria.

De uma forma geral, qualquer que seja a sequência de perfurações, o Valor Monetário Esperado (VME) do portfólio será positivo. Esse resultado por si só já

é relevante, pois evidencia a importância do aprendizado e das opções na análise do portfólio. Entretanto, além disso, a escolha pela sequência ideal de perfurações pode ter um impacto positivo de até aproximadamente US\$ 9 MM. Tomando por exemplo a sequência CADB temos uma estratégia de perfurações que considera os resultados da primeira perfuração (C) fundamentais para avaliação da continuidade ou não da campanha exploratória (Figura 14).

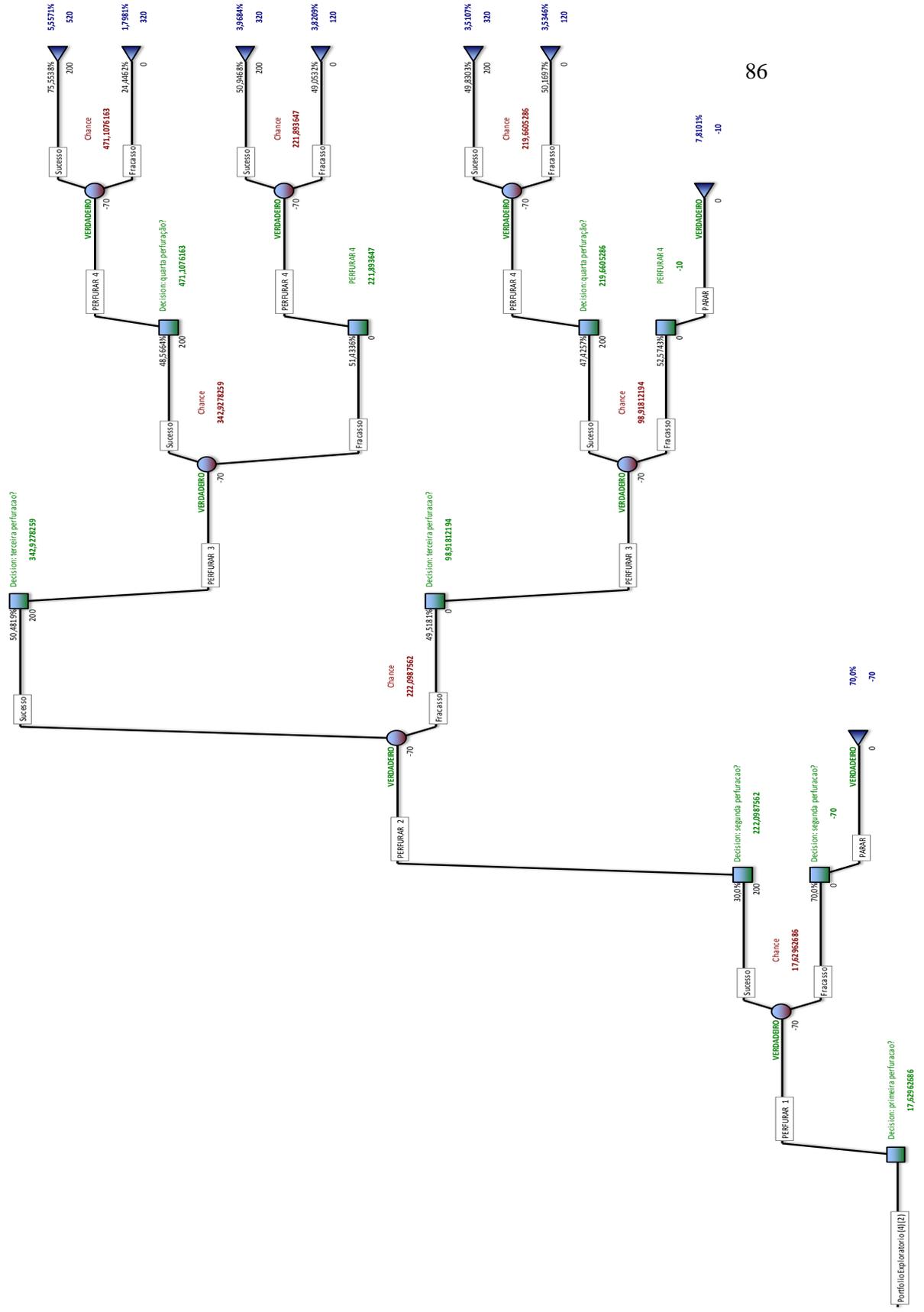


Figura 14 – Campanha otimizada de perfurações – caso 7
 Fonte: Elaboração própria

Em certa medida, a escolha pela sequência ideal é uma ponderação de duas características de cada prospecto sendo: (i) o potencial de revelação de cada prospecto (decorrente da sua correlação com os demais) e (ii) o VME específico do próprio prospecto. O processo de revelação de informações pode ser expresso através das sucessivas revisões dos fatores de chance de todos os prospectos decorrentes de cada perfuração. O Gráfico 7 ilustra isso para a sequência otimizada CADB em contraste com a sequência que apresentou o menor VME do portfolio (DACB).

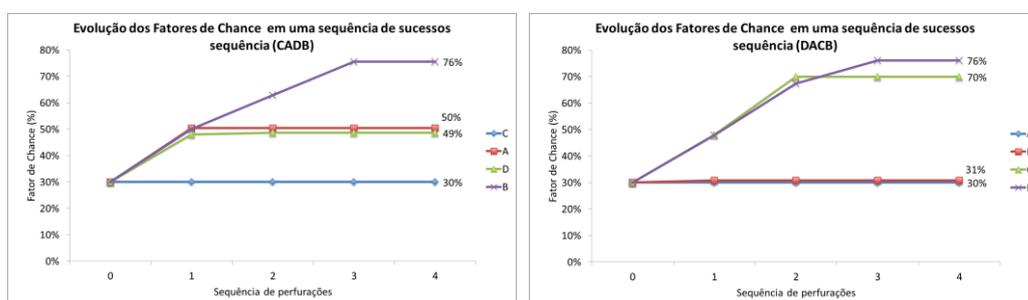


Gráfico 7 – Evolução FC sequência de sucessos
Fonte: Elaboração própria.

Como sensibilidade considera-se duas situações diferentes. Supondo inicialmente que, haja uma incerteza no VPL do prospecto D tal que o mesmo possa variar linearmente entre USD 100 MM e USD 300 MM. Nesse caso, qual seria o VME do portfolio obtido com a sequência CADB? Como o Gráfico 8 ilustra, ainda que o VPL do prospecto D seja de USD 100 MM a campanha exploratória como um todo é economicamente viável.

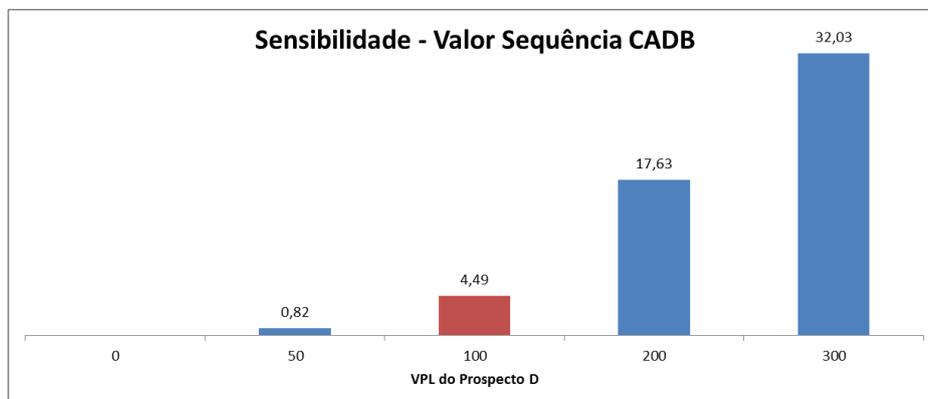


Gráfico 8 – Valor Sequencia CADB – sensibilidade VPL prospecto D

Entretanto, tal análise desconsidera que, para diferentes valores de VPL do prospecto D, eventualmente a sequência CADB, poderia não ser mais a ideal. Para avaliar isso, seria necessário testar novamente todas as possibilidades de desenvolvimento da campanha exploratória novamente. Com isso, numa segunda sensibilidade, assume-se um VPL de USD 300 MM para o prospecto D. Nesse caso, qual seria a sequência ideal? A Tabela 11 o resume os dados e destaca as sequências que resultam em maior e menor VME do portfolio.

Tabela 11 – Valores portfolio quatro prospectos – sensibilidade VPL

SEQUÊNCIA	VALOR PORTFOLIO	SEQUÊNCIA	VALOR PORTFOLIO
ABCD	17,36	CABD	30,50
ABDC	15,21	CADB	32,03
ACBD	17,36	CBAD	30,50
ACDB	16,31	CBDA	30,50
ADBC	15,70	CDAB	32,03
ADCB	15,66	CDBA	30,61
BACD	28,97	DABC	34,97
BADC	30,74	DACB	34,72
BCAD	28,97	DBAC	38,10
BCDA	29,40	DBCA	39,22
BDAC	30,75	DCAB	38,62
BDCA	29,55	DCBA	39,36

Fonte: Elaboração própria.

Nesse caso, o maior valor do VPL do prospecto D é tal que todas as sequências que se iniciam a partir da perfuração de tal prospecto resultam em um portfolio com maior VME do que nas demais situações. Tal resultado contrasta claramente com o caso base (VPL de D sendo USD 200 MM) no qual o prospecto C deveria ser perfurado inicialmente. Entretanto, tal conclusão não seria a mesma se a variação no VPL do prospecto não fosse tão significativa (digamos se o VPL aumentasse apenas para USD 250 MM), ou ainda, se houvesse incerteza também no VPL dos demais prospectos.

Essencialmente, o que as duas sensibilidades acima evidenciam é que, decorrente do aumento da quantidade de prospectos constantes no portfolio e da sensibilidade nos parâmetros iniciais, claramente a complexidade da análise também aumenta significativamente.

3.5. Portfolios compostos por mais do que quatro prospectos

Como evidenciado no CASO 7, na medida em que o número de prospectos presentes no portfolio aumenta, a complexidade do problema claramente cresce de forma não-linear também. Tal como temos feito, o cálculo na *força bruta* de todas as possíveis sequências (com as sucessivas revisões dos fatores de chance, cálculo dos VMEs, e desenho das estratégias ótimas) se torna inviável do ponto de vista prático. A dimensão do problema pode ser avaliada pelas seguintes equações:

$$N^{\circ} \text{ de payoffs (nós terminais)} = 2^n ; 2^{10} = 1.024 \quad (152)$$

$$N^{\circ} \text{ possíveis sequencias} = n! ; 10! = 3.628.800 \quad (153)$$

$$\text{Número de alternativas} = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{(n-p)!} = 9.864.100 \quad (154)$$

onde:

$n =$ Quantidade total de prospectos do portfolio

$p =$ Quantidade de prospectos a serem perfurados

$$n \geq p$$

Considerando, por exemplo, um portfolio composto por 5 prospectos cada árvore de decisão será composta por 32 nós terminais. Para representar todas as possibilidades de sequenciamento do portfolio exploratório seriam necessárias 120 árvores distintas. Caso desejássemos avaliar também as situações na qual apenas alguns poços (p) serão perfurados então são ao todo 325 possibilidades.

3.5.1. Não-linearidade do problema - Espaço de busca

Vamos considerar a partir de agora um portfolio composto por 10 prospectos exploratórios. A Tabela abaixo mostra todas as sequências possíveis em um portfolio de 10 prospectos nos quais são consideradas perfurações de até 10 poços. Por exemplo, considerando um portfolio composto por 10 prospectos no qual apenas um poço será perfurado, existem, obviamente 10 possibilidades

distintas de perfuração. Considerando a possibilidade de perfurar 2 poços dentre o conjunto de 10 então, decorrente da equação 152 haveria 90 formas de diferentes de executar tal campanha.

Considerando apenas o caso com dez poços, cada árvore de decisão seria composta por 1024 nós terminais e seriam necessárias 3.628.000 árvores para representar todas as possíveis sequências exploratórias, conforme visto na Tabela 12.

Tabela 12 – Total de alternativas portfolio com dez prospectos

Total Prospectos ----->		10
Nº Poços	Nº Possibilidades	
1	10	
2	90	
3	720	
4	5.040	
5	30.240	
6	151.200	
7	604.800	
8	1.814.400	
9	3.628.800	
10	3.628.800	
TOTAL Alternativas	9.864.100	

Fonte: Elaboração própria

3.5.2. Método de Otimização: Computação Evolucionária

Em um certo problema, o Algoritmo Genético (AG) considera cada possível solução como sendo um indivíduo, representado através de um cromossoma, onde as soluções são representadas por vetores binários. Tal como na biologia os cromossomas são compostos por genes e a cada reprodução tais genes são alterados²⁸.

A população inicial de um AG clássico, com n indivíduos (potenciais soluções) é criada de forma aleatória. Avalia-se tais indivíduos associando-os a um número real, também chamado de aptidão, cujo propósito é mensurar o quanto aquela situação é adequada para satisfazer à especificação de um problema particular. Uma vez avaliada a população inicial do algoritmo, tem início o

²⁸ Baseado em ABREU (2012)

processo evolutivo no qual os indivíduos são submetidos às etapas de seleção, cruzamento, mutação e, mais uma vez, avaliação.

É atribuída a cada indivíduo da população uma probabilidade de seleção que, por sua vez, é diretamente proporcional à sua aptidão. Desta forma, no processo de seleção, os indivíduos passam por um procedimento que, essencialmente privilegia os mais aptos. A seleção é que irá quem são os *melhores* indivíduos (estabelecidos pela função-objetivo) de uma certa população, representando assim o domínio dos mais aptos. A seleção consiste, basicamente, em distribuir os indivíduos em uma roleta onde os mais aptos passam a ocupar maiores fatias da roleta tal que, ao ser girada, os indivíduos mais aptos terão maiores chances de ser selecionados para compor a população da geração seguinte. Sendo o tamanho da população mantido constante durante todo o processo evolutivo, na transição de uma geração para outra, a roleta deve ser girada um número de vezes igual ao tamanho da população. Decorrente das características da roleta, espera-se que na geração seguinte a nova população seja composta pelos indivíduos mais aptos das gerações anteriores e que os menos aptos sejam eliminados.

Uma vez selecionados, parte dos indivíduos sofre a ação dos operadores genéticos que modificam esses indivíduos e, como consequência geram novas soluções para o problema considerado. Dois operadores comumente utilizados são os de mutação e cruzamento (*cross-over*).

O operador de mutação consiste na aplicação de pequenas modificações pontuais e aleatórias em uma ou mais características de um indivíduo para criar um novo, razoavelmente semelhante. A mutação tem por propósito introduzir diversidade em uma nova geração.

O operador de cruzamento, por sua vez, consiste na recombinação do material genético de dois indivíduos (pais) a fim de criar dois novos indivíduos (*filhos*). Com isso, tal operador tem a função de extrair de diferentes indivíduos os melhores genes e recombiná-los para formar indivíduos com melhores características.

Por fim, após a aplicação dos operadores genéticos origina-se novas populações e para encerrar um ciclo de evolução, também chamado de geração, avaliam-se os indivíduos desta nova população. Tais ciclos se repetem até que

uma condição de parada seja atendida. Normalmente, a condição de parada é dada pelo número de gerações.

3.5.3. Algoritmos Genéticos: Cromossoma

Propõe-se o uso de Algoritmos Genéticos para resolver o problema de otimização exposto no item 3.5.2. Trata-se de um problema de ordenamento na qual a representação se dá através de uma lista que expressa a sequência na qual cada prospecto será perfurado.

Considera-se um cromossoma de tamanho fixo igual ao número de prospectos (de agora em diante, de tamanho = 10). A função objetivo é maximizar o VME do portfolio através da escolha adequada das perfurações a serem feitas.

Como operadores considera-se o Cross-over uniforme baseado em ordem; Mutação por baseada em ordem e Mutação baseada em posição.

A menos que se explicita o contrário as premissas básicas são:

- (a) Taxa de *Cross-Over* de 80%;
- (b) Taxa de mutação de 10%;
- (c) População Inicial de 100;
- (d) Nº máximo de iterações de 3.000
- (e) Outros

3.6. CASO 8: Modelo com 10 prospectos com 2 clusters

Vamos considerar inicialmente o caso de um portfolio exploratório no qual os prospectos estão agrupados em dois conjuntos separados (*2 clusters*), como na Figura 15.

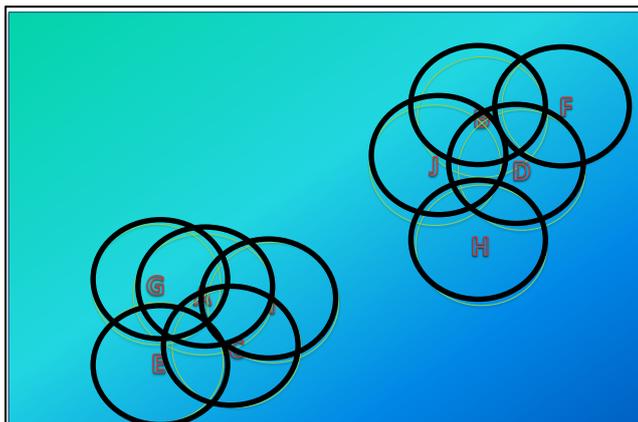


Figura 15 – Portfólio – Caso 8
Fonte: Elaboração própria.

Tal como tem sido assumido, neste caso também, cada um dos prospectos apresenta, inicialmente, o VME negativo de – USD 10 MM. Sob tais premissas, uma análise simplista do valor do portfólio indicaria que não há economicidade na execução de tal campanha exploratórias (VPL do portfólio = - USD 100 MM) e, portanto, nenhum prospecto deveria ser perfurado.

Vê-se claramente que essa campanha exploratória poderia ser *reduzida* a duas campanhas distintas. Ao agrupamento de prospectos no mesmo *play geológico*, denominamos *clusters*. Essencialmente, o resultado da otimização do portfólio acima deve, necessariamente, ter no máximo o mesmo valor da otimização de cada cluster em separado. Decorrente da Configuração acima se tem a matriz de distâncias (Tabela 13) e respectiva matriz de correlações (Tabela 14).

Tabela 13 – Matriz de distâncias – Caso 8

MATRIZ DISTANCIAS (KM)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1,000	136,291	25,617	140,94	33,65	168,79	20,14	116,19	28,53	109,40
B	136,291	1,000	138,886	27,13	167,67	35,03	151,17	53,00	115,68	27,82
C	25,617	138,886	1,000	138,54	32,95	168,74	42,27	109,21	23,48	111,11
D	140,94	27,13	138,54	1,000	169,71	32,36	158,03	35,49	116,63	35,71
E	33,65	167,67	32,95	169,71	1,000	199,00	32,35	141,62	53,08	140,23
F	168,79	35,03	168,74	32,36	199,00	1,000	184,63	67,74	146,17	59,51
G	20,14	151,17	42,27	158,03	32,35	184,63	1,000	134,99	48,61	125,14
H	116,19	53,00	109,21	35,49	141,62	67,74	134,99	1,000	89,29	38,08
I	28,53	115,68	23,48	116,63	53,08	146,17	48,61	89,29	1,000	87,97
J	109,40	27,82	111,11	35,71	140,23	59,51	125,14	38,079	87,97	1,000

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 14 – Matriz de correlações – Caso 8

MATRIZ CORRELAÇÃO										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1,000	0,000	0,293	0,00	0,20	0,00	0,36	0,00	0,26	0,00
B	0,000	1,000	0,000	0,27	0,00	0,18	0,00	0,00	0,00	0,27
C	0,293	0,000	1,000	0,00	0,20	0,00	0,09	0,00	0,32	0,00
D	0,00	0,27	0,00	1,00	0,00	0,21	0,00	0,17	0,00	0,17
E	0,20	0,00	0,20	0,00	1,00	0,00	0,21	0,00	0,00	0,00
F	0,00	0,18	0,00	0,21	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
G	0,36	0,00	0,09	0,00	0,21	0,00	1,00	0,00	0,02	0,00
H	0,00	0,00	0,00	0,17	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,14
I	0,26	0,00	0,32	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	1,00	0,00
J	0,00	0,27	0,00	0,17	0,00	0,00	0,00	0,143	0,00	1,00

Fonte: Elaboração própria

Para resolver o problema acima se considerou 1049 gerações do Algoritmo Genético. Após cerca de 295 evoluções do AG não foi encontrada outra sequência de maior VME do portfólio. No Gráfico 8, cada iteração do AG é representada por um ponto vermelho e a linha azul representa a solução ótima encontrada na evolução do AG.

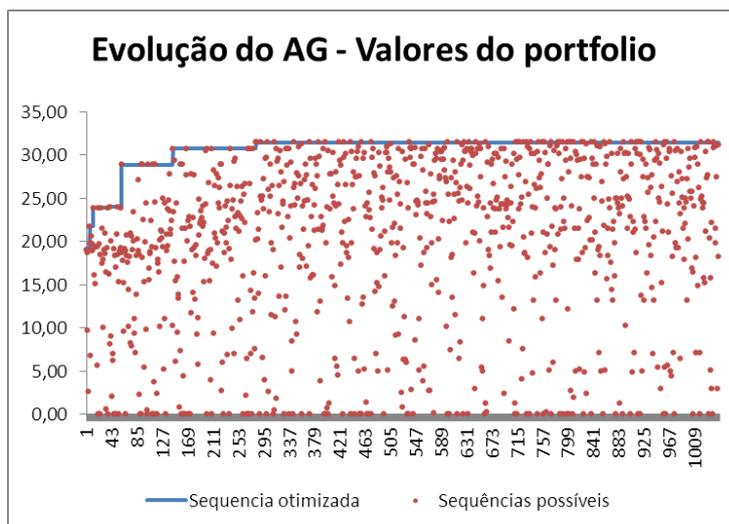


Gráfico 9 – Evolução do AG – Caso 8

Fonte: Elaboração própria

Dentre as diversas sequências possíveis avaliadas (num universo de aproximadamente 10 milhões de possibilidades) a sequência que otimiza o valor do portfólio está representada abaixo. É interessante notar como a conclusão geral se mostra muito distinta daquela previamente considerada. Isto é, o portfólio como um todo é economicamente viável e, ao invés da campanha representar uma perda econômica de – USD 100 MM, pelo contrário, tem um VPL positivo de + USD 31,5 MM.

Na Tabela 15, a terceira coluna indica o quanto a perfuração de cada prospecto (segunda coluna) na ordem listada (primeira coluna) agrega, isoladamente, de valor ao portfólio. Por exemplo, a primeira perfuração (poço A) não agrega nenhum valor ao portfólio (seu VME é de – USD 10 MM), entretanto, é decorrente da perfuração de A, que o prospecto seguinte G (e também os demais correlacionados) terão seu fator de chance e, portanto, seu VME revisado. O segundo prospecto (G) tem o VME de + USD 12,05, entretanto, como o mesmo só faz sentido depois de perfurar o prospecto A (cujo VME é – USD 10 MM) então, o ganho no valor do portfólio é dado + USD 2,05.

Tabela 15 – Sequência otimizada – Caso 8

Ordem	Prospecto	Ganho no Portfólio
1	A	0,00
2	G	2,05
3	C	9,29
4	D	0,00
5	E	4,69
6	I	8,72
7	B	1,76
8	H	0,98
9	F	1,69
10	J	2,29
TOTAL		31,47

Fonte: Elaboração própria

Os ganhos do portfólio podem ser decompostos em opcionalidade e aprendizagem. No caso em questão o portfólio que valia - USD 100 MM passa a valer + USD 31,5 MM decorrente, em parte da opcionalidade (perfurar ou não cada prospecto) e do aprendizado inerente (revisão dos fatores de chance e VME de cada prospecto). O Gráfico 9 ilustra quanto cada prospecto traz de ganho, e a composição do ganho ao valor do portfólio.

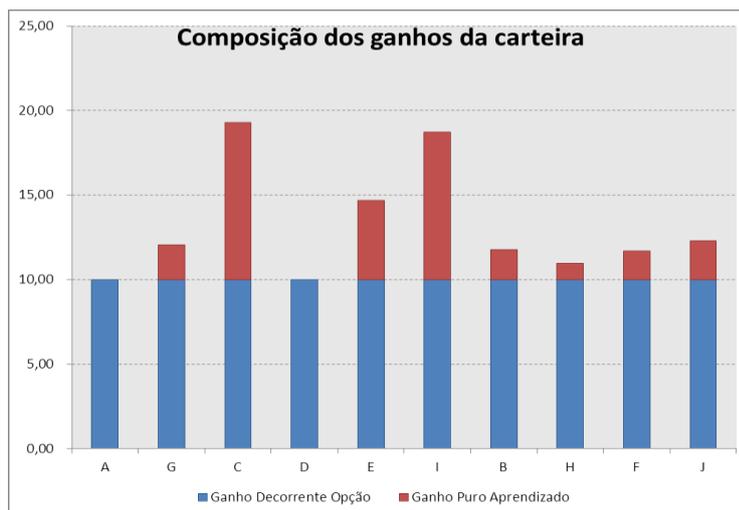


Gráfico 10 – Composição dos ganhos – Caso 8
Fonte: Elaboração própria

Como esperado, o primeiro prospecto exploratório em cada *cluster* não traz ganhos diretos de aprendizagem (apenas de opcionalidade). Entende-se, nesse contexto, o poço exploratório como um investimento em aquisição de informação tal que os demais VMEs dos prospectos correlacionados serão revisados.

Por fim, como sensibilidade foi considerada uma variação nos parâmetros do Algoritmo Genético. Em particular, foi avaliado se um incremento na taxa de mutação é capaz de fornecer alguma solução melhor do que a previamente encontrada e se, é possível obter esta mesma solução com um número menor de rodadas do AG. O Gráfico 10 ilustra, comparativamente, a evolução da melhor avaliação do AG em duas rodadas nas quais a taxa de mutação é de 10% e 20% .

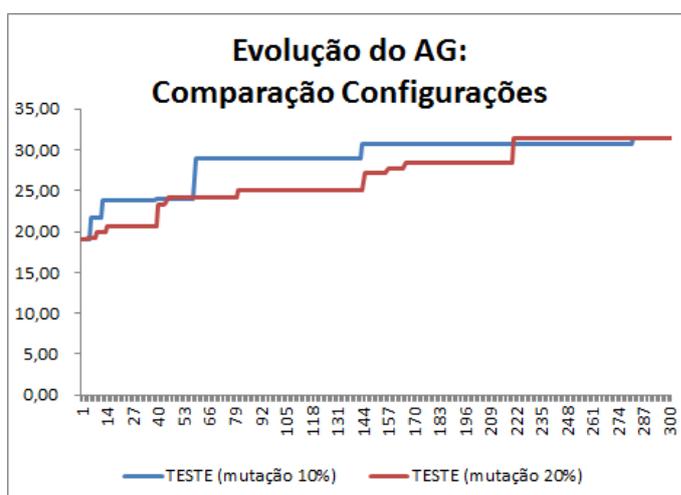


Gráfico 11 – Sensibilidade taxa mutação – Caso 8
Fonte: Elaboração própria.

Como se vê, ambas as configurações encontraram o mesmo valor otimizado para o portfólio, entretanto, a Configuração com taxa de mutação de 20% atingiu o valor máximo após um número menor de iterações (cerca de 220) o que sinaliza ser mais adequada neste caso.

3.6.1.

CASO 9: Modelo com 10 prospectos – Configuração em formato de “U”

Vamos considerar agora o caso de um portfólio exploratório no qual os prospectos estão dispersos geograficamente em um padrão que pode ser aproximado por um formato de *U* (Figura 16).

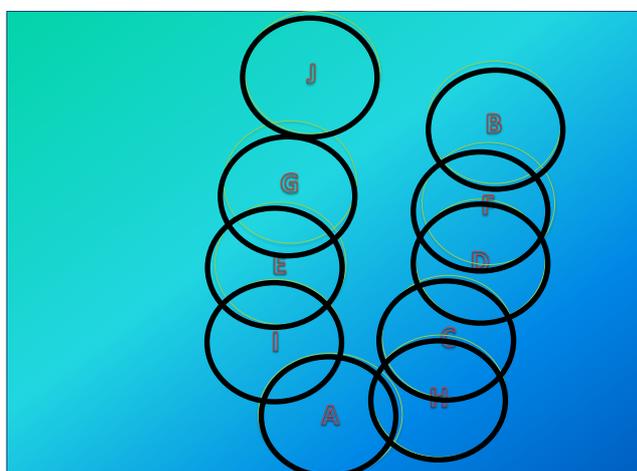


Figura 16 – Portfólio – Caso 9
Fonte: Elaboração própria.

Prosseguimos com a hipótese de que todos os prospectos apresentam inicialmente o VME negativo de – USD 10 MM. Sob tais premissas, uma análise simplista do valor do portfólio indicaria que não há economicidade na execução de tal campanha exploratórias (VPL do portfólio = - USD 100 MM) e, portanto, nenhum prospecto deveria ser perfurado.

Intuitivamente, num portfólio com tal Configuração tende-se a se esperar que uma sequência ideal de perfurações partisse *do meio* tal que a perfuração revelasse mais informação sobre o todo que está no entorno. Algo como, perfuração A ou H, inicialmente e, então, prosseguir com a perfuração dos prospectos mais próximos. Entretanto, como veremos, tal análise pode não ser adequada.

Decorrente da Configuração acima se tem a matriz de distâncias (Tabela 16) e respectiva matriz de correlações (Tabela 17).

Tabela 16 – Matriz de distâncias – Caso 9

MATRIZ DISTANCIAS (KM)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1,000	136,693	57,227	87,69	64,93	107,20	96,07	44,94	37,20	139,86
B	136,693	1,000	89,702	56,62	104,38	33,44	86,59	114,20	125,87	76,74
C	57,227	89,702	1,000	34,05	74,32	56,74	89,81	24,56	69,69	121,20
D	87,69	56,62	34,05	1,00	81,34	23,19	83,57	58,11	89,32	102,70
E	64,93	104,38	74,32	81,34	1,00	87,77	33,24	84,46	31,71	79,08
F	107,20	33,44	56,74	23,19	87,77	1,00	80,80	81,09	102,63	89,27
G	96,07	86,59	89,81	83,57	33,24	80,80	1,00	106,34	64,91	45,89
H	44,94	114,20	24,56	58,11	84,46	81,09	106,34	1,00	70,10	142,06
I	37,20	125,87	69,69	89,32	31,71	102,63	64,91	70,10	1,00	110,64
J	139,86	76,74	121,20	102,70	79,08	89,27	45,89	142,062	110,64	1,00

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 17 – Matriz de correlação – Caso 9

MATRIZ CORRELAÇÃO										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,15	0,00
B	0,000	1,000	0,000	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
C	0,000	0,000	1,000	0,19	0,00	0,00	0,00	0,31	0,00	0,00
D	0,00	0,00	0,19	1,00	0,00	0,32	0,00	0,00	0,00	0,00
E	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,20	0,00	0,22	0,00
F	0,00	0,20	0,00	0,32	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
G	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00	1,00	0,00	0,00	0,05
H	0,06	0,00	0,31	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
I	0,15	0,00	0,00	0,00	0,22	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
J	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,000	0,00	1,00

Fonte: Elaboração própria.

Para resolver o problema acima se considerou 1000 gerações do Algoritmo Genético. Após a cerca de 800 evoluções do AG não foi encontrada outra seqüência de maior VME do portfolio (Gráfico 11).

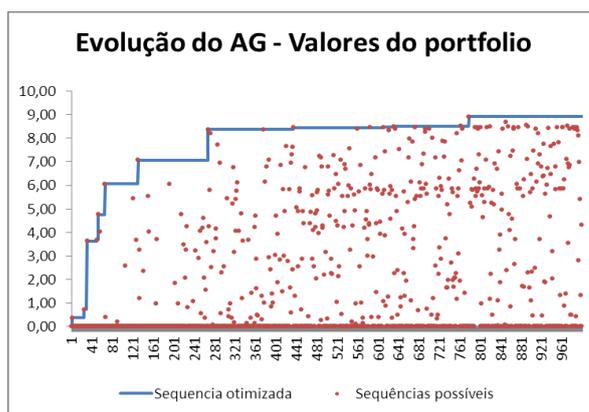


Gráfico 12 – Evolução do AG – Caso 9

Fonte: Elaboração própria

Dentre as diversas seqüências possíveis avaliadas (num universo de aproximadamente 10 milhões de possibilidades) a seqüência que otimiza o valor

do portfolio está representada na Tabela 18. É interessante notar como a conclusão geral se mostra muito distinta daquela previamente considerada (não perfurar nada) e do que a intuição da Configuração *em U* tinha indicado (começar por A ou H). Isto é, o portfolio como um todo é economicamente viável e, ao invés da campanha representar uma perda econômica de – USD 100 MM, pelo contrário, tem um VPL positivo de + USD 8,9 MM.

Na Tabela a seguir, a quarta coluna indica o VME do prospecto, a terceira coluna indica o quanto a perfuração de cada prospecto (segunda coluna) na ordem listada (primeira coluna) agrega, isoladamente, de valor ao portfolio. Por exemplo, a primeira perfuração (poço D) não agrega nenhum valor ao portfolio (seu VME é de – USD 10 MM), entretanto, é decorrente da perfuração de D, que o prospecto seguinte F (e também outros prospectos) terão seus fatores de chance e, portanto, seus VMEs revisados. O segundo prospecto (F) tem o VME de + USD 10,5, entretanto, como o mesmo só faz sentido depois de perfurar o prospecto D (cujo VME é – USD 10 MM) então, o ganho no valor do portfolio é dado + USD 0,51. Do 6º prospecto (G) até o 10º (E) todos os prospectos apresentam VME negativos e a correlação no portfolio como um todo não é positiva o suficiente para que os ganhos de aprendizado sejam suficientes para viabilizar a sua perfuração.

Tabela 18 – Sequência otimizada – Caso 9

Ordem	Prospecto	Ganho no Portfolio	VME
1	D	0,00	(10,00)
2	F	0,51	10,51
3	C	5,04	5,04
4	H	2,86	2,86
5	B	0,50	0,50
6	G	0,00	(10,00)
7	I	0,00	(10,00)
8	J	0,00	(10,00)
9	A	0,00	(10,00)
10	E	0,00	(10,00)
TOTAL		8,91	(41,09)

Fonte: Elaboração própria.

Assim, o planejamento do portfolio exploratório indica que apenas 5 poços deveriam ser perfurados (Figura 17). Evidentemente que, a depender do resultado obtido em cada perfuração (isso é, tendo sido revelado cada cenário de sucesso/fracasso) nas perfurações (*ex-post*) dos poços inicialmente planejados, os

demais prospectos podem ter seu VME revisado tal que se tornem economicamente viáveis. Entretanto, tal avaliação foge ao escopo deste estudo. O que importa é que, para fins de planejamento, a análise não considera que os prospectos G,I,J,A e E acrescem algum valor ao portfólio (*ex-ante*).

O primeiro prospecto (D) é aquele que apresentou maior correlação com os demais e foi indicado como sendo o pioneiro nesta campanha. Após ele, alguns prospectos próximos geograficamente, aparentemente no mesmo *play geológico* também se mostraram economicamente viáveis tal que a campanha se reduziu à área evidenciada na Figura abaixo. Vale notar que iniciar a campanha pelo prospecto D (e seguir a campanha na sequência otimizada F,C,H e B) é aderente ao conceito de que a revelação de informações se daria a partir do meio em direção às bordas.

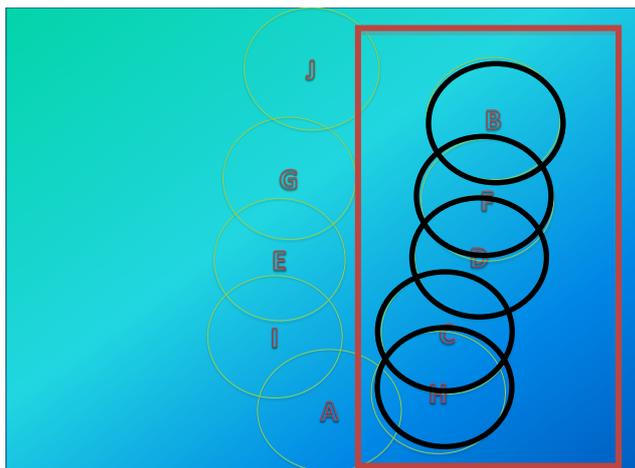


Figura 17 – Prospectos relevantes – Caso 9
Fonte: Elaboração própria.

A decomposição dos ganhos do portfólio em opcionalidade e aprendizagem resulta em que o portfólio que valia - USD 100 MM passa a valer + USD 8,9 MM decorrente, em parte da opcionalidade (perfurar ou não cada prospecto) e do aprendizado inerente (revisão dos fatores de chance e VME de cada prospecto). O Gráfico 12 ilustra quanto cada prospecto traz de ganho, e a composição do mesmo ao valor do portfólio. Evidencia-se que não há ganhos de aprendizagem a partir da quinta perfuração. Sendo o único ganho da 6ª perfuração em diante o de

opcionalidade, fica claro, mais uma vez, que, para fins de planejamento não perfurar tais prospectos é uma estratégia ótima.

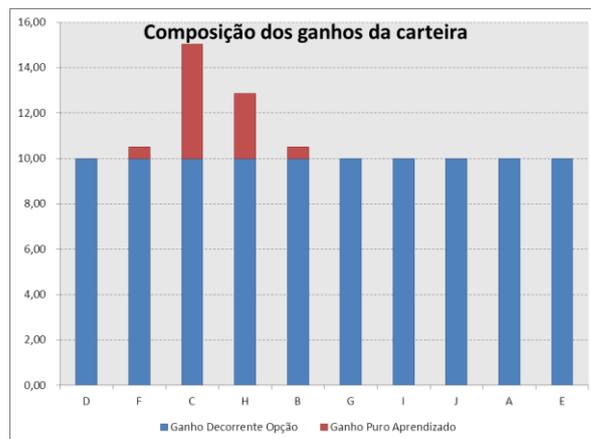


Gráfico 13 – Composição dos ganhos – Caso 9
Fonte: Elaboração própria.

Por fim, como sensibilidade foi considerada uma variação nos parâmetros do Algoritmo Genético. Em particular, foi avaliado se um incremento na taxa de mutação é capaz de fornecer alguma solução melhor do que a previamente encontrada e se, é possível obter esta mesma solução com um número menor de rodadas do AG. O Gráfico 13 ilustra a comparação entre a evolução do AG comparando as rodadas nas quais a taxa de mutação é de 10% e 20%.

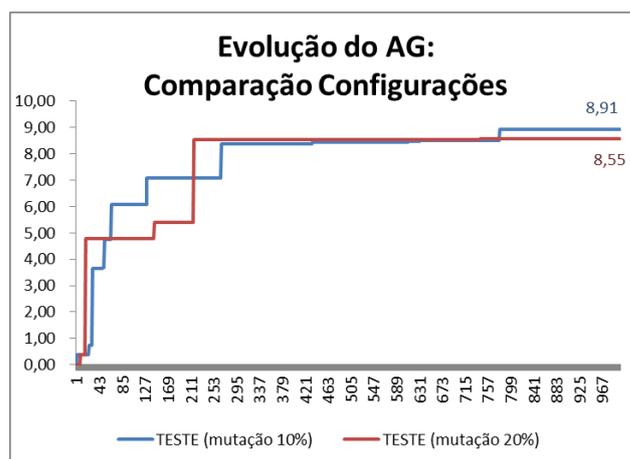


Gráfico 14 – Sensibilidade taxa de mutação – Caso 9
Fonte: Elaboração própria

Como se vê, a Configuração com taxa de mutação de 20% não atingiu o valor máximo do portfólio. A partir da iteração 200 o algoritmo não apresentou

nenhuma evolução indicando que a Configuração com 10% de taxa de mutação é mais adequada neste caso.

3.6.2.

CASO 10: Modelo com 10 prospectos – Configuração mista

Por último, vamos considerar agora o caso de um portfolio exploratório no qual os prospectos estão dispersos geograficamente em um padrão misto que combina elementos de ambos casos previamente considerados, como o que está apresentado na Figura 18.

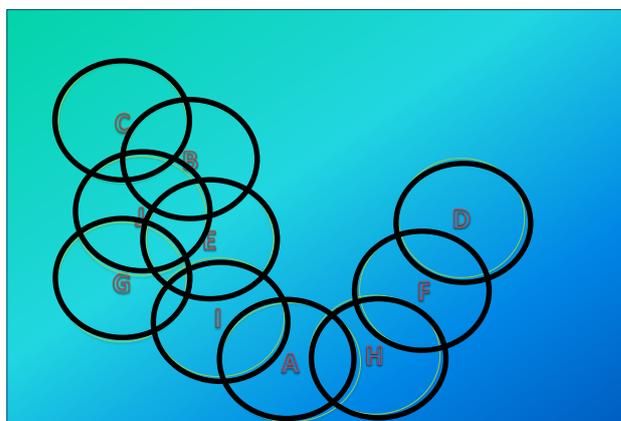


Figura 15 – Portfolio – Caso 10
Fonte: Elaboração própria.

Mais uma vez, prosseguimos com a hipótese de que todos os prospectos apresentam inicialmente o VME negativo de – USD 10 MM. Assim, uma análise simplista do valor do portfolio indicaria que não há economicidade na execução de tal campanha exploratórias (VPL do portfolio = - USD 100 MM) e, portanto, nenhum prospecto deveria ser perfurado.

Intuitivamente, num portfolio com tal Configuração tende-se a se esperar que uma sequência ideal de perfurações partisse de um prospecto como central, como o prospecto I, tal que a perfuração revelasse mais informação sobre o todo que está no entorno e pudesse *caminhar para um lado ou outro* da campanha exploratória.

Decorrente da Configuração acima se tem a matriz de distâncias (Tabela 19) e respectiva matriz de correlações (Tabela 20).

Tabela 19 – Matriz de distância – Caso 10

MATRIZ DISTANCIAS (KM)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1,000	94,663	122,886	93,64	61,67	63,39	77,98	35,46	35,51	87,45
B	94,663	1,000	32,539	115,59	34,28	111,63	58,80	112,49	67,02	31,42
C	122,886	32,539	1,000	146,98	61,27	144,17	67,33	143,87	91,24	40,40
D	93,64	115,59	146,98	1,000	105,39	34,14	144,22	67,98	109,57	133,67
E	61,67	34,28	61,27	105,39	1,000	91,85	40,85	84,44	32,87	30,25
F	63,39	111,63	144,17	34,14	91,85	1,000	126,04	34,07	86,41	122,00
G	77,98	58,80	67,33	144,22	40,85	126,04	1,000	110,03	42,92	28,80
H	35,46	112,49	143,87	67,98	84,44	34,07	110,03	1,000	67,26	113,76
I	35,51	67,02	91,24	109,57	32,87	86,41	42,92	67,26	1,000	53,27
J	87,45	31,42	40,40	133,67	30,25	122,00	28,80	113,76	53,27	1,000

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 20 – Matriz de correlação – Caso 10

MATRIZ CORRELAÇÃO										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	0,17	0,00
B	0,000	1,000	0,210	0,00	0,19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,22
C	0,000	0,210	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12
D	0,00	0,00	0,00	1,000	0,00	0,19	0,00	0,00	0,00	0,00
E	0,00	0,19	0,00	0,00	1,000	0,00	0,11	0,00	0,21	0,24
F	0,00	0,00	0,00	0,19	0,00	1,000	0,00	0,19	0,00	0,00
G	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,00	1,000	0,00	0,08	0,25
H	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,19	0,00	1,000	0,00	0,00
I	0,17	0,00	0,00	0,00	0,21	0,00	0,08	0,00	1,000	0,00
J	0,00	0,22	0,12	0,00	0,24	0,00	0,25	0,000	0,00	1,000

Fonte: Elaboração própria.

Para resolver o problemas acima se considerou 1000 gerações do Algoritmo Genético. Após a cerca de 880 evoluções do AG não foi encontrada outra sequência de maior VME do portfolio (Gráfico 14).

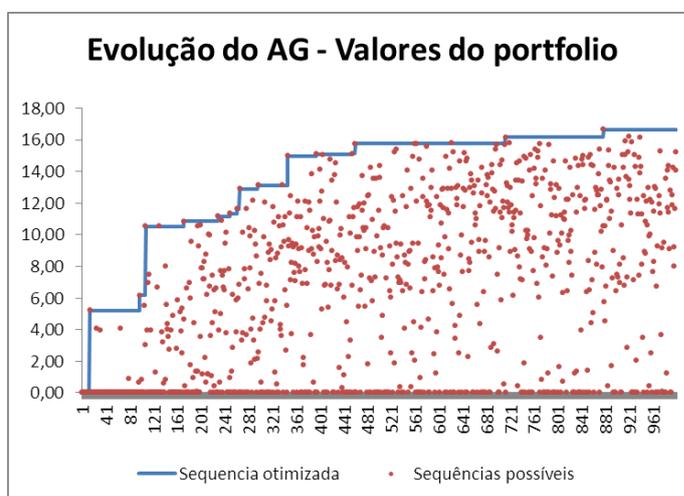


Gráfico 15 – Evolução do AG – Caso 10

Fonte: Elaboração própria.

Dentre as diversas sequências possíveis avaliadas (num universo de aproximadamente 10 milhões de possibilidades) a sequência que otimiza o valor do portfolio está representada abaixo. É interessante notar como a conclusão geral se mostra muito distinta daquela previamente considerada (não perfurar nada) e

semelhante ao que visto nos casos anteriores (perfurar, *a partir do centro*, apenas alguns prospectos que se mostrem economicamente viáveis). Isto é, o portfolio como um todo é economicamente viável e, ao invés da campanha representar uma perda econômica de – USD 100 MM, pelo contrário, tem um VPL positivo de + USD 8,9 MM.

Na Tabela 21, a terceira coluna indica o quanto a perfuração de cada prospecto (segunda coluna) na ordem listada (primeira coluna) agrega, isoladamente, de valor ao portfolio. Por exemplo, a primeira e segunda perfuração (poços J e D) não agregam diretamente nenhum valor ao portfolio (VME de ambas é de – USD 10 MM), entretanto, é decorrente destas perfurações, que o prospecto seguinte G (e também outros prospectos) terão seus fatores de chance e, portanto, seus VMEs revisados. Semelhantemente ao caso anterior, o 9º (D) e 10º prospecto (F) apresentam VME negativos e a correlação no portfolio como um todo não é positiva o suficiente para que os ganhos de aprendizado sejam suficientes para viabilizar a sua perfuração.

Tabela 21 – Sequência otimizada – Caso 10

Ordem	Prospecto	Ganho no Portfolio
1	J	0,00
2	B	0,00
3	G	4,05
4	E	7,32
5	C	3,88
6	I	0,81
7	A	0,42
8	H	0,17
9	D	0,00
10	F	0,00
TOTAL		16,65

Fonte: Elaboração própria.

A decomposição dos ganhos do portfolio em opcionalidade e aprendizagem resulta em que o portfolio que valia - USD 100 MM passa a valer + USD 16,7 MM decorrente, em parte da opcionalidade (perfurar ou não cada prospecto) e do aprendizado inerente (revisão dos fatores de chance e VME de cada prospecto). O Gráfico 15 ilustra quanto cada prospecto traz de ganho, e a composição do mesmo ao valor do portfolio. Evidencia-se que não há ganhos de aprendizagem a partir

da oitava perfuração. Sendo o único ganho da 9ª e 10ª perfuração em diante o de opcionalidade, fica claro, mais uma vez, que, para fins de planejamento não perfurar tais prospectos é uma estratégia ótima.

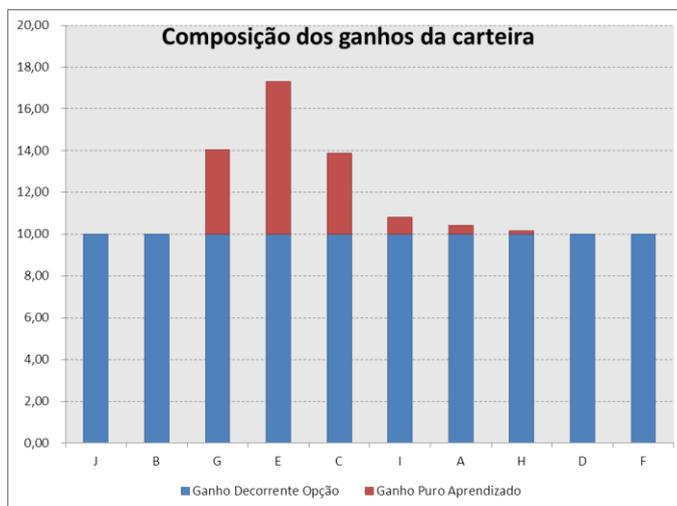


Gráfico 16 – Composição dos ganhos – Caso 10
Fonte: Elaboração própria.

A título ilustrativo o Gráfico a seguir ilustra o a evolução dos fatores de chance o portfólio exploratório em um dado possível *caminho*. Como vimos no item 3.5 há, nesse caso, 1028 possíveis *caminhos* para uma dada sequência. O Gráfico 16 ilustra a evolução dos fatores de chance numa campanha em que cada perfuração resulta em sucesso e, portanto os fatores de chance dos prospectos correlacionados são revisados *para cima*. Vê-se que o processo de aprendizagem é tal que, nesse *caminho* (sucessos) alguns prospectos podem ter seu FC aumentado de 30% para até 63%:

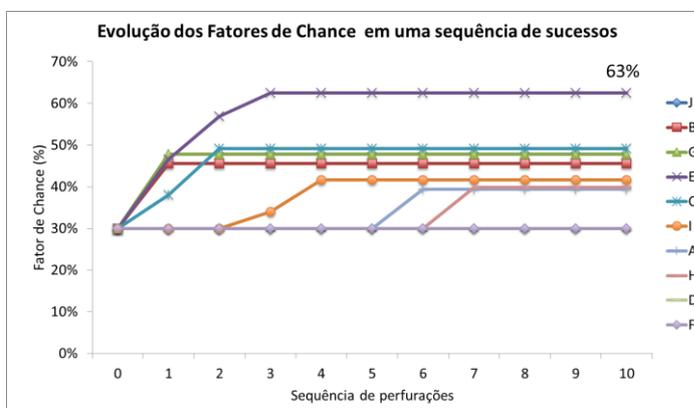


Gráfico 17 – Evolução FC em sequência de sucessos – Caso 10
Fonte: Elaboração própria.

Evidentemente que, em contrapartida, no caso de todas as perfurações resultarem em fracasso, a evolução dos fatores de chance o portfólio exploratório se dará no sentido oposto. Vê-se que, decorrente da revisão *para baixo* decorrente do aprendizado alguns prospectos podem ter seu FC que era de 30% reduzidos para aproximadamente 15% (Gráfico 17).

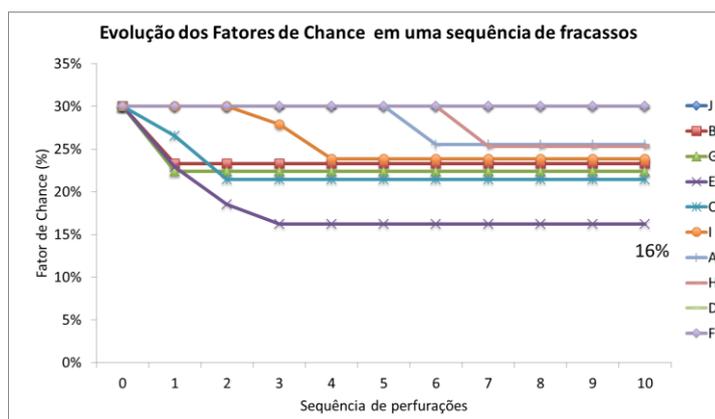


Gráfico 18 – Evolução FC em sequência de sucessos – Caso 10
Fonte: Elaboração própria

Por fim, como sensibilidade foi considerada uma variação nos parâmetros do Algoritmo Genético. Em particular, foi avaliado se um incremento na taxa de mutação é capaz de fornecer alguma solução melhor do que a previamente encontrada e se, é possível obter esta mesma solução com um número menor de rodadas do AG. O Gráfico 18 ilustra a comparação entre a evolução do AG comparando as rodadas nas quais a taxa de mutação é de 10% e 20%.

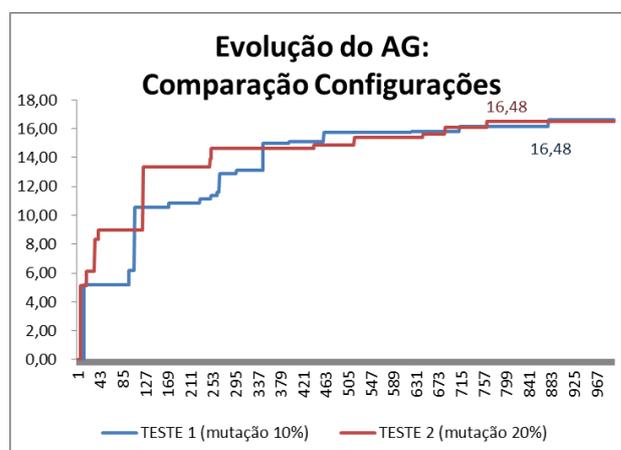


Gráfico 19 – Sensibilidade taxa de mutação – Caso 10
Fonte: Elaboração própria.

Como se vê, ambas as configurações encontraram o mesmo valor otimizado para o portfólio, entretanto, a Configuração com taxa de mutação de 20% atingiu o valor máximo após um número menor de iterações (cerca de 750) o que sinaliza ser mais adequada neste caso.

4 Conclusões e trabalhos futuros

O presente estudo teve por objetivo propor, implementar e avaliar um modelo computacional baseado em Algoritmos Genéticos, capaz de, considerando portfolio composto por uma grande quantidade de prospectos, maximizar o seu valor otimizando a sequência de perfurações de poços exploratórios. Foram considerados diversos estudos de caso que contemplam portfolios compostos por até 10 prospectos correlacionados.

Decorrente do perfil da Configuração dos prospectos, da estrutura de correlações, do aprendizado e da existência de opcionalidade no portfolio exploratório, obteve-se ganhos no valor do portfolio em todos os casos considerados. No planejamento da campanha exploratória, em especial a sequência de perfurações tem um papel fundamental no valor do portfolio como um todo.

Nos casos considerados obteve-se ganhos de até USD 132 MM decorrente da incorporação dos ganhos de opcionalidade, aprendizado e do sequenciamento ideal do portfolio (Tabela 22).

Tabela 22 – Resumo Valores portfolio

Nº CASO	VALOR SIMPLES (SEM OPÇÕES/APRENDIZADO)	VALOR OTIMIZADO (C/OPCOES e APRENDIZADO)	GANHO (VALOR OTIMIZADO - VALOR SIMPLES)
2	(20,0)	2,0	22,0
5	(30,0)	8,8	38,8
6	(30,0)	8,3	38,3
7	(40,0)	17,6	57,6
8	(100,0)	31,5	131,5
9	(100,0)	8,9	108,9
10	(100,0)	16,7	116,7

Fonte: Elaboração própria.

Adicionalmente, para os portfólios compostos por até 4 prospectos exploratórios além da adequada quantificação do seu VPL, este estudo apresentou a regra ótima de decisão dinâmica da campanha exploratória decorrente do resultado (sucesso/fracasso) de cada perfuração. Como resultado geral tem-se que o uso de AG se mostrou adequado para planejar e quantificar a campanha exploratória como um todo. Entretanto, uma vez iniciada a campanha, após cada perfuração, recomenda-se avaliar novo o portfólio (com o mesmo modelo) apenas atualizando com o resultado de cada perfuração.

Como extensão deste estudo sugere-se quantificar os ganhos decorrentes de sinergia para os casos de portfólio composto por mais de dois prospectos. Tal sofisticação aproximaria o modelo da realidade e traria ganhos ao valor do portfólio.

Adicionalmente, incorporar a análise probabilística ao valor dos prospectos também é uma interessante sugestão de trabalho futuro. Isto é, considerando, por exemplo, que o valor de cada prospecto está atrelado ao valor do Brent e que este, por sua vez, segue um processo estocástico, então, qual seria o valor do portfólio otimizado, em risco? A sequência a ser considerada como ótima seria a mesma?

Como conclusão geral tem-se que, considerar a correlação entre os prospectos e a opcionalidade da campanha exploratória são dois aspectos fundamentais na gestão de um portfólio exploratório.

5 Referências bibliográficas

ABREU, A. C. A Otimização do cronograma de ativação de poços de petróleo por Algoritmos Genéticos. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Elétrica, 2012.

ANIONE, S.; LORASCHI, A.; TETTAMANZI, A. A genetic approach to portfolio selection. **Neural Network World**, [S.l.], v.6, no.93, p. 597-604, 1993.

ARROW, K. J. Information and economic behavior. In: _____. **Collected papers of Kenneth J. Arrow**: volume 4: the economics of information. Cambridge, USA: Belknap Press of Harvard University Press, 1984, p.136-152. Artigo original de 1973, apresentado na Federation of Swedish Industries.

ARROW, K. J. Jacob Marschak's contributions to the economics of decision and information. **American Economic Review**, [S.l.], v. 68, no.2, p. 12-14, May 1978.

BLAU, G. E. et al. Managing a portfolio of interdependent new product candidates in the pharmaceutical industry. **Journal of Product Innovation Management**, [S.l.], v. 21, n. 4, p. 227-245, 2004.

BOULDING, K.E. The Economics of Knowledge and the Knowledge of Economics. **American Economic Review**, vol. 56(1/2), March, 1966, p. 1-13.

BRAVO, O.; MOGOLLON, L.; GOMEZ, J. P. Valuation of a real options portfolio. In: LATIN AMERICAN AND CARIBBEAN PETROLEUM ENGINEERING CONFERENCE, 2009, [S.l.]. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2009.

BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resource investment. **Journal of Business**, [S.l.], v.58, no. 2, p. 135-157, 1985.

BROSCH, R. **Portfolio-aspects in real options management**. Frankfurt, Main: Goethe-Universität, Feb. 2001. Working paper.

CARR, P. The valuation of American exchange options with application to real options. In: TRIGEORGIS, L. (Ed.). **Real options in capital investments: models, strategies, and applications**. Westport, Conn.: Praeger Publisher, 1995. p.109-120.

CHANG, T.-J.; YANG, S.-C.; CHANG, K.-J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, [S.l.], v.36, no.7, p. 10529-10537, 2009.

CHILDS, P. D.; OTTIS, S. H.; TRIANTIS, A. J. Capital budgeting for interrelated projects: a real options approach. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, [S.l.], v.33, no.3, p. 305-335, Sept. 1998.

CORTAZAR, G.; SCHWARTZ, E. S.; CASASSUS, J. Optimal exploration investments under price and geological-technical uncertainty: a real options model. **R&D Management**, [S.l.], v.31, no.2, p. 181-189, 2001.

CUDDY, S. J.; GLOVER, P. W. J. The application of fuzzy logic and genetic algorithms to oil exploration. **Advances in Soft Computing**, New York, v. 9, p. 167-174, 2001.

DELFINER, P. Modeling dependencies between geologic risks in multiple targets. In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 2000, Dallas, Texas. **Proceedings...** Dallas, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2000. SPE Paper 63200.

DIAS, M. A. G. Selection of alternatives of investment in information for oilfield development using evolutionary real options approach. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL OPTIONS, 5th., Los Angeles, 2001. **Proceedings...** Los Angeles: [s.n.], 2001.

DIAS, M. A. G. Real options, learning measures, and Bernoulli revelation processes. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL OPTIONS, 9th., 2005, Paris. **Proceedings...** Paris: [s.n.], 2005a.

DIAS, M. A. G. Opções reais híbridas com aplicações em petróleo. 2005.509p. Diss. Tese (Doutorado em Engenharia Industrial)- Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial, PUC-RIO, Rio de Janeiro.

DIAS, M. A. G. **Real options theory for real asset portfolios: the oil exploration case**. [S.l.: s.n.], 2006.

GESKE, R. L.; JOHNSON, H. E. The American put option valued analytically. **Journal of Finance**, [S.l.], v. 39, p. 1511-1524, Dec. 1984.

HALL, W. J. On characterizing dependence in joint distributions. In: BOSE, R. C. *et al* (ed.), **Essays in probability and statistics**. Chapel Hill, USA: University of North Carolina Press, 1970. p. 339-376.

HILTON, R. W. Determinants of information value: synthesizing some general results. **Management Science**, [S.l.], v.27, p.57-64, Jan. 1981.

HOEFFDING, W. Masstabinvariante korrelationstheorie (scale-invariant correlation theory). In: FISHER, N. I.; SEN, P. K. (Ed.). **The collected works of wassily hoeffding**. New York: Springer-Verlag, 1994, p. 57-107.

HOEFFDING, W. Masstabinvariante korrelationsmasse für diskontinuierliche verteilungen (scale-invariant correlation measures for discontinuous

distributions). In: FISHER, N. I.; SEN, P. K. (Ed.). **The collected works of wassily hoeffding**. New York: Springer-Verlag, 1994a. p. 109-133.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. [S.l.]: MIT Press, 1992. 211p.

JOE, H. **Multivariate models and dependence concepts**. London: Chapman & Hall: CRC, 1997. 399p.

KOCHERLAKOTA, S.; KOCHERLAKOTA, K. **Bivariate discrete distributions**. New York: Marcel Dekker, 1992. 361p.

KOZA, J. R. **Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection**. [S.l.]: MIT Press, 1992. 819p.

LANDER, D. M.; PINCHES, G. E. Challenges to the practical implementation of modeling and valuing real options. **The Quarterly Review of Economics and Finance**, [S.l.], v. 38, no. 3, p. 537-567, 1998.

LANGLOIS, Richard N.; COSGEL, Metin M. Frank Knight on risk, uncertainty, and the firm: a new interpretation. **Economic Inquiry**, v. 31, n. 3, p. 456-465, 1993.

LAWRENCE, D. B. **The economic value of information**. New York: Springer Verlag, 1999. 393 p.

LUEHRMAN, T. A. Strategy as a portfolio of real options. **Harvard Business Review**, [S.l.], Sept./Oct., p.89-99, 1998.

MARI, D. D.; KOTZ, S. **Correlation and dependence**. London: Imperial College Press, 2001. 219p.

MARGRABE, W. **The value of an option to exchange one asset for another**. *The Journal of Finance*, v. 33, n. 1, p. 177-186, 1978.

MARKOWITZ, H. M. **Portfolio selection: efficient diversification of investments**. New Haven (USA): Cowles Foundation, Yale University Press, 1959.

MARSCHAK, J. Remarks on the Economics of Information. In: _____. **Contributions to scientific research in management**. Los Angeles: Western Data Processing Center, UCLA, 1959. p. 79-100. Disponível em: <cepa.newschool.edu/het/profiles/marschak.htm>. Acesso em: 10 mar. 2014.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A Family of bivariate distributions generated by the bivariate Bernoulli distribution. **Journal of the American Statistical Association**, [S.l.], v.80, no.390, p. 332-338, June 1985.

MCCORMACK, Michael D. et al. Applications of genetic algorithms in exploration and production. **Leading Edge**, Tulsa, OK, v.18, no.6, p. 716-718, June 1999.

MÜLLER, A.; STOYAN, D. **Comparison methods for stochastic models and risks**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2002. 330p.

MURTHA, J. A. Estimating reserves and success for a prospect with geologically dependent layers. **SPE Reservoir Engineering**, [S.l.], no.38, Feb. 1996.

NIKRAVESH, M. Computational intelligence for geosciences and oil exploration. In: _____. **Forging new frontiers: fuzzy pioneers I**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. p. 267-332.

PACHECO, Marco Aurélio Cavalcanti; VELLASCO, Marley Maria BR. **Sistemas inteligentes de apoio à decisão: análise econômica de projetos de desenvolvimento de campos de petróleo sob incerteza**. Editora PUC, 2007.

PADDOCK, J. L.; SIEGEL, D. R.; SMITH, J. L. Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases. **Quarterly Journal of Economics**, [S.l.], Aug. 1988.

RAIFFA, H. **Decision analysis**. New York: McGraw-Hill Co., 1968. 310p.

RÉNYI, A. On measures of dependence. **Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae**, [S.l.], v.10, p. 441-451, 1959.

ROSE, P. R. **Risk analysis and management of petroleum exploration ventures**. Tulsa, USA: American Association of Petroleum Geologists, 2001. 164p. (AAPG Methods in Exploration Series; no. 12).

SMITH, J.L. **The Option to Drill Again: Valuing a Sequence of Dependent Trials**. Southern Methodist University, Dallas, January 20, 2004, 21 p. Working Paper.

SMITH, J. L.; THOMPSON, R. **Managing a portfolio of real options: sequential exploration of dependent prospects**. Dallas: Southern Methodist University, January 31, 2004. 26 p. Working paper.

STABELL, C. B. Two alternative approaches to modeling risks in prospects with dependent layers. In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 2000, Dallas, Texas. **Proceedings...** Dallas, Texas: SPE, 2000. Paper 63204.

STULZ, R. M. Options on the minimum or maximum of two risky assets: analysis and applications. **Journal of Financial Economics**, [S.l.], v. 10, no. 2, July, p.161-185, 1982.

TRIGEORGIS, L. The nature of options interactions and the valuation of investments with multiple real options. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, [S.l.], v. 28, no. 1, p. 1-20, Mar. 1993.

VASSOLO, R. S.; ANAND, J.; FOLTA, T. B. Non-additivity in portfolios of exploration activities: a real options-based analysis of equity alliances in biotechnology. **Strategic Academic Journal**, [S.l.], v.25, p.1045-1061, 2004.

VELEZ-LANGS, O. Genetic algorithms in oil industry: An overview. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, [S.l.], v. 47, no. 1, p. 15-22, 2005.

VISHWANATH, T. Optimal orderings for parallel project selection. **International Economic Review**, [S.l.], Feb. 1992.

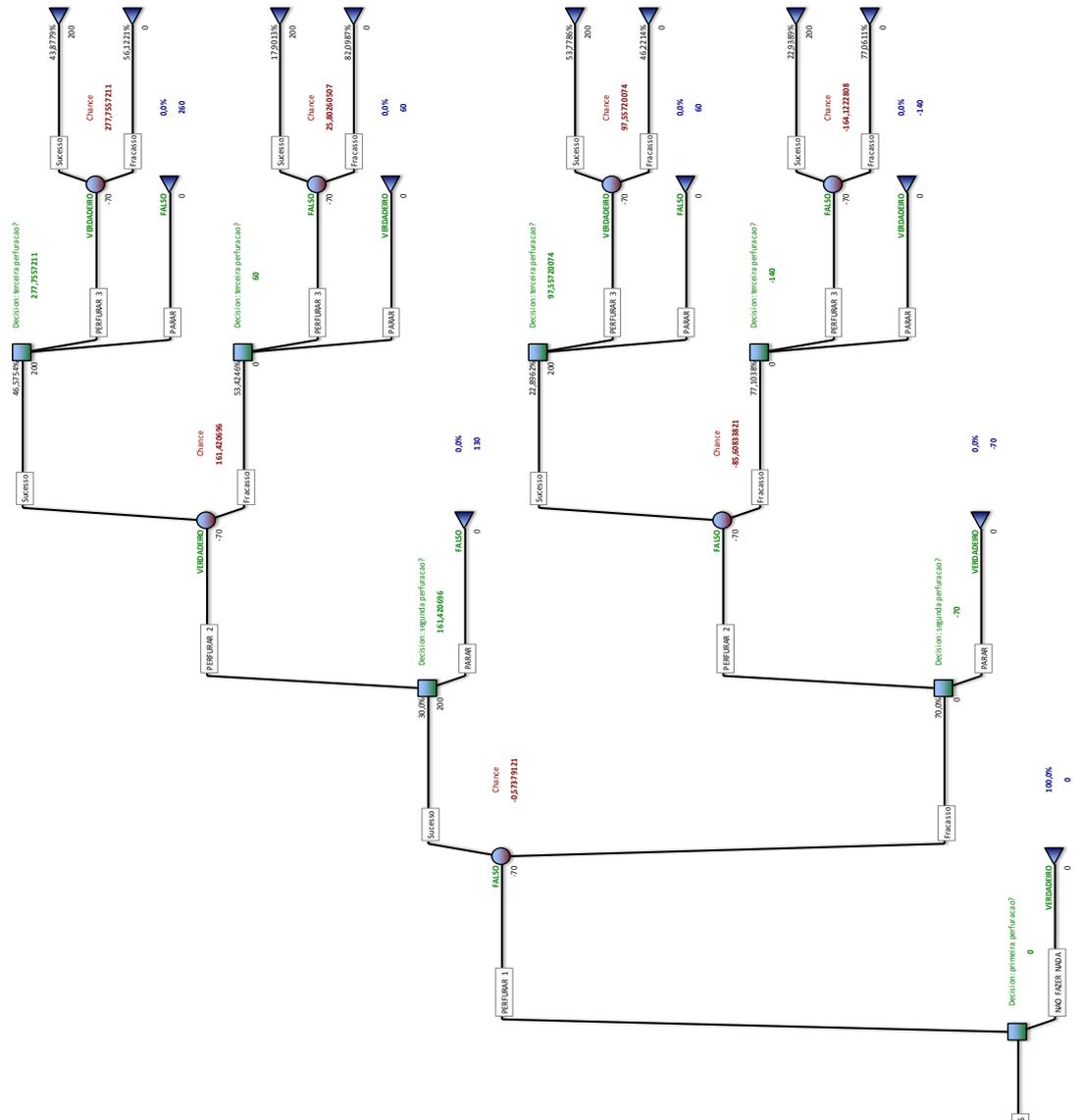
WANG, B., et. al. Dependent risk calculations in multiple-prospect exploration evaluations. In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 2000, Dallas, Texas, **Proceedings...** Dallas, Texas: SPE 2000. Paper 63198.

YOKOTA, F.; THOMPSON, K.M. **Value of Information Analysis in Environmental Health Risk Management Decisions: Past, Present, and Future**. Risk Analysis, vol.24(3), 2004, p.635-650

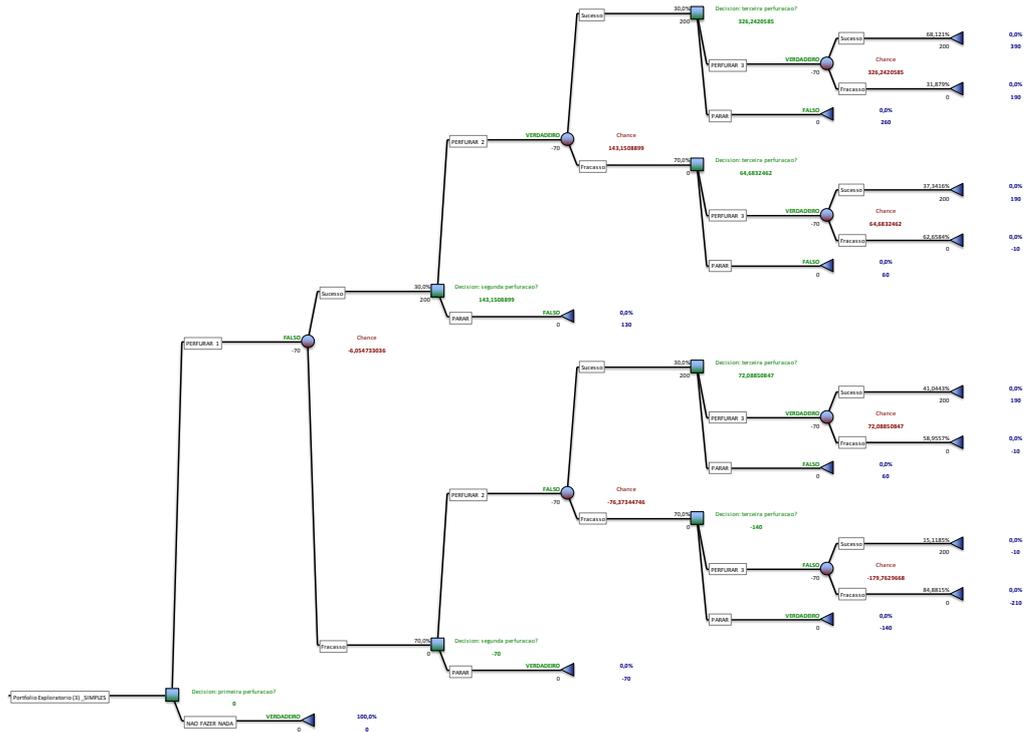
Apêndice – I

Caso 5

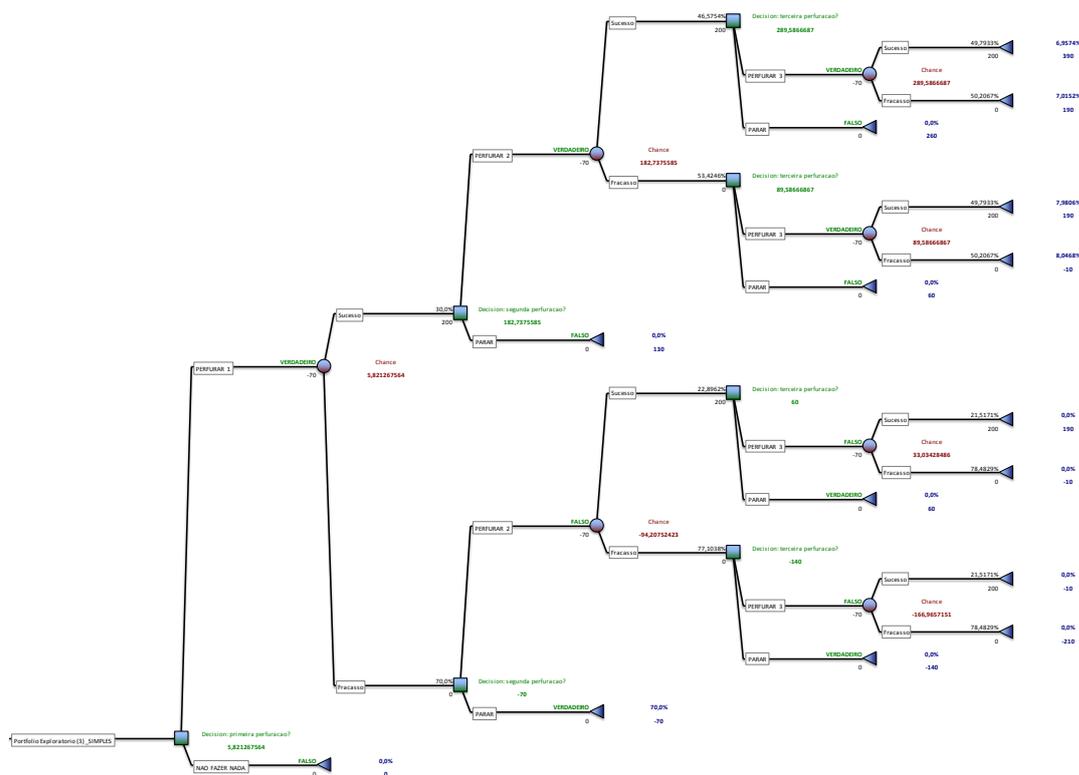
1) árvore ABC



2) árvore ACB

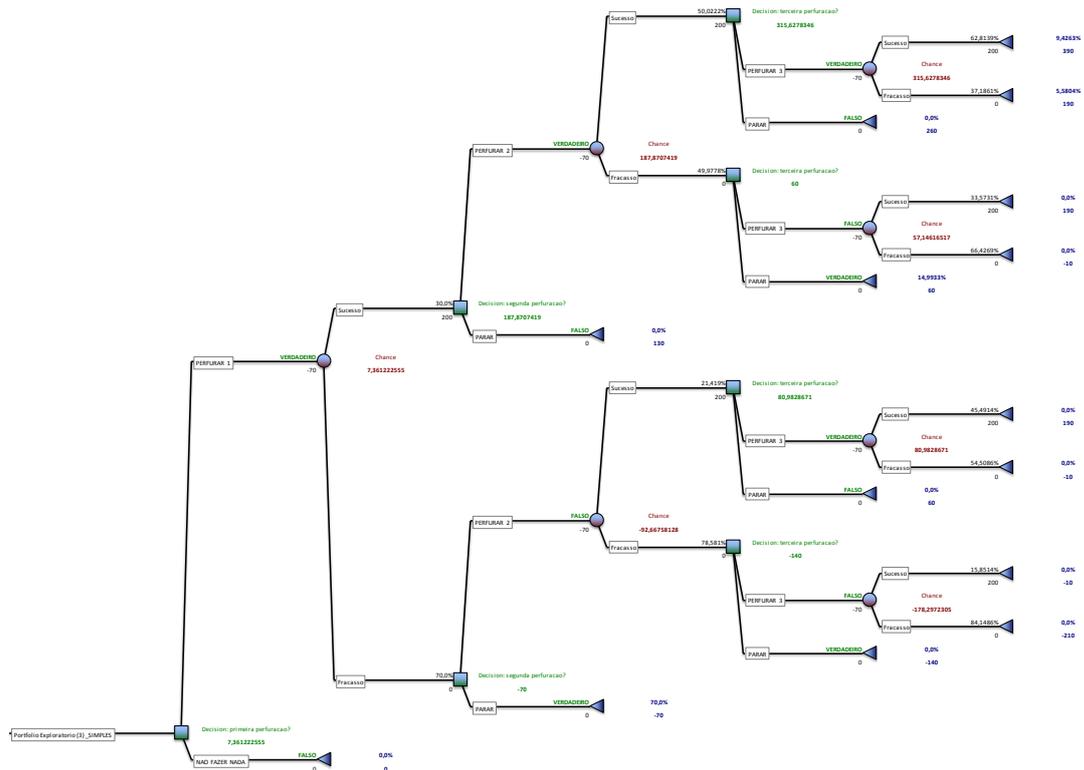


3) árvore BAC



4) árvore BCA

CASO 6 – SEQUÊNCIA BCA



CASO 6 – SEQUÊNCIA CAB

