10 Transformação em produto

Em Álgebra Elementar, tem grande importância prática os recursos para transformar um polinômio em produto de outros polinômios (fatoração).
Assim por exemplo, temos:

$x^2 - 2x = x(x-2)$	fator comum em evidência
$x^2 - a = (x+2)(x-2)$	diferença de quadrados
$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$	trinômios quadrados perfeitos
$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$	soma de cubos
$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$	diferença de cubos
$x3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$	polinômios cubos perfeitos

Muitas vezes aplicaremos esses recursos à Trigonometria, recorrendo a transformações como:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2.\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 2)$$
$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

Além dos recursos algébricos, a Trigonometria dispõe de fórmulas que permitem completar uma fatoração.

Assim , no exemplo acima, podemos fatorar:

$\operatorname{sen} x + \cos x$ e $\operatorname{sen} x - \cos x$.

Vamos deduzir agora as fórmulas para transformar somas e diferenças trigonométricas em produtos.

Sabemos que:

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b \quad (1)$$
$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b \quad (2)$$
$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a.\cos b+\operatorname{sen} b.\cos a \quad (3)$$
$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a.\cos b-\operatorname{sen} b.\cos a \quad (4)$$

Logo:

(1) + (2): $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2.\cos a.\cos b$

(1) - (2): $\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$

(3) + (4): $\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2.\operatorname{sen} a.\cos b$

(3) - (4): $\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2.\operatorname{sen} b.\cos a$

Estas relações são denominadas fórmulas de Werner.

Fazendo nas fórmulas de Werner:

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \quad \text{portanto, } a=\frac{p+q}{2} \text{ e } b=\frac{p-q}{2}$$

Obtemos as fórmulas de transformação em produto:

$$\cos p+\cos q=2.\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2.\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}.\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q=2.\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q=2.\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

Temos ainda que:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p.\cos q + \operatorname{sen} q.\cos p}{\cos p.\cos q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p.\cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p.\cos q - \operatorname{sen} q.\cos p}{\cos p.\cos q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p.\cos q}$$