7. O teorema de Hurwitz-Markov

7.1 O enunciado do teorema

$\forall\alpha \in R\backslash Q, \forall n \geq 1, \exists k \in \{n-1, n, n+1\}$, tal que $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}{q_k}^2}$.

Em particular, $\forall\alpha \in R\backslash Q$ existem infinitos $\frac{p}{q} \in Q \quad (p, q \in Z, q > 0)$ com $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$

Por outro lado, $\forall c > \sqrt{5}$, a desigualdade $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}$, tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q}$.

Vamos traduzir o teorema da seguinte maneira:

"Para todo número irracional α, existirá pelo menos uma, dentre três aproximações consecutivas de α, feitas por frações contínuas, cujo o erro será menor que o inverso do produto de $\sqrt{5}$ pelo respectivo denominador da aproximação ao quadrado".

"Em particular, para todo irracional α, existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$ que são aproximações de α, com um erro menor que o inverso do produto de $\sqrt{5}$ pelo denominador ao quadrado dessas aproximações"

"Por outro lado, existirá somente um número finito de aproximações racionais $\frac{p}{q}$ do número de ouro, com erros menores que o inverso do produto de c pelo quadrado do denominador dessas frações, quando c for maior do que $\sqrt{5}$."

7.2 A prova do teorema 7.1

Queremos provar que para algum k, que pode ser n-1, n ou n+1, essa aproximação de α, $\frac{p_k}{q_k}$, é muito boa, no sentido que o erro é menor que $\frac{1}{\sqrt{5}{q_k}^2}$.

Supondo α = $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, temos $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})q_k} = \frac{1}{(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}){q_k}^2}$

, onde $\beta_{k+1} = \frac{q_{k-1}}{q_k} = [0, a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1]$. Observe que $q_k > q_{k-1}$

De fato,

$$\beta_{2=}\frac{q_0}{q_1}=\frac{1}{a_1}=[0;a_1] \quad e\ por\ indução \quad \beta_{k+2}=\frac{q_k}{q_{k+1}}=\frac{q_k}{a_{k+1}q_k+q_{k-1}}=\frac{1}{a_{k+1}+\frac{q_{k-1}}{q_k}}$$

$$=\frac{1}{a_{k+1}+\beta_{k+1}}=\frac{1}{[a_{k+1};a_k,a_{k-1},\dots a_1]}=[0;a_{k+1},a_k,a_{k-1},\dots a_1]$$

$e\ \alpha_{k+1}=[a_{k+1};a_{k+2},a_{k+3},\dots]$

Queremos provar que vale pelo menos uma das seguintes desigualdades, obtidas quando k = n -1, k =n e k = n+1

- $\alpha_n+\beta_n>\sqrt{5}$
- $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}>\sqrt{5}$
- $\alpha_{n+2}+\beta_{n+2}>\sqrt{5}$

Supondo que as três são falsas, queremos chegar a um absurdo,ou seja:

- $\alpha_n+\beta_n\leq\sqrt{5}$
- $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}\leq\sqrt{5}$
- $\alpha_{n+2}+\beta_{n+2}\leq\sqrt{5}$

Supondo $\alpha_n+\beta_n\leq\sqrt{5}$ e como $\sqrt{5}<3$, devemos ter $a_n\leq\alpha_n<3$, pois a_n é a parte inteira de α_n, o que implica $a_n\leq 2$ (a_n é inteiro) e, analogamente, $a_{n+1}\leq 2$ e $a_{n+2}\leq 2$.

$$\sqrt{5}\geq\alpha_n+\beta_n\geq\alpha_n=a_n+\frac{1}{a_{n+1}+\frac{1}{\dots}}$$

Como $a_{n+1}\leq 2$, se $a_n=2$, teríamos $\sqrt{5}\geq\alpha_n=2+\frac{1}{a_{n+1}+\frac{1}{\dots}}>2+\frac{1}{3}>\sqrt{5}$, que é um absurdo! Então, $a_n=1$ e analogamente, devemos ter a_{n+1}= 1.

Além disso, $\sqrt{5}\geq\alpha_{n+2}+\beta_{n+2}\geq a_{n+2}+\frac{1}{a_{n+1}+\beta_{n+1}}$. Se $a_{n+2}=2$, teríamos $\sqrt{5}\geq 2+\frac{1}{a_{n+1}+\beta_{n+1}}>2+\frac{1}{3}>\sqrt{5}$, que é um absurdo. Logo, a_{n+2}=1.

Escreveremos agora α_n, α_{n+2}, β_n e β_{n+2}, todos em função de α_{n+1} e β_{n+1}. Assim, temos:

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{a_n + \beta_n} = \frac{1}{1+\beta_n} \Longrightarrow \beta_n = \frac{1}{\beta_{n+1}} - 1$$

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} = \frac{1}{1+\beta_{n+1}}$$

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+2}} \Longrightarrow \alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}$$

Voltando à nossa hipótese, temos: $\alpha_n + \beta_n \le \sqrt{5} \iff 1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \le \sqrt{5}$.

Como $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \le \sqrt{5}$, $\alpha_{n+1} \le \sqrt{5} - \beta_{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{5}-\beta_{n+1}} \Longrightarrow \sqrt{5} \ge \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{5}-\beta_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}}{\beta_{n+1}(\sqrt{5}-\beta_{n+1})}$ e assim concluímos que $\beta_{n+1}(\sqrt{5} - \beta_{n+1}) \ge 1 \iff -\beta_{n+1}{}^2 + \sqrt{5}\beta_{n+1} - 1 \ge 0$ (I)

Por outro lado, $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \le \sqrt{5} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}-1} + \frac{1}{1+\beta_{n+1}} \le \sqrt{5}$.

Sabemos também que $\alpha_{n+1} \le \sqrt{5} - \beta_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}-1} \ge \frac{1}{\sqrt{5}-1-\beta_{n+1}} \Longrightarrow \sqrt{5} \ge \frac{1}{\alpha_{n+1}-1} + \frac{1}{1+\beta_{n+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{5}-1-\beta_{n+1}} + \frac{1}{1+\beta_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1-\beta_{n+1})(1+\beta_{n+1})} \Longrightarrow \left(\sqrt{5} - 1 - \beta_{n+1}\right)(1 + \beta_{n+1}) \ge 1 \iff -\beta_{n+1}{}^2 + \left(\sqrt{5} - 2\right)\beta_{n+1} + (\sqrt{5} - 2) \ge 0$ (II)

Resolvendo as inequações (I) e (II) veremos que o maior ponto do intervalo de uma, que é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,coincide com o menor ponto do intervalo da outra. Ou seja, acharemos que $\beta_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, que é um absurdo, pois $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in Q$. Mostramos assim, que uma dessas três aproximações $\frac{p_k}{q_k}$ vai ter erro menor que $\frac{1}{\sqrt{5}q_k{}^2}$.

Mostraremos agora que a constante c $=\sqrt{5}\cdot$, para a razão áurea, é a melhor constante possível.

Sabemos da proposição 6.5.2 que se tivermos infinitas frações $\frac{p}{q}$ tais que $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, então podemos obter estas frações através das frações contínuas.

Basta, então, vermos quais são os erros de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pelas as aproximações que vêm da fração contínua. Vejamos:

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}){q_n}^2}<\frac{1}{c{q_n}^2}\Leftrightarrow \alpha_{n+1}+\beta_{n+1}>c>\sqrt{5}$$

Mas, $\alpha_{n+1}=[a_{n+1};a_{n+2},\dots,]=[1;1,1,1,\dots]=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta_{n+1}=\frac{q_{n-1}}{q_n}=[0;a_n,a_{n-1},\dots,a_1]=[0;1,1,1,\dots,1]$, repetindo o número 1, n vezes.Então,

$$\left|\beta_{n+1}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|<\frac{1}{{q_n}^2}\leq\frac{1}{n^2}$$

(Note que $q_n\geq n$, q_n está crescendo e q_1 é pelo menos 1, $q_2>q_1, q_3>q_2, \dots$),o que implica$\beta_{n+1}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{1}{n^2}$

Assim, temos: $c<\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\beta_{n+1}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{1}{n^2}=$

$$\sqrt{5}+\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{n^2}>c-\sqrt{5}>0\ \Rightarrow n^2<(c-\sqrt{5})^{-1}$$

O que limita n, evidenciando que só temos um número finito de soluções, ou seja, as aproximações da razão áurea têm de vir das frações contínuas,$\frac{p_n}{q_n}$, com $n^2<(c-\sqrt{5})^{-1}$.

O Teorema de Hurwitz-Markov traduz, portanto, o que acontece em termos de aproximações racionais para os números reais.

7.3 Uma visão geométrica do Teorema de Hurwitz-Markov

Existe uma fórmula surpreendente para indicar a qualidade de uma convergente.

Teorema 7.3.1

Seja, $\frac{p_n}{q_n}$ a n-ésima convergente (irredutível) para o número real $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$

Então,

$$q_n{}^2 \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n}$$

onde,

$$\lambda_n = [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots,] + \frac{1}{[a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1]}$$

A prova deste teorema é baseada no lema a seguir:

Lema 7.3.2 : Sejam os pontos A e B de coordenadas $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ no sistema de coordenadas cartesianas de origem O, onde $a_1, a_2, b_1 \; e \; b_2$ são positivos. Então o paralelogramo OACB da figura 9(a) abaixo possui área igual a $a_1 b_2 + b_1 a_2$.

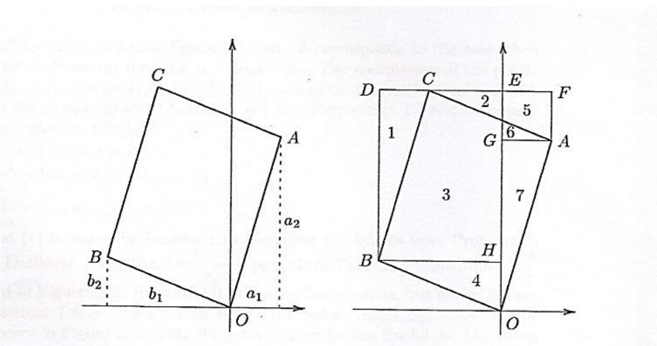

Figura 9 (a) Figura 9 (b) Demonstração do lema 7.3.2

Prova do Lema 7.3.2

Obtemos o pentágono OAFDB, na figura 9(b) dividido em 7 partes. Denotamos por S_i a área de cada região i. Obviamente, EF = GA = a_1, DB = GD = a_2, AF = OH = b_2. É também óbvio, que $S_4=S_2+S_5$ e $S_1=S_7$.

Assim, a área(OACB) = $S_3+S_4+S_6+S_7$ = $S_3+(S_2+S_5)$ + S_6+S_1 = $(S_1+S_2+S_3)$ + (S_5+S_6) = área(HEDB) +área(AFEG) = $b_1a_2 + a_1b_2$

Prova do Teorema 7.3.1

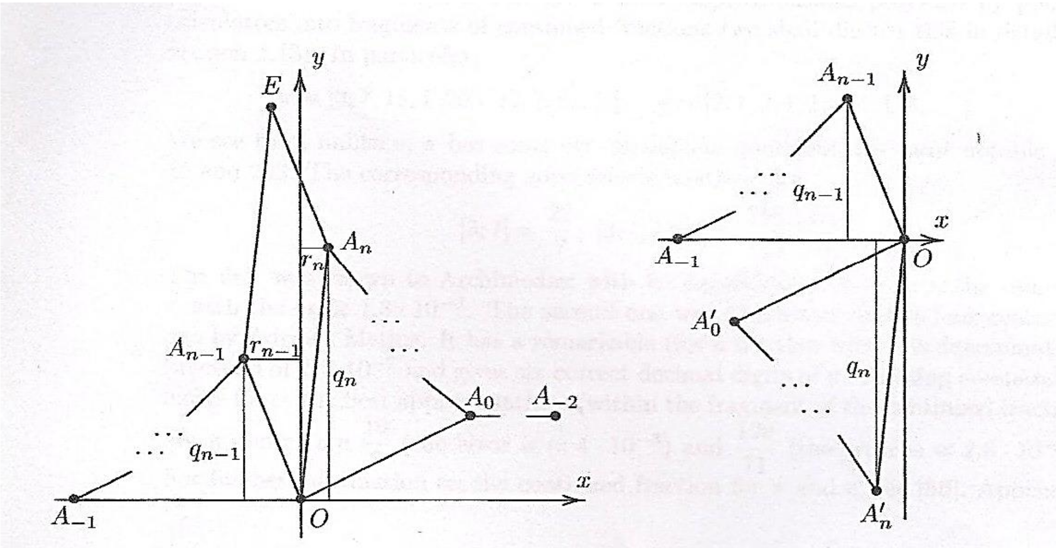

Figura 10 (a) - Teorema 7.3.1 Figura 10 (b) - Teorema 7.3.1

Considere a figura 10 (a) acima que corresponde ao caso em que n é par. Usaremos a notação $r_k = |\alpha q_k - p_k|$. As coordenadas dos pontos $A_{-2}, A_{-1}, A_{n-1}, A_n$, são, respectivamente, $(\alpha, 1), (-1{,}0), (-r_{n-1}, q_{n-1}) e\ (r_n, q_n)$. (Ver proposição 6.5.1)

A área do paralelogramo OA_nEA_{n-1} é 1 (Veja a proposição 5.4.1).

Temos as seguintes relações:

(1) $r_{n-1}q_n + r_nq_{n-1} = 1$ (É afirmada pelo Lema 7.3.2)

(2) $\frac{r_{n-1}}{r_n} = [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots]$ (Decorre do algoritmo de Euclides para $\frac{\alpha}{1}$)

(3) $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$ (Pode parecer menos óbvia, mas também decorre do algoritmo de Euclides).

Para ver isso, reflita os pontos $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$, em relação à origem, como mostra a figura 10 (b) acima. Nós teremos uma imagem do algoritmo de Euclides para $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ (vire 90^0 e relita sobre o eixo x). As linhas poligonais correspondentes à $A_{-2}A_0A_2A_4$ *e* $A_{-1}A_1A_3A_5$ são, respectivamente, $A_n{}'A_{n-2}{}' \ldots A_0{}'$ e $A_{n-1}A_{n-3}A_{-1}$.

A segunda termina no ponto A_{-1} sobre o eixo x, o que significa que $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ é uma fração contínua igual a $[a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$ como afirma a relação (3).

Agora, nós dividimos a relação (1) por $r_n q_n$ e calculamos λ_n:

$$\lambda_n = \frac{1}{r_n q_n} = \frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{q_{n-1}}{q_n} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots] + \frac{1}{[a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1]}$$

ou também

$$\lambda_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1} q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1] + \frac{1}{[a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots]}$$

Isso conclui a prova para valores pares e ímpares de n.

Este teorema mostra que quando as convergentes são as melhores aproximações racionais para números reais, elas não são todas igualmente boas. A aproximação $\frac{p_n}{q_n}$ é realmente boa se λ_n é grande, o que significa que sendo $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, o quociente parcial a_{n+1} é grande. Nesse sentido nem o número de ouro, nem $\sqrt{2}$ possuem boas aproximações.

Vamos considerar os números irracionais mais frequentemente usados: π e e. Como vimos, não é difícil converter aproximações decimais fornecidas por calculadoras de bolso em fragmentos de frações contínuas. Em particular, $\pi = [3; 7,15,1,293,10,3,8, \ldots]$, e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,...]. Vemos que, ao contrário de e, π possue alguns quocientes parciais grandes, os mais notáveis 15 e 293. As respectivas aproximações de π , já comentadas anteriormente são [3;7] = $\frac{22}{7}$ e

[3;7,1,15,1] = $\frac{355}{113}$. A primeira foi descoberta por Archimedes, com denominador 7, foi dado o valor de π com um erro de 1,3 . 10^{-3}. A segunda foi descoberta após 4 séculos por Adriaen Metius. Com este denominador sua notável aproximação possui uma precisão de 2,7 . 10^{-7} e fornece uma aproximação correta de 6 dígitos para o valor de π. Nada comparado existe para o número e. As melhores aproximações de e, usando frações contínuas são $\frac{19}{7}$ (erro ≈ 4 . 10^{-3}) e $\frac{199}{71}$ (erro de ≈ 2,8 . 10^{-5})

7.4 A prova do teorema de Hurwitz-Markov usando o indicador λ_n

Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$ um número irracional. Queremos provar que para infinitas frações convergentes $\frac{p_n}{q_n}$, $\lambda_n = \frac{1}{q_n(q_n\alpha - p_n)} > \sqrt{5}$, e que isso não é sempre verdade se substituirmos $\sqrt{5}$ por um número maior.

Caso 1 : Sejam infinitos quocientes parciais a_n maiores ou iguais a 3. Então, para esses valores de n, temos : $\lambda_n > a_n \geq 3 > \sqrt{5}$.

Caso 2: Seja um número finito de a_n, $a_n > 2$, mas infinitos iguais a 2. Então, para infinitos valores de n, $a_{n+1} = 2,\ a_n \leq 2,\ a_{n+2} \leq 2$ e $\lambda_n = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}+\frac{1}{...}} + \frac{1}{a_n+\frac{1}{...+\frac{1}{a_1}}} \geq 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} > \sqrt{5}$.

Caso 3 : Para m suficientemente grande, $a_m = 1$. Então para $n > m$,

$$\lambda_n = [1; 1,1,1, ...] + \frac{1}{[1; 1,1,1, ... a_1]}$$

A primeira parcela é o número de ouro, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, e a segunda parcela tende para $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, quando n tende ao infinito e é maior que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ para todos os outros valores de n.

Assim:

$$\lambda_n > \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$$

para infinitos valores de n, desde que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \sqrt{5}$.

OBS : Para todo ε > 0, a inequação $\lambda_n > \sqrt{5} + \varepsilon$ é verdadeira para finitos valores de n.

Note que apenas no caso 3 não podemos trocar a constante $\sqrt{5}$ por uma constatnte maior. Nesse caso, o número α possui a forma $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, 1,1,1, \dots]$. O representante mais característico dessa classe é o número de ouro $\boldsymbol{\phi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1,1,1, \dots]$. Pode-se provar que todos os números dessa classe são, precisamente, aqueles da forma $\frac{a\,\phi+b}{c\,\phi+d}$ com a,b,c,d $\in Z$ e ad – bc = ± 1. Se α não for um desses números, então a constante $\sqrt{5}$ pode ser aumentada para $\sqrt{8}$

7.5 Um exemplo

1) Seja o número irracional $\sqrt{13} \cong 3{,}6055512 \dots$ Escrito em fração contínua, temos:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}$$

Tomemos as três convergentes consecutivas r_2, r_3 e r_4.

$$r_2 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$r_3 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{11}{3} = 3{,}666 \dots$$

$$r_4 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

Vemos na tabela 2 abaixo que pelo menos uma delas terá erro menor que o inverso do produto de $\sqrt{5}$ pelo respectivo denominador ao quadrado.

n	**Erro :** $\left\|\sqrt{\mathbf{13}} - \frac{p_n}{q_n}\right\|$	< / >	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}\,q_n{}^{\mathbf{2}}}$
2	$\|3{,}6055512\ldots - 3{,}5\| = 0{,}1055512$	<	0,1118034
3	$\|3{,}6055512\ldots - 3{,}666\ldots\| = 0{,}0611154$	>	0,0496904
4	$\|3{,}6055512\ldots - 3{,}6\| = 0{,}0055512$	<	0,0178885

Tabela 2 –Exemplo do Teorema de Hurwitz-Markov