3 Demonstrações das fórmulas da adição de arcos no contexto da trigonometria no triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ estão definidos apenas para ângulos positivos agudos $0º < \alpha < 90º$. Há boas razões para estender ambas as definições a outros valores de ângulos, mas para fazê-las, mesmo para 0º e 90º ou até mesmo para ângulos obtusos, são exigidas definições adicionais, as quais foram apresentadas quando tratamos de seno e cosseno de ângulos obtusos.

Sem extensões apropriadas, as definições só permitem derivar fórmulas sujeitas às limitações de ângulos.

Estamos preocupados aqui, neste contexto, em apresentar as fórmulas, nas quais todos os ângulos envolvidos satisfaçam as limitações básicas inerentes ao triângulo.

Naturalmente, após a extensão das definições, as fórmulas permanecerão verdadeiras para todos os valores dos dois ângulos α e β, mas isto só será possível quando tratarmos de trigonometria no círculo trigonométrico.

Cada professor tem a sua demonstração favorita das importantes fórmulas $\operatorname{sen}(a \pm b)$ e $\cos(a \pm b)$. De qualquer forma, é sabido que deduzida uma delas, as outras podem ser obtidas por complemento, suplemento, etc.

3.1 Proposta 1 - Demonstração do seno da soma de arcos

Uma das mais simples e rápidas que se conhece é uma demonstração que se baseia, em primeiro lugar, na conhecida fórmula: $a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$, onde $a, b, c, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ são os lados e os ângulos respectivos de um triângulo.

Essa fórmula pode ser visualizada facilmente e diz apenas que o lado a é a soma (ou a diferença, se B ou C for obtuso) das projeções ortogonais dos lados b e c sobre o próprio a, como se vê nas figuras.

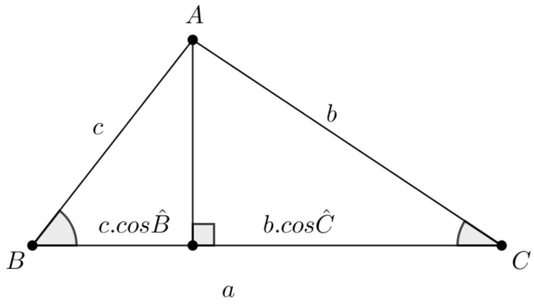

Figura 19: Demonstração do seno da soma de arcos

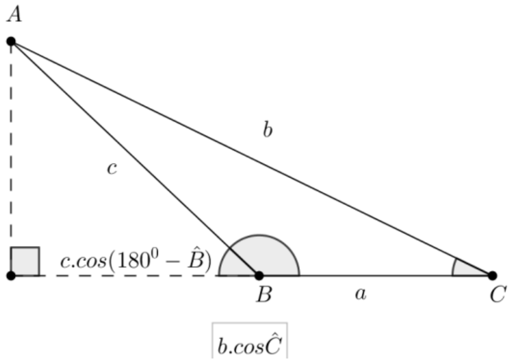

Figura 20: Demonstração do seno da soma de arcos

Na figura 19, temos: $a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$

Na figura 20, temos: $a = b.\cos\hat{C} - c.\cos.\left(180 - \hat{B}\right)$

$$a = b.\cos\hat{C} - c.\left(-\cos\hat{B}\right)$$
$$a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$$

Assim, sempre poderemos escrever : $a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B} \qquad (1)$

Por outro lado, a **Lei dos Senos** em um triângulo (que foi demonstrada anteriormente) afirma que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R \qquad (2)$$

Onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC
Segue-se de (2) que, num triângulo de diâmetro 1, ou seja, 2R=1, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 1$$

$$\Rightarrow a = \operatorname{sen}\hat{A} \quad , \quad b = \operatorname{sen}\hat{B} \quad , \quad c = \operatorname{sen}\hat{C}$$

Então, para um triângulo inscrito nesse círculo, a fórmula (1) se lê:

$$a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$$
$$\text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,\hat{B}.\cos\hat{C} + \text{sen}\,\hat{C}.\cos\hat{B}$$

E como, finalmente, o ângulo $\hat{A}$ é o suplemento de $\hat{B}+\hat{C}$, ou seja, tem o mesmo seno, obtém-se a célebre fórmula:

$$\text{sen}\left(\hat{B}+\hat{C}\right) = \text{sen}\,\hat{B}.\cos\hat{C} + \text{sen}\,\hat{C}.\cos\hat{B}$$

Vale ressaltar que essa dedução é válida para $\hat{B}+\hat{C}$ < 180º. Isto é sempre verdade, pois $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180º$.

3.2 Proposta 2: Outra demonstração do seno da soma de arcos

Como em qualquer triângulo a área é igual ao semiproduto de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles, temos as seguintes relações para os três triângulos da figura abaixo:

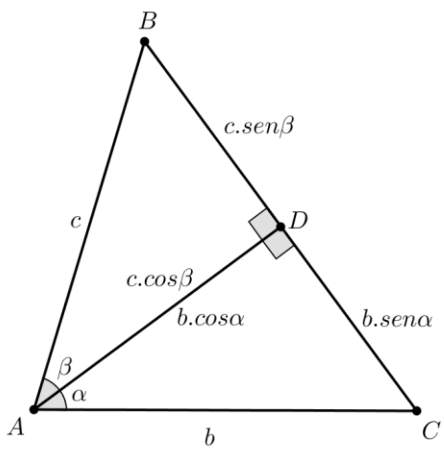

Figura 21: Outra demonstração do seno da soma de arcos

No triângulo ABC: $Área_{ABC} = \frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\,(\alpha + \beta)$

No triângulo ABD: $Área_{ABD} = \frac{1}{2}.c.b.\cos\alpha.\text{sen}\beta$

No triângulo ACD: $Área_{ACD} = \frac{1}{2}.b.c\cos\beta.\text{sen}\alpha$

E como $Área_{ABC} = Área_{ABD} + Área_{ACD}$, temos:

$$\frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}.c.b.\cos\alpha.\text{sen}\beta + \frac{1}{2}.b.c\cos\beta.\text{sen}\alpha$$

Simplificando, temos:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\,\text{sen}\beta + \cos\beta.\,\text{sen}\alpha$$

Ou ainda:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha$$

Vale ressaltar que esta demonstração supõe como limitação: $0º < \alpha + \beta < 180º$

3.3 Proposta 3: Uma demonstração do seno da soma e do seno da diferença de arcos

A demonstração a seguir supõe como limitação: $0º < a, b, a-b, a+b < 90º$

a) $\text{sen}\left(a+b\right) = \text{sen}\,a.\cos b + \text{sen}\,b.\cos a$

b) $\text{sen}\left(a-b\right) = \text{sen}\,a.\cos b - \text{sen}\,b.\cos a$

Para demonstrar a primeira parte, considera-se a figura (22) onde:

$\overline{OC} = 1,\ \ \overline{AB} \perp \overline{OC},\quad A\hat{O}C = a$ e $B\hat{O}C = b$.

Temos então, $\overline{OA} = 1/\cos a,\quad \overline{OB} = 1/\cos b,\ \ \overline{CA} = tg\ \ a,\ \ \overline{CB} = tg\ \ b$

Traçando $\overline{AD} \perp \overline{OB},$ temos que $\overline{AD} = \overline{OA}.\operatorname{sen}(a+b).$

Usando novamente que $\overline{OB}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{OC}$, temos:

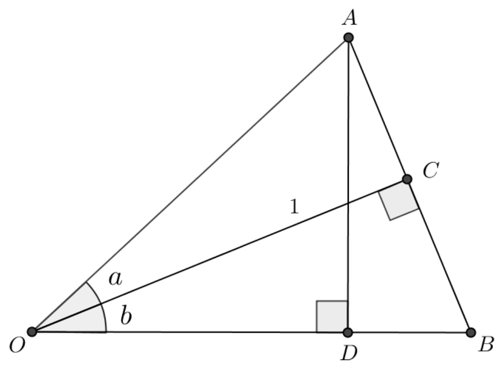

Figura 22: Uma demonstração do seno da soma de arcos

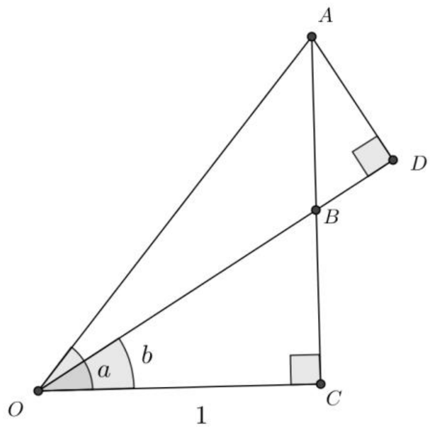

Figura 23: Uma demonstração do seno da diferença de arcos

$$\frac{1}{\cos b}.\frac{1}{\cos a}.\quad \operatorname{sen}(a+b) = (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b).1$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a.\cos b} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \quad \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a.\cos b} = \frac{\operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a}{\cos a.\cos b}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a$$

Ficando provada a primeira parte da proposição. A demonstração da segunda parte é inteiramente análoga, bastando considerar a figura 23.

3.4 Proposta 4: Uma demonstração do seno da diferença de arcos e do cosseno da diferença de arcos

Inicialmente, construímos um triângulo retângulo AEF de hipotenusa igual a 1 inscrito em um retângulo $ABCD$, conforme figura.

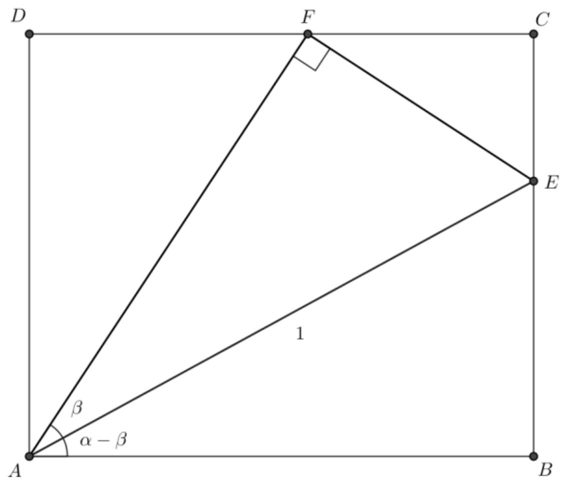

Figura 24: Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos

Sendo os ângulos $E\hat{A}F = \beta$ e $F\hat{A}B = \alpha$, temos:

O ângulo $E\hat{A}B = \alpha - \beta$, então:

$\overline{AF} = \cos\beta$ e $\overline{EF} = \text{sen}\beta$

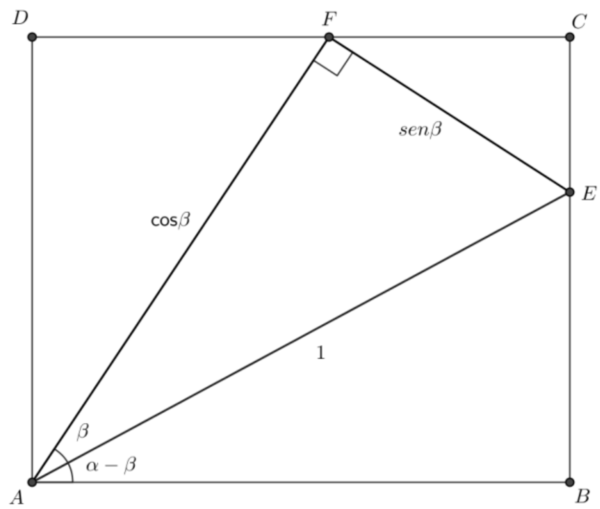

Figura 25: Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos

E ainda, $\overline{AB} = \cos(\alpha - \beta)$ e $\overline{BE} = \text{sen}\,(\alpha - \beta)$

E como o ângulo $C\hat{E}F = \alpha$ e o ângulo $A\hat{F}D = \alpha$, temos:

$\overline{CE} = \text{sen}\beta.\cos\alpha$, $\overline{CF} = \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$, $\overline{FD} = \cos\alpha.\cos\beta$ e $\overline{AD} = \text{sen}\alpha.\cos\beta$

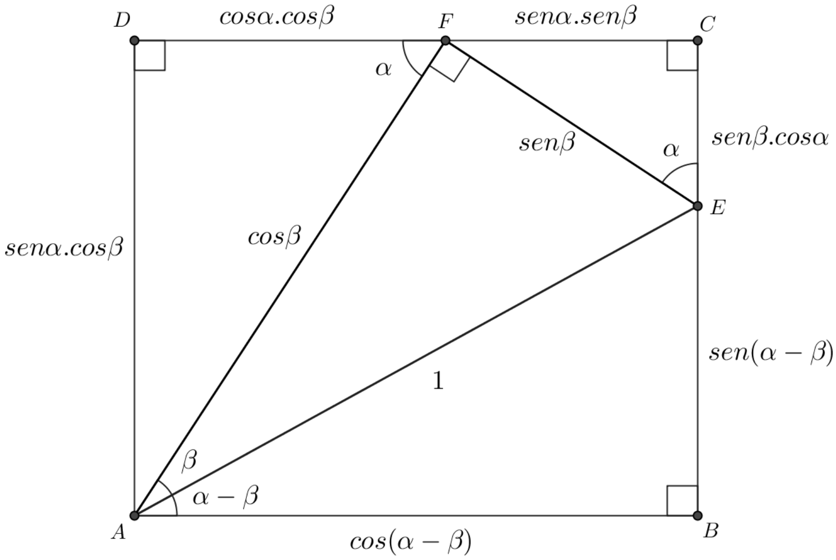

Figura 26: Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos

E como $ABCD$ é um retângulo, as medidas dos lados opostos são iguais. Assim, temos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$$

E

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) + \text{sen}\beta.\cos\alpha = \text{sen}\alpha.\cos\beta$$

Ou ainda:

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta - \text{sen}\beta.\cos\alpha$$

Vale ressaltar que esta demonstração supõe como limitação:

$$0^{\circ} < \alpha, \beta, \alpha - \beta < 90^{\circ}$$

3.5 Proposta 5: Uma demonstração do seno da soma de arcos e do cosseno da soma de arcos

Inicialmente, construímos um triângulo retângulo AEF de hipotenusa igual a 1 inscrito em um retângulo $ABCD$, conforme figura.

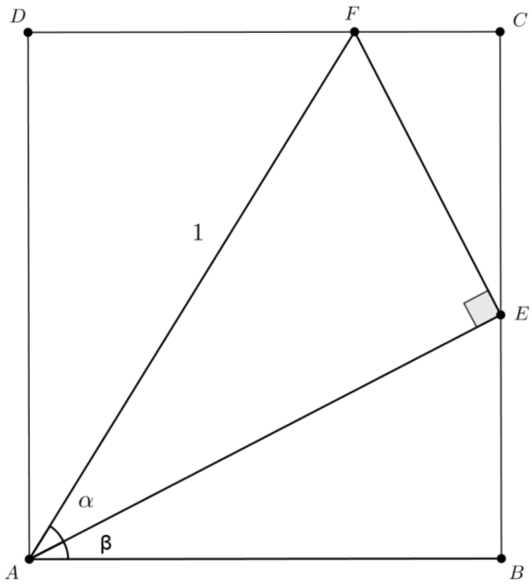

Figura 27: Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos

Sendo os ângulos $E\hat{A}F = \alpha$ e $B\hat{A}E = \beta$, temos:

$\overline{AE} = \cos\alpha$ e $\overline{EF} = \text{sen}\alpha$

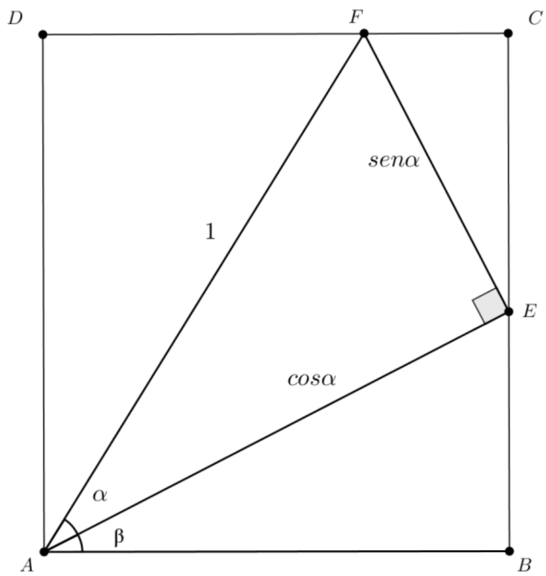

Figura 28: Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos

Além disso, $\overline{AB} = \cos\alpha.\cos\beta$ e $\overline{BE} = \text{sen}\beta.\cos\alpha$

E como o ângulo $C\hat{E}F = \beta$ e o ângulo $A\hat{F}D = \alpha + \beta$, temos:

$\overline{CE} = \text{sen}\alpha.\cos\beta$, $\overline{CF} = \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$, $\overline{FD} = \cos(\alpha + \beta)$ e $\overline{AD} = \text{sen}\,(\alpha + \beta)$

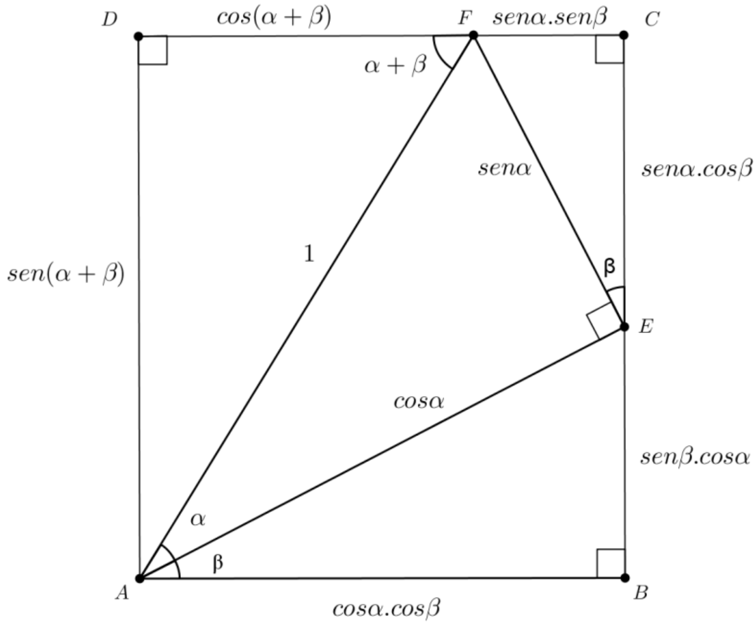

Figura 29: Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos

Como $ABCD$ é um retângulo, as medidas dos lados opostos são iguais. Assim, temos:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha$$

E

$$\cos(\alpha + \beta) + \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta = \cos\alpha.\cos\beta$$

Ou ainda:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$$

Vale ressaltar que, nesta demonstração, as limitações são: $0° < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 90°$