



**Humberto Gullo de Barros**

## **Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira



**Humberto Gullo de Barros**

## **Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de arcos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira**  
Orientador  
Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Débora Freire Mondaini**  
Departamento de Matemática -PUC-Rio

**Prof. Dirce Uesu Pesco**  
Departamento de Matemática – UFF

**Prof. José Eugênio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de abril de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor, e do orientador.

### **Humberto Gullo de Barros**

Licenciou-se em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Foi professor da Secretaria Estadual de Educação e da rede particular de ensino. É Professor da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro. Leciona cálculo diferencial e integral no curso de engenharia e métodos quantitativos no curso de administração do Centro Universitário Augusto Motta (UNISUAM).

#### Ficha Catalográfica

Barros, Humberto Gullo de

Trigonometria : fórmulas de adição de arcos / Humberto Gullo de Barros ; orientador: Carlos Frederico Borges Palmeira. – 2014.  
73 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Trigonometria. 3. Adição de arcos. 4. Demonstrações. 5. Círculo trigonométrico. 6. Fórmulas. 7. Função de Euler. I. Palmeira, Carlos Frederico Borges. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

Aos meus filhos Matheus e Arthur, fontes de força e inspiração, requisitos que foram fundamentais para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

## Agradecimentos

Aos professores do Profmat – PUC-RIO, por me emprestarem com simplicidade um pouco de suas experiências de vida, as quais muito contribuíram para a consolidação deste trabalho. E, em especial, ao meu orientador Dr Sc Carlos Frederico Borges Palmeira.

Aos meus amigos de turma, por estarmos sempre unidos por uma grande amizade, apesar das dificuldades de percurso e, assim, contribuindo para o enriquecimento intelectual da equipe.

À Capes, ao Profmat e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

## Resumo

Barros, Humberto Gullo de; Palmeira, Carlos Frederico Borges. **Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos**. Rio de Janeiro, 2014. 73p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Trata-se de uma proposta que visa orientar o professor de Matemática do Ensino Médio em relação às dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Trigonometria. Mais especificamente, para facilitar, com demonstrações alternativas, o desenvolvimento das fórmulas de adição de arcos. Para o desenvolvimento desse trabalho, optou-se pela metodologia da pesquisa documental, na qual se buscou os subsídios para o desenvolvimento da proposta.

## Palavras-chave

Trigonometria; Seno; Cosseno; Adição de arcos.

## Abstract

Barros, Humberto Gullo de; Palmeira, Carlos Frederico Borges (Advisor). **Trigonometry: Angle Addition Formulas**. Rio de Janeiro, 2014. 73p. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

It is a proposal which aims to guide Mathematics High School teachers to cope with the difficulties faced in the teaching-learning process of trigonometry. More specifically, it will facilitate the development of arc addition formulas by the use of alternative statements. In order to improve this work, it was chosen the documentary research methodology, where the subsidies for the development of this proposal were searched.

## Keywords

Trigonometry; Sine; Cossine; Adding Arcs.

## Sumário

1	Introdução	13
2	A trigonometria no triângulo retângulo	16
2.1	Conceitos e pré-requisitos	16
2.1.1	Definição de seno e cosseno de um ângulo agudo	16
2.1.2	Definição de seno e cosseno de ângulos reto e obtuso	18
2.1.3	Relação fundamental	19
2.1.4	Lei dos cossenos	20
2.1.5	Lei dos senos	21
2.1.6	Área de um triângulo em função de dois lados e o ângulo formado por eles	26
3	Demonstrações das fórmulas da adição de arcos no contexto da trigonometria no triângulo retângulo	28
3.1	Proposta 1: Demonstração do seno da soma de arcos	28
3.2	Proposta 2: Outra demonstração do seno da soma de arcos	30
3.3	Proposta 3: Uma demonstração do seno da soma e do seno da diferença de arcos	31
3.4	Proposta 4: Uma demonstração do seno da diferença de arcos e do cosseno da diferença de arcos	33
3.5	Proposta 5: Uma demonstração do seno da soma de arcos e do cosseno da soma de arcos	35
4	Trigonometria no círculo trigonométrico	37
4.1	Conceitos e pré-requisitos	37
4.1.1	A função de Euler	37
4.1.2	Interpretações geométricas	41

4.1.2.1	Relação fundamental: $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$	41
4.1.2.2	Seno e cosseno	41
4.1.2.3	Tangente e cotangente	42
4.1.2.4	Secante e cossecante	42
4.1.3	Corolário	43
4.1.4	Simetrias no círculo trigonométrico	44
4.1.4.1	Redução ao 1º quadrante	44
4.1.4.2	Redução do 2º ao 1º quadrante	44
4.1.4.3	Redução do 3º ao 1º quadrante	45
4.1.4.4	Redução do 4º ao 1º quadrante	47
4.1.5	Fórmula da distância entre dois pontos	48
5	Demonstrações das fórmulas da adição de arcos no contexto da trigonometria no círculo trigonométrico	49
5.1	Proposta 6: Uma demonstração do cosseno da soma de arcos e do seno da soma de arcos	49
5.2	Proposta 7: Uma demonstração do cosseno da diferença de arcos e do seno da diferença de arcos	52
5.3	Proposta 8: Outra demonstração do cosseno da diferença de arcos	54
5.4	Proposta 9: Mais outra demonstração do cosseno da diferença de arcos	56
5.5	Proposta 10: Outra demonstração do cosseno da soma de arcos	58
6	Generalização das fórmulas	61
6.1	“Cosseno da diferença”	61
6.2	“Seno da soma”.	61
6.3	“Seno da diferença”	62
6.4	“Tangente da soma”	62
6.5	“Tangente da diferença”	62

7	Fórmulas de multiplicação	63
7.1	$\text{Cos}(2a)$	63
7.2	$\text{Sen}(2a)$	63
7.3	$\text{Tg}(2a)$	63
7.4	$\text{Cos}(3a)$	64
7.5	$\text{Sen}(3a)$	64
7.6	$\text{Tg}(3a)$	64
8	Fórmulas de divisão	66
9	Tangente do arco metade	67
10	Transformação em produto	68
11	Conclusão	71
12	Referências bibliográficas	72

## Lista de figuras

Figura 1	Seno e cosseno no círculo trigonométrico	14
Figura 2	Seno e cosseno de um ângulo agudo	16
Figura 3	Seno e cosseno de um ângulo agudo	17
Figura 4	Seno e cosseno do complemento de um ângulo	17
Figura 5	Seno e cosseno de um ângulo agudo	18
Figura 6	Seno e cosseno de um ângulo obtuso	18
Figura 7	Relação fundamental	19
Figura 8	Catetos em função do seno ou cosseno e da hipotenusa	19
Figura 9	Lei dos cossenos - triângulo acutângulo	20
Figura 10	Lei dos cossenos - triângulo obtusângulo	20
Figura 11	Lei dos senos- triângulo acutângulo	22
Figura 12	Lei dos senos- triângulo acutângulo	23
Figura 13	Lei dos senos- triângulo obtusângulo	23
Figura 14	Lei dos senos- triângulo obtusângulo	24
Figura 15	Lei dos senos	24
Figura 16	Lei dos senos	25
Figura 17	Área de um triângulo acutângulo	27
Figura 18	Área de um triângulo obtusângulo	27
Figura 19	Demonstração do seno da soma de arcos	29
Figura 20	Demonstração do seno da soma de arcos	29
Figura 21	Outra demonstração do seno da soma de arcos	30
Figura 22	Uma demonstração do seno da soma de arcos	32
Figura 23	Uma demonstração do seno da diferença de	32
Figura 24	Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos	33
Figura 25	Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos	33

Figura 26	Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos	33
Figura 27	Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos	35
Figura 28	Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos	35
Figura 29	Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos	36
Figura 30	Círculo trigonométrico	38
Figura 31	A função de Euler	39
Figura 32	Relação fundamental	41
Figura 33	Seno e cosseno	41
Figura 34	Tangente e cotangente	42
Figura 35	Secante e cossecante	42
Figura 36	Simetrias no círculo trigonométrico	44
Figura 37	Redução do 2° ao 1° quadrante	44
Figura 38	Redução do 3° ao 1° quadrante	46
Figura 39	Redução do 4° ao 1° quadrante	47
Figura 40	Fórmula da distância entre dois pontos	48
Figura 41	Uma demonstração do cosseno e do seno da soma de arcos	49
Figura 42	Uma demonstração do cosseno e do seno da diferença de arcos	52
Figura 43	Outra demonstração do cosseno da diferença de arcos	54
Figura 44	figura 44: Mais outra demonstração do cosseno da diferença de arcos	56
Figura 45	Outra demonstração do cosseno da soma de arcos	58
Figura 46	Outra demonstração do cosseno da soma de arcos	59