# 5 Demonstrações das fórmulas da adição de arcos no contexto da trigonometria no círculo trigonométrico

Os conceitos inicialmente construídos, tendo o triângulo retângulo como referência serão estendidos agora. Passaremos a tratar de seno e cosseno de números reais e será possível generalizar as fórmulas de trigonometria.

Para melhor compreensão do leitor, faremos uso de arcos no primeiro quadrante em algumas demonstrações. A generalização das fórmulas se dá através das reduções ao primeiro quadrante.

Vale ressaltar que, as medidas dos ângulos assinalados nas figuras a seguir são determinadas apenas a menos de um múltiplo inteiro de $2\pi$, pois $P = E(t)$ implica $P = E(t + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathrm{Z}$. Por exemplo, o ângulo de $7\pi$ radianos é também o ângulo de $\pi + 2.3\pi$ radianos. O que corresponde a um arco que dá três voltas completas no círculo trigonométrico e tem sua extremidade no ponto que coincide com o arco de $\pi$ radianos, portanto, os ângulos de $7\pi$ e $\pi$ são côngruos e consequentemente possuem os mesmos senos e cossenos.

Em particular, teremos $\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen}(t)$ e $\cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$ , $k \in \mathrm{Z}$.

## 5.1 Proposta 6: : Uma demonstração do cosseno da soma de arcos e do seno da soma de arcos.

Sejam os arcos $AP$ com determinação $a$ e $PQ$ com determinação $b$. O arco $AQ$ tem determinação ( $a + b$ ).

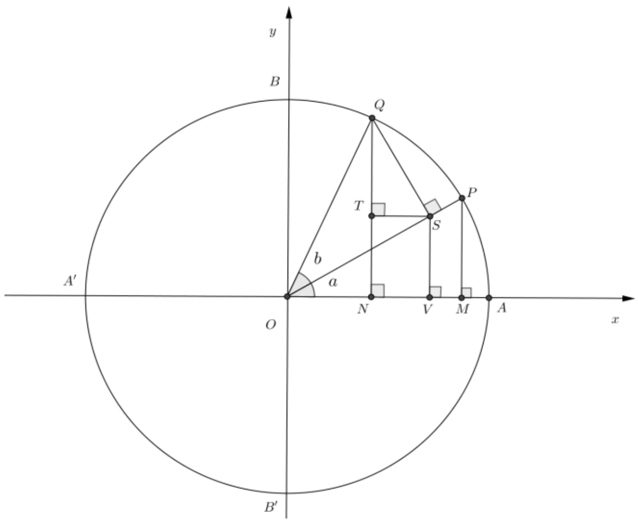


Figura 41: Uma demonstração do cosseno e do seno da soma de arcos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico de raio unitário acima, podemos deduzir que os triângulos *OMP, OVS e QTS* são retângulos e semelhantes. Então podemos construir algumas relações:

$\cos a = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OP}.\cos a$ , mas como $\overline{OP} = 1$ , temos: $\overline{OM} = \cos a$ (1)

$\cos b = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{OS} = \overline{OQ}.\cos b$ , mas como $\overline{OQ} = 1$ , temos: $\overline{OS} = \cos b$ (2)

$\operatorname{sen} a = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{OP}.\operatorname{sen} a$ , mas como $\overline{OP} = 1$ , temos: $\overline{MP} = \operatorname{sen} a$ (3)

$\operatorname{sen} b = \dfrac{\overline{SQ}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{SQ} = \overline{OQ}.\operatorname{sen} b$ , mas como $\overline{OQ} = 1$ , temos: $\overline{SQ} = \operatorname{sen} b$ (4)

$\cos(a+b) = \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{ON} = \overline{OQ}.\cos(a+b)$ , mas como $\overline{OQ} = 1$ , temos: $\overline{ON} = \cos(a+b)$ (5)

$\operatorname{sen}(a+b) = \dfrac{\overline{NQ}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{NQ} = \overline{OQ}.\operatorname{sen}(a+b)$ , mas como $\overline{OQ} = 1$ , temos: $\overline{NQ} = \operatorname{sen}(a+b)$ (6)

Agora que já construímos algumas relações principais, vamos às demonstrações:

I) $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$

- No triângulo $OVS$, temos: $\cos a = \dfrac{\overline{OV}}{\overline{OS}} \Rightarrow \overline{OV} = \cos a.\overline{OS}$ ,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{OV} = \cos a.\cos b$ (7)

- No triângulo $QTS$, temos: $\operatorname{sen} a = \dfrac{\overline{TS}}{\overline{SQ}} \Rightarrow \overline{TS} = \operatorname{sen} a.\overline{SQ}$ ,substituindo (4) nessa relação, temos: $\overline{TS} = \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$ (8)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Observando o círculo trigonométrico da figura 41, notamos que:

$\overline{ON} = \overline{OV} - \overline{NV}$ e também $\overline{NV} = \overline{TS}$ . Logo,

$\overline{ON} = \overline{OV} - \overline{TS}$

Substituindo as relações (5) , (7) e (8) na igualdade acima, obteremos:

$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \text{sen}\, a.\text{sen}\, b$

II) $\text{sen}(a+b) = \text{sen}a.\cos b + \text{sen}b.\cos a$

- No triângulo $OVS$, temos: $\text{sen}a = \dfrac{\overline{VS}}{\overline{OS}} \Rightarrow \overline{VS} = \text{sen}a.\overline{OS}$ ,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{VS} = \text{sen}a.\cos b$ (9)

- No Triângulo $QTS$, temos: $\cos a = \dfrac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}} \Rightarrow \overline{TQ} = \overline{SQ}.\cos a$ ,substituindo (4) nessa relação, temos: $\overline{TQ} = \text{sen}b.\cos a$ (10)

Observando o círculo trigonométrico da figura 41, notamos que:
$\overline{NQ} = \overline{NT} + \overline{TQ}$ e também $\overline{NT} = \overline{VS}$ . Logo,

$\overline{NQ} = \overline{VS} + \overline{TQ}$

Substituindo as relações (6) , (9) e (10) na igualdade acima, obteremos:

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a.\cos b + \text{sen}\, b.\cos a$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

## 5.2 Proposta 7: Uma demonstração do cosseno da diferença de arcos e do seno da diferença de arcos

Sejam os arcos $AQ$ com determinação $a$, $PQ$ com determinação $b$. O arco $AP$ possui determinação $(a-b)$.

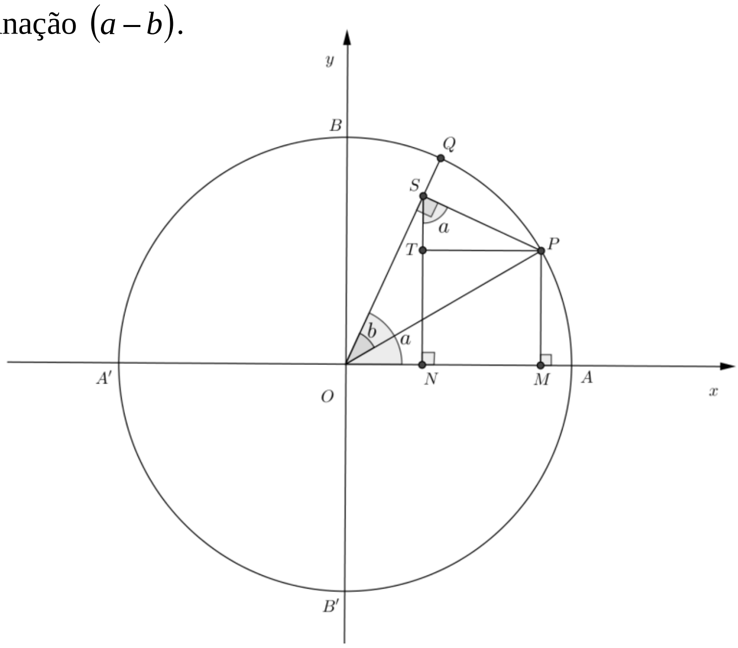


Figura 42: Uma demonstração do cosseno e do seno da diferença de arcos

Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico de raio unitário acima, podemos construir algumas relações:

$\cos b = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OS} = \overline{OP}.\cos b$ , mas como $\overline{OP} = 1$ , temos: $\overline{OS} = \cos b$ (1)

$\text{sen} b = \dfrac{\overline{SP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{SP} = \overline{OP}.\text{sen} b$ , mas como $\overline{OP} = 1$ , temos: $\overline{SP} = \text{sen} b$ (2)

$\text{sen}\,(a-b) = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{OP}.\text{sen}\,(a-b)$ , mas como $\overline{OP} = 1$ , temos: $\overline{MP} = \text{sen}\,(a-b)$ (3)

$\cos(a-b) = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OP}.\cos(a-b)$ , mas como $\overline{OP} = 1$ , temos: $\overline{OM} = \cos(a-b)$ (4)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Agora que já construímos algumas relações principais, vamos às demonstrações:

I) $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\text{sen}a.\text{sen}b$

- No triângulo $ONS$, temos: $\cos a=\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OS}}\Rightarrow \overline{ON}=\cos a.\overline{OS}$ ,substituindo (1) nessa relação, temos: $\overline{ON}=\cos a.\cos b$ (5)

- No Triângulo $TPS$, temos: $\text{sen}a=\dfrac{\overline{TP}}{\overline{SP}}\Rightarrow \overline{TP}=\text{sen}a.\overline{SP}$ ,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{TP}=\text{sen}a.\text{sen}b$ (6)

Observando o círculo trigonométrico da figura 42, notamos que:
$\overline{ON}=\overline{OM}-\overline{NM}$ e também $\overline{NM}=\overline{TP}$. Logo,

$\overline{ON}=\overline{OM}-\overline{TP}$

Substituindo as relações (4) , (5) e (6) na igualdade acima, obteremos:

$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\text{sen}a.\text{sen}b$

II) $\text{sen}\left(a-b\right)=\text{sen}a.\cos b-\text{sen}b.\cos a$

- No triângulo $ONS$, temos: $\text{sen}a=\dfrac{\overline{NS}}{\overline{OS}}\Rightarrow \overline{NS}=\text{sen}a.\overline{OS}$ ,substituindo (1) nessa relação, temos: $\overline{NS}=\text{sen}a.\cos b$ (7)

- No Triângulo $TPS$, temos: $\cos a=\dfrac{\overline{TS}}{\overline{SP}}\Rightarrow \overline{TS}=\overline{SP}.\cos a$ ,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{TS}=\text{sen}b.\cos a$ (8)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Observando o círculo trigonométrico da figura 42, notamos que:

$\overline{NT} = \overline{NS} - \overline{TS}$ e também $\overline{NT} = \overline{MP}$ . Logo,

$\overline{MP} = \overline{NS} - \overline{TS}$

Substituindo as relações (3) , (7) e (8) na igualdade acima, obteremos:

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a . \cos b - \operatorname{sen} b . \cos a$

## 5.3 Proposta 8: Outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

Conhecida a fórmula da distância entre dois pontos, vamos deduzir a fórmula de $\cos(a-b)$**:**

Marcamos no círculo trigonométrico os arcos:

$AP$ de determinação $a$

$AQ$ de determinação $b$

$AR$ de determinação $a-b$

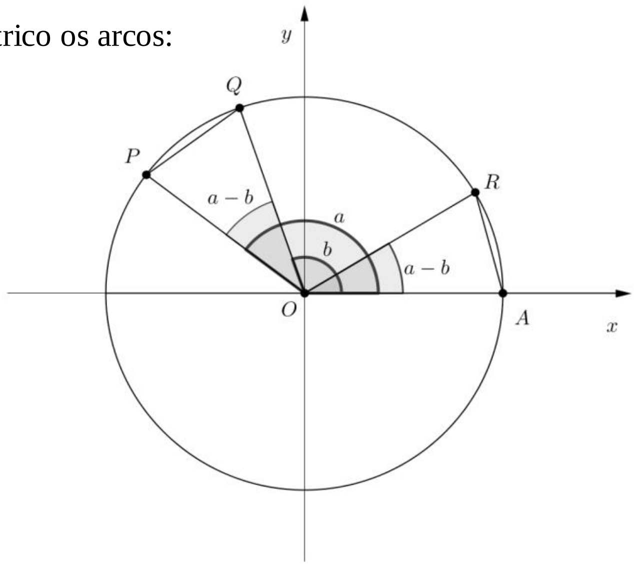


Figura 43: Outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

Percebe-se que as coordenadas de $A$ são $(1{,}0)$ , as de $P$ são $(\cos a, \operatorname{sen} a)$ , as de $Q$ são $(\cos b, \operatorname{sen} b)$ e as de $R$ são $[\cos(a-b), \operatorname{sen}(a-b)]$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Percebe-se ainda que $\overline{AR}$ tem medida $a-b$ e que $\overline{QP}$ tem essa mesma medida $a-b$. Por isso a distância entre $A$ e $R$ é igual à distância entre $P$ e $Q$.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\overline{AR} = \sqrt{[\cos(a-b)-1]^2 + [\text{sen}(a-b)-0]^2}$$

$$\overline{AR} = \sqrt{\cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + \text{sen}^2(a-b)}$$

Pela relação trigonométrica fundamental sabemos que:

$$\text{sen}^2(a-b) + \cos^2(a-b) = 1$$

Então:

$$\overline{AR} = \sqrt{2 - 2\cos(a-b)}\ .$$

A distância entre os pontos $P$ e $Q$ é:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (\text{sen}b - \text{sen}a)^2}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\cos^2 b - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 a + \text{sen}^2 b - 2\text{sen}a \cdot \text{sen}b + \text{sen}^2 a}$$

Como $\cos^2 a + \text{sen}^2 a = 1$ e $\cos^2 b + \text{sen}^2 b = 1$ , temos:

$$\overline{PQ} = \sqrt{2 - 2\cos a \cdot \cos b - 2\text{sen}a \cdot \text{sen}b}\ .$$

Vemos que as distâncias $\overline{AR}$ e $\overline{PQ}$ são iguais. Logo:

$$\sqrt{2 - 2\cos(a-b)} = \sqrt{2 - 2\cos a \cdot \cos b - 2\,\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Elevando ao quadrado:

$$2-2\cos(a-b)=2-2\cos a\cdot\cos b-2\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

$$-2\cos(a-b)=-2\cos a\cdot\cos b-2\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

$$2\cos(a-b)=2\cos a\cdot\cos b+2\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

Então a fórmula da diferença de arcos é:

$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

### 5.4 Proposta 9: Mais outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

Conhecida a fórmula da distância entre dois pontos e a Lei dos Cossenos, vamos deduzir uma fórmula para $\cos(a-b)$:

Marcamos no círculo trigonométrico os arcos $AP > AQ$.

$AP$ de determinação $a$

$AQ$ de determinação $b$

$PQ$ de determinação $a-b$

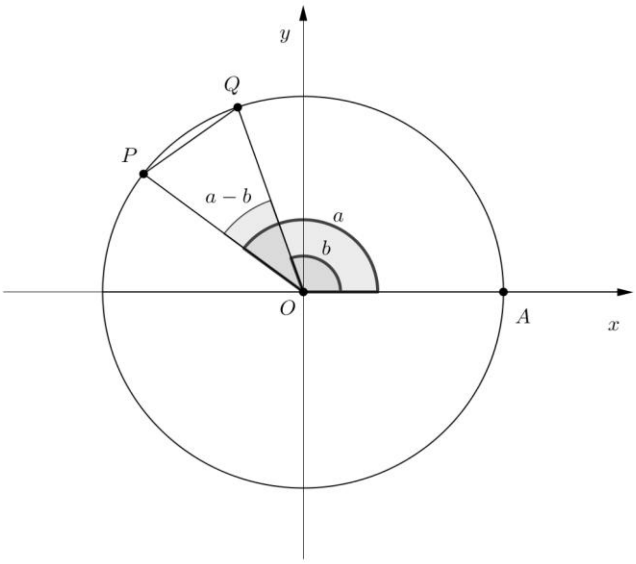


Figura 44: Mais outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Assim, na figura acima, poderemos escrever, pela Lei dos Cossenos, para o triângulo $OPQ$:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2.\overline{OP}.\overline{OQ}.\cos(a-b) \quad (1)$$

Ora, $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$ (raio do círculo trigonométrico, portanto, unitário). (2)

$\overline{PQ}$ = distância entre os pontos $P(\cos a, \text{sen} a)$ e $Q = (\cos b, \text{sen} b)$.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\overline{PQ}^2 = (\cos^2 a - \cos^2 b) + (\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b) \quad (3)$$

Assim, substituindo os elementos conhecidos (2) e (3) na fórmula acima (1), vem:

$$(\cos^2 a - \cos^2 b) + (\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b) = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos(a-b)$$

Desenvolvendo, temos:

$$\cos^2 a - 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a - 2.\text{sen} a.\text{sen} b + \text{sen}^2 b = 2 - 2.\cos(a-b)$$

Lembrando que $\cos^2 a + \text{sen}^2 a = \cos^2 b + \text{sen}^2 b = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria), vem, substituindo:

$$1 + 1 - 2.\cos a.\cos b - 2.\text{sen} a.\text{sen} b = 2 - 2.\cos(a-b)$$

Simplificando, fica:

$$-2(\cos a.\cos b + \text{sen} a.\text{sen} b) = -2.\cos(a-b)$$

Donde finalmente podemos escrever a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos a e b:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen} a \cdot \text{sen} b$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

## 5.5 Proposta 10: Outra demonstração do cosseno da soma de arcos:

Esta demonstração será dividida em duas partes. Na primeira, demonstraremos o cosseno da soma de arcos para números positivos e na segunda, para números negativos. Assim, a demonstração será válida para quaisquer números reais.

1ª parte: Sejam $P$, $Q$ e $R$ os pontos do círculo associados aos ângulos $a$, $a+b$ e $-b$, respectivamente.
Em relação ao sistema cartesiano $xOy$ as coordenadas desses pontos são:

$$P=(\cos a, \operatorname{sen} a)$$
$$Q=(\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$$
$$R=(\cos b, -\operatorname{sen} b)$$

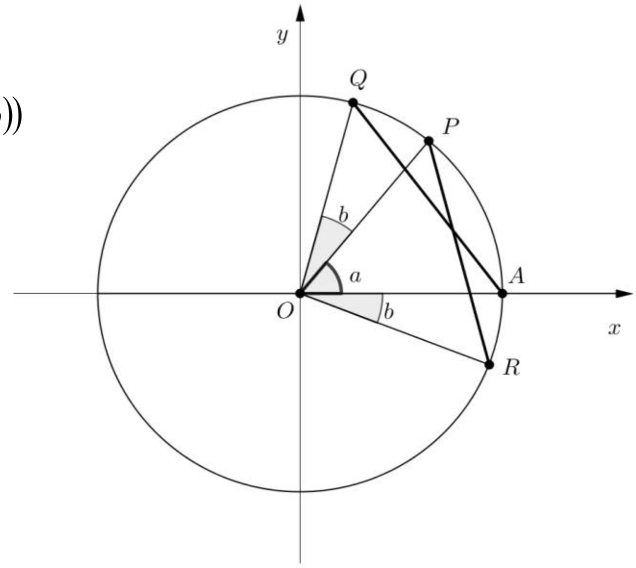


Figura 45: Outra demonstração do cosseno da soma de arcos

Os arcos $AQ$ e $RP$ tem a mesma medida $(a+b)$, portanto, os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{RP}$ têm o mesmo comprimento. Aplicando então a fórmula de distância entre dois pontos da Geometria Analítica, temos:

$$d\overline{AQ}^2=(x_Q-x_A)^2+(y_Q-y_A)^2=$$
$$=[\cos(a+b)-1]^2+[\operatorname{sen}(a+b)-0]^2=$$
$$=\cos^2(a+b)-2.\cos(a+b)+1+\operatorname{sen}^2(a+b)=$$
$$=2-2.\cos(a+b)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

$$d\overline{RP}^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 =$$
$$= [\cos a - \cos b]^2 + [\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b]^2 =$$
$$= \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b$$
$$= 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

$$d\overline{AQ}^2 = d\overline{RP}^2 \Rightarrow 2 - 2.\cos(a+b) = 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

E, então vem a fórmula:

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

2ª parte: Sejam P, Q e R os pontos do círculo associados aos ângulos $-a$, $-a-b$ e $b$, respectivamente.

Em relação ao sistema cartesiano $xOy$ as coordenadas desses pontos são:

$$P = (\cos(-a), \operatorname{sen}(-a)) \Rightarrow P = (\cos a, -\operatorname{sen} a)$$

$$Q = (\cos(-a-b), \operatorname{sen}(-a-b)) \Rightarrow Q = (\cos[-(a+b)], \operatorname{sen}[-(a+b)])$$

$$Q = (\cos(a+b), -\operatorname{sen}(a+b))$$

$$R = (\cos b, \operatorname{sen} b)$$

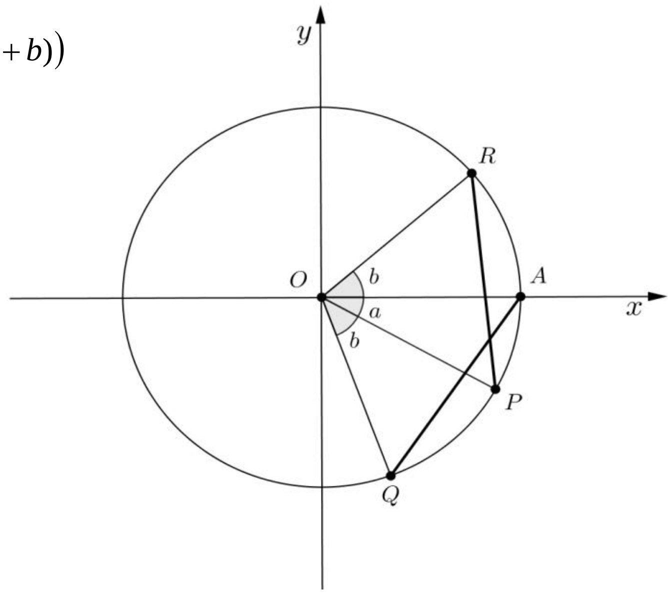


Figura 46: Outra demonstração do cosseno da soma de arcos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA

Os arcos $AQ$ e $RP$ tem a mesma medida $(a+b)$, portanto, os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{RP}$ têm o mesmo comprimento. Aplicando então a fórmula de distância entre dois pontos da Geometria Analítica, temos:

$$
\begin{aligned}
d\overline{AQ}^2 &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 = \\
&= [\cos(a+b) - 1]^2 + [-\operatorname{sen}(a+b) - 0]^2 = \\
&= \cos^2(a+b) - 2.\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b) = \\
&= 2 - 2.\cos(a+b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\overline{RP}^2 &= (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 = \\
&= [\cos a - \cos b]^2 + [-\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b]^2 = \\
&= \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b \\
&= 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b
\end{aligned}
$$

$$d\overline{AQ}^2 = d\overline{RP}^2 \Rightarrow 2 - 2.\cos(a+b) = 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

e então vem a fórmula:

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

Agora temos uma demonstração do cosseno da soma de arcos válida para quaisquer números reais.

Essa demonstração pode ainda ser melhor verificada caso sejam construídas as figuras no *Geogebra* ®, que é um software gratuito de matemática dinâmica (encontrado no site www.geogebra.im-uff.mat.br , para download) . Poderemos, assim, movimentar os pontos P, Q e R sobre o círculo, situando-os em qualquer quadrante e fazendo variar os ângulos conforme queira. Verificaremos que os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{RP}$ permanecerão com o mesmo comprimento. Logo, utilizaremos a fórmula da distância entre dois pontos onde quer que estejam os pontos P, Q e R no círculo e para qualquer ângulo observado. Concluiremos então que a demonstração é válida para quaisquer números reais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212452/CA