

7 Fórmulas de multiplicação

Veremos como ficam as fórmulas de adição para arcos iguais.

Deduziremos as fórmulas do seno, cosseno e tangente de $2a$ e $3a$, conhecidos $\text{sen } a$, $\text{cos } a$ e $\text{tg } a$.

Façamos $2a = a + a$ e apliquemos as fórmulas de adição:

7.1 Cos (2a)

$$\text{I) } \cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \text{sen } a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

$$\text{Então: } \cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$$

7.2 Sen (2a)

$$\text{II) } \text{sen } 2a = \text{sen}(a + a) = \text{sen } a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos a$$

$$\text{Então: } \text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$$

7.3 Tg (2a)

$$\text{III) } \text{tg } 2a = \text{tg}(a + a) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } a}$$

$$\text{Então: } \text{tg } 2a = \frac{2 \cdot \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Fazendo $3a = 2a + a$ e aplicando as fórmulas de adição, temos:

7.4 Cos (3a)

$$I) \quad \cos(3a) = \cos(2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \operatorname{sen} 2a \cdot \operatorname{sen} a =$$

$$= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - (2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a) \operatorname{sen} a =$$

$$= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a =$$

$$= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \cdot (1 - \cos^2 a) \cos a =$$

$$2 \cdot \cos^3 a - \cos a - 2 \cdot \cos a + 2 \cos^3 a =$$

$$4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$$

$$\text{Então: } \cos(3a) = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$$

7.5 Sen (3a)

$$II) \quad \operatorname{sen}(3a) = \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos 2a =$$

$$= (2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a) \cdot \cos a + \operatorname{sen} a (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a) =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 a) + \operatorname{sen} a \cdot (1 - 2 \operatorname{sen}^2 a) =$$

$$2 \cdot \operatorname{sen} a - 2 \cdot \operatorname{sen}^3 a + \operatorname{sen} a - 2 \cdot \operatorname{sen}^3 a =$$

$$3 \cdot \operatorname{sen} a - 4 \cdot \operatorname{sen}^3 a$$

$$\text{Então: } \operatorname{sen}(3a) = 3 \cdot \operatorname{sen} a - 4 \cdot \operatorname{sen}^3 a$$

7.6 Tg (3a)

$$III) \quad \operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \cdot \operatorname{tg} a} =$$

$$\frac{2 \cdot \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 a)}{(1 - \operatorname{tg}^2 a) - 2 \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a}$$

$$\text{Então: } \operatorname{tg} 3a = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a}$$