6 Generalização das fórmulas

Foram demonstradas, de diferentes maneiras, as quatro fórmulas: Seno da soma, seno da diferença, cosseno da soma e cosseno da diferença de ângulos.
A última demonstração da seção anterior é válida para quaisquer números reais. E conforme mencionado anteriormente, demonstrada uma das fórmulas de adição de arcos, as outras são facilmente obtidas através de manipulações algébricas. Diante disso, obteremos as demais fórmulas a partir do cosseno da soma de dois arcos e com a mesma validade, isto é, válidas para todos os números reais . Assim, obteremos a generalização das fórmulas. São elas:

6.1 "Cosseno da diferença"

Cabe aqui observar que, para determinarmos a fórmula do cosseno da diferença de arcos, basta tomarmos $b < 0$ e aplicarmos a fórmula do cosseno da soma de arcos. Assim, temos:

$$\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = \cos a.\cos(-b) - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen}(-b) =$$
$$= \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.(-\operatorname{sen} b)$$

Então: $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$

De posse das duas fórmulas: Cosseno da soma e da diferença de arcos, obtemos as demais como consequência.

6.2 "Seno da soma"

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\operatorname{sen} b$$

Então: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a$

6.3 "Seno da diferença"

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}[a+(-b)]=\operatorname{sen}a.\cos(-b)+\operatorname{sen}(-b).\cos a=$$

$$=\operatorname{sen}a.\cos b+(-\operatorname{sen}b).\cos a$$

Então: $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a.\cos b-\operatorname{sen}b.\cos a$

6.4 "Tangente da soma"

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\operatorname{sen}a.\cos b+\operatorname{sen}b.\cos a}{\cos a.\cos b-\operatorname{sen}a.\operatorname{sen}b}=$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a.\cos b+\operatorname{sen}b.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b-\operatorname{sen}a.\operatorname{sen}b}{\cos a.\cos b}}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a.\cos b}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b}}+\frac{\dfrac{\operatorname{sen}b.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\operatorname{sen}a.\operatorname{sen}b}{\cos a.\cos b}}$$

Então: $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b}$

Esta fórmula só é aplicável se: $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $a+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

6.5 "Tangente da diferença"

$$\operatorname{tg}(a-b)=\operatorname{tg}[a+(-b)]=\operatorname{tg}\frac{\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}(-b)}$$

Então: $\operatorname{tg}(a-b)=\dfrac{\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}b}$

Esta fórmula é aplicável se: $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $a-b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$