6. Frações contínuas como as melhores aproximações de um número real

Com um pouco de técnica matemática iremos calcular frações contínuas, ou seja, os numeradores e denominadores de $\alpha \in R$, através de fórmulas de recorrência de 2ª ordem, fórmulas onde cada termo é uma função dos dois anteriores.

6.1 Algumas fórmulas simples

Proposição 6.1.1

Sejam $a_{0,} a_1, a_2$,... $\in R$ com $a_n > 0,\ n \geq 1$.

Sejam (p_n) e (q_n), $\forall n \geq 1$, sequencias dadas por :

$p_0 = a_0$ $\quad p_1 = a_0 a_1 + 1$ $\quad$ ... $\quad p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$

$q_0 = 1$ $\quad q_1 = a_1$ $\quad$ ... $\quad q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$

Por exemplo :

$$p_2 = a_2 p_1 + p_0 = a_2 a_1 a_0 + a_0 + a_2$$

$$q_2 = a_2 q_1 + q_0 = a_2 a_1 + 1$$

Então,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_{0;} a_{1,} a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Proposição 6.1.2 :

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n,\ \forall n \geq 0, n \in Z,$$

isto é, $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$

Obs: Se $a_j \in Z,\ \forall j \geq 0,\ p_n, q_n \epsilon Z,\ \forall n \geq 0.$

Neste caso, $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1}$

Isso mostra que os denominadores crescem rápido quando $a_{n+1}, p_n e\ q_n$ são todos inteiros. Ou seja, q_n é uma sequencia de termos positivos que cresce, pelo menos, como a sequencia de Fibonnaci.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

Prova da Proposição 6.1.1

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0 = [a_0]$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1]$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, a_2]$$

Por indução em n.

Seja a fração contínua,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \end{matrix}}}}$$

Com (n+1) termos depois do ponto e vírgula.

Podemos olhar $(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$ como um número só, ficando a fração contínua com n termos, igual a $[a_{0;} a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$. Este é um artifício conveniente, pois sabemos algumas coisas sobre frações contínuas com n termos. Além disso, note que a última parcela justifica a definição de $a_n \in R$.

Podemos agora usar a hipótese de indução, vejamos:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} =$$

$$= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} =$$

$$= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

Prova da Proposição 6.1.2

Vemos, claramente, que $p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1 - a_0a_1) = 1 = (-1)^0$. O que inicialmente satisfaz a proposição.

Se $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, temos o próximo, $p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) = -(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

Obs : Se $a_j \in Z,\ \forall j \geq 0,\ mdc(p_n, q_n) = 1,$ pois $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, e portanto p_n e q_n não podem ter um fator comum. Logo, $\frac{p_n}{q_n}$ já vem simplificado.

Corolário 6.1.3

$\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$, onde r_n é a n-ésima convergente de α.

De fato,

$$r_n - r_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_nq_{n-1} - q_np_{n-1}}{q_nq_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}$$

Como vimos na seção 4.3, α está entre r_{n-1}e r_n, $|r_n - \alpha| < \frac{1}{q_nq_{n-1}}$ e tenderá a zero, quando n tender a infinito.

6.2 Uma fórmula exata para um número real

Corolário 6.2.1

Seja $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$, $\forall n \in N$, uma fração contínua usual. A proposição 6.1.1 permite calcular essa fração contínua, dando $\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$ como uma fórmula exata para α.

Note que se a fração contínua for até a n-ésima casa ou for finita, podemos escrevê-la como : $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$,

onde, $p_0 = a_0$ $\quad p_1 = a_0a_1 + 1$ $\quad \dots \quad$ $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$

$q_0 = 1$ $\quad q_1 = a_1$ $\quad \dots \quad$ $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

6.3 O cálculo do erro

Corolário 6.3.1

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

Prova

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

pois, $-(p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$

Corolário 6.3.2

Para todo $n \geq 1$, temos:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{\alpha_{n+1}{q_n}^2} \leq \frac{1}{a_{n+1}{q_n}^2} \leq \frac{1}{{q_n}^2}$$

Observe que a_{n+1} é a parte inteira de α_{n+1} e ,portanto, $\alpha_{n+1} \geq a_{n+1}$

6.4 O Teorema Dirichlet

Teorema 6.3.3

Em particular, $\forall\alpha \in R\backslash Q$ existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, p,q $\in Z$, q > 0 com

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

De fato, todas as aproximações que vêm das frações contínuas satisfazem essa condição! Esse é um resultado muito melhor do que aquele expresso na Proposição 3.2.3, que dizia que existiam infinitos racionais $\frac{p}{q}$ que aproximavam um número real α com um erro menor do que a metade do inverso dos seus denominadores, ou seja, $\frac{1}{2q}$.

Vamos agora estimar o erro por excesso. Considere

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} > \frac{1}{(\alpha_{n+1} + 1){q_n}^2} > \frac{1}{(a_n + 1 + 1){q_n}^2}$$

Note que somando 1 a a_{n+1}, temos a_{n+1}+1 $> \alpha_{n+1}$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

Portanto, a estimativa do erro , quando aproximamos $\alpha \in R$ por frações contínuas fica:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{a_{n+1}}+\mathbf{2})\boldsymbol{q_n}^{\mathbf{2}}}<\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{p_n}}{\boldsymbol{q_n}}<\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a_{n+1}}\boldsymbol{q_n}^{\mathbf{2}}}$$

Exemplo:

Vamos estimar o erro da quarta convergente do número π:

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

A quarta convergente é

$$\frac{p_3}{q_3} = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113}$$

Portanto, $\frac{1}{294.(113^2)} < \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{292.(113)^2}$

Equivalente a $\frac{1}{3754086} < \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3728548}$

Note que a 4ª convergente, $\frac{p_3}{q_3}$, não foi escolhida por acaso, mas sim por possuir um erro pequeno, uma vez que o quociente parcial a_4= 292 é um valor grande e como vimos na estimativa do erro, quanto maior for o quociente parcial a_{n+1}, melhor será a aproximação $\frac{p_n}{q_n}$.

Portanto, se estamos interessados em boas aproximações de um número real, basta olharmos o que vem das frações contínuas.

Se considerarmos que a soma dos erros por falta e por excesso obtidos resulta em $\frac{1}{{q_n}^2}$, podemos inferir que pelo menos uma entre cada duas aproximações

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

consecutivas tem erro menor que a metade do inverso do seu denominador ao quadrado. Ou seja, pelo menos metade das aproximações que veem das frações contínuas são realmente muito boas. Mostraremos nas seções seguintes, que as aproximações que vêm das frações contínuas são as melhores aproximações racionais possíveis de um número real α. Veremos no capítulo 7 o teorema de Hurwitz-Markov que irá reforçar esse fato, mostrando que, especificamente, existem infinas aproximações que veem da fração continua, tais que para $\alpha \in R\backslash Q, \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}{q_n}^2}$ e que a constante $\sqrt{5}$ é o maior número com essa propriedade.Veremos também que para o número de ouro a referida constante é a melhor possível.

6.5 Uma visão geométrica das melhores aproximações

Seja α um número real. No capítulo 3, nós consideramos um reticulado $\wedge$ gerado pelos vetores (-1,0) e (α,1). Para todo p e q, o ponto p(-1,0) + q(α,1) = $(q\alpha - p, q) = \left(q\left(\alpha - \frac{p}{q}\right), q\right)$ pertence ao referido reticulado. Nosso velho indicador das aproximações $\frac{p}{q}$ de α era igual à distância desse ponto ao eixo y, ou seja, a abscissa desse ponto. O novo indicador de qualidade , $q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, é o valor absoluto do produto das coordenadas desse ponto. Portanto, a questão sobre as aproximações $\frac{p}{q}$ de α com esse indicador menor do que ε, é equivalente à questão de quantos pontos do reticulado $\wedge$ acima do eixo x (q>0), se encontram dentro da “Cruz Hiperbólica” $|xy| < \varepsilon$. (Figura 5)

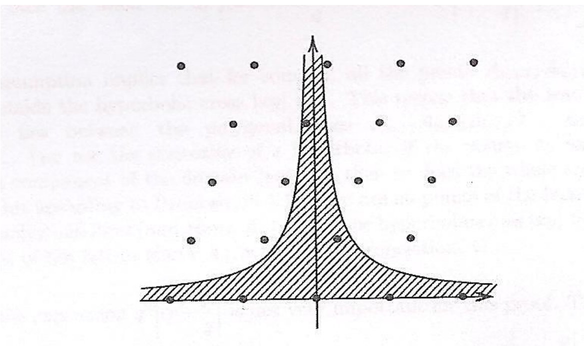

Figura 6: A Cruz Hiperbólica

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

Aplicando a construção da seção 5.4 do reticulado $\wedge$ com $A_{-2} = (\alpha, 1)$ e $A_{-1} = (-1{,}0)$, os pontos $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ serão os pontos do reticulado formados pelas n-ésimas convergentes de α, cujas distâncias até o eixo y representam as aproximações $\frac{p}{q}$ de α, e que serão as melhores aproximações por estarem vindo da fração contínua.

Proposição 6.5.1

Para n≥0, $A_n = (q_n\alpha - p_n, q_n)$, onde p_ne q_n são o numerador e denominador da fração irredutível da n-ésima convergente do número α.

Prova : Por indução em n

Para n = 0 e n = 1, podemos checar diretamente:

$p_0 = a_{0,}\, q_0 = 1; \quad p_1 = a_0a_1 + 1, \qquad q_1 = a_1$

$A_0 = A_{-2} + a_0A_{-1} = (\alpha, 1) + a_0(-1{,}0) = (\alpha - a_0, 1) = (q_0\alpha - p_0, q_0),$

$A_1 = A_{-1} + a_1A_0 = (-1{,}0) + a_1(\alpha - a_0, 1) = (a_1\alpha - (a_0a_1 + 1), a_1)$=

= $(q_1\alpha - p_1, q_1)$

Além disso, se n $\geq$ 2 e as fórmulas para A_{n-1} e A_{n-2} são verdadeiras, então $A_n = A_{n-2} + a_nA_{n-1} = (q_{n-2}\alpha - p_{n-2}, q_{n-2}) + a_n(q_{n-1}\alpha - p_{n-1}, q_{n-1}) =$
$\big((a_nq_{n-1} + q_{n-2})\alpha - a_np_{n-1} - p_{n-2}, a_nq_{n-1} + q_{n-2}\big) = (q_n\alpha - p_n, q_n)$

□

Assim, os pontos $\mathrm{A_n}$ são os pontos do reticulado formados pelas n-ésimas convergentes de α cujas distâncias até o eixo y, ou seja, as abscissas, representam as aproximações $\frac{p}{q}$ de α.

Proposição 6.5.2 (As frações contínuas são as melhores aproximações)

Seja $\varepsilon > 0$. Se somente para um número finito de convergentes $\frac{p_n}{q_n}$, $q_n{}^2\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \varepsilon$, então o conjunto de frações $\frac{p}{q}$ tais que $q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varepsilon$ é finito.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

Prova

O pressuposto implica que para algum n, todos os pontos $A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, A_{n+4}$ estão fora da Cruz Hiperbólica, $|xy| < \varepsilon$. Isto significa que todos os pontos da Cruz Hiperbólica, a partir de n, encontram-se entre as linhas poligonais $A_{n+1}, A_{n+3}, A_{n+5}, \dots e\ A_{n+2}, A_{n+4}, A_{n+6}, \dots$(nós usaremos a convexidade de uma hipérbole: se os pontos $A_k\ e\ A_{k+2}$ encontram-se dentro de uma parte do domínio $|xy| > \varepsilon$, então todo segmento $A_k A_{k+2}$ também se encontrará). Mas como sabemos da proposição 5.4.1, não existem pontos do reticulado ∧ entre as duas linhas poligonais (e acima de A_n). Assim, a Cruz Hiperbólica $|xy| < \varepsilon$ não contém pontos do reticulado acima de A_n, de modo que segue a proposição.

Note que a expressão $q^2 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ não é tão importante para essa prova. A mesma afirmação pode ser dita sobre o indicador de qualidade calculado como $q^3 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ ou $q^{100} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ ou, na realidade, por uma expressão F(q, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$) , onde a função F possua a propriedade de seu domínio F(x,y)>∈ esteja contido no I e II quadrantes e seja convexo para todo ∈ .

6.6 Exemplos

Vimos acima que as convergentes proporcionam as melhores aproximações de um número real por racionais,ou seja, se $\frac{p}{q}$, p,q inteiros, q > 0, é uma boa aproximação para $\alpha \in R$, então $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, para algum n natural.Vejamos os dois exemplos a seguir:

a) O número de ouro $\boldsymbol{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, as suas melhores aproximações são:

$1, [1; 1] = \frac{2}{1}$, $[1; 1,1] = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $[1; 1,1,1] = \frac{5}{3} = 1{,}6666 \dots$, $[1; 1,1,1,1] = \frac{8}{5} = 1{,}6$, $[1; 1,1,1,1,1,1,1,1,1] = \frac{89}{55} = 1{,}6181818 \dots$ e quando n tende ao infinito temos [1;1,1,1,1,1,...] = 1,6180339887...,(neste caso representamos o valor exato com dez casas decimais)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

Note que os cinco primeiros números consecutivos são os números de Fibonacci, decorrentes da seção 5.1.Note também que talvez o número de ouro seja o mais irracional dos números irracionais, devido à lentidão com que os quocientes parciais se aproximam de $\boldsymbol{\phi}$**.**

b) Para $\sqrt{2} = [1; 2,2,2,2, \ldots]$ as melhores aproximações são:

$$1, [1; 2] = \frac{3}{2}, [1; 2,2] = \frac{7}{5}, [1; 2,2,2] = \frac{17}{12}, [1; 2,2,2,2] = \frac{41}{29}, [1; 2,2,2,2,2] =$$
$$= \frac{99}{70}, [1; 2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2] = \frac{47321}{33461}$$

c) Representação gráfica dos erros das aproximações por frações contínuas de $\frac{85}{32}$.

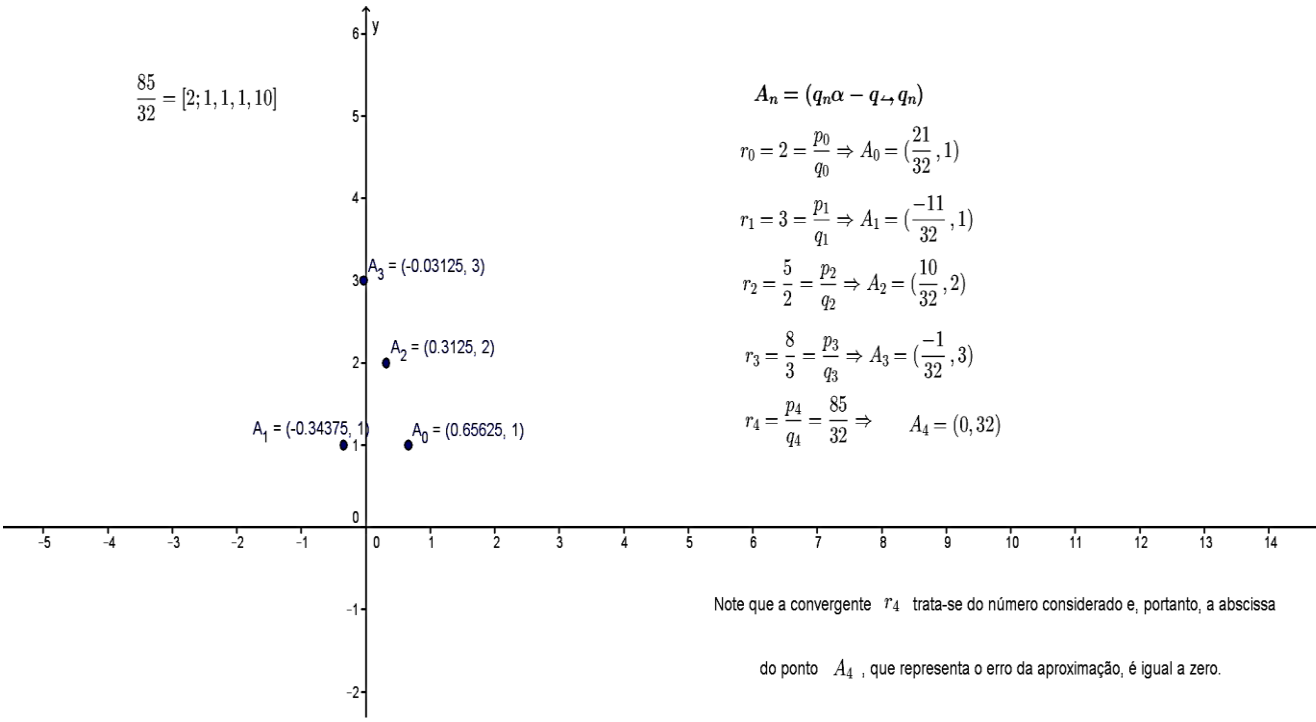

Figura 7 –Aproximações de um racional

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA

d) Representação gráfica dos erros das três primeiras aproximações por frações contínuas de $\sqrt{2}$

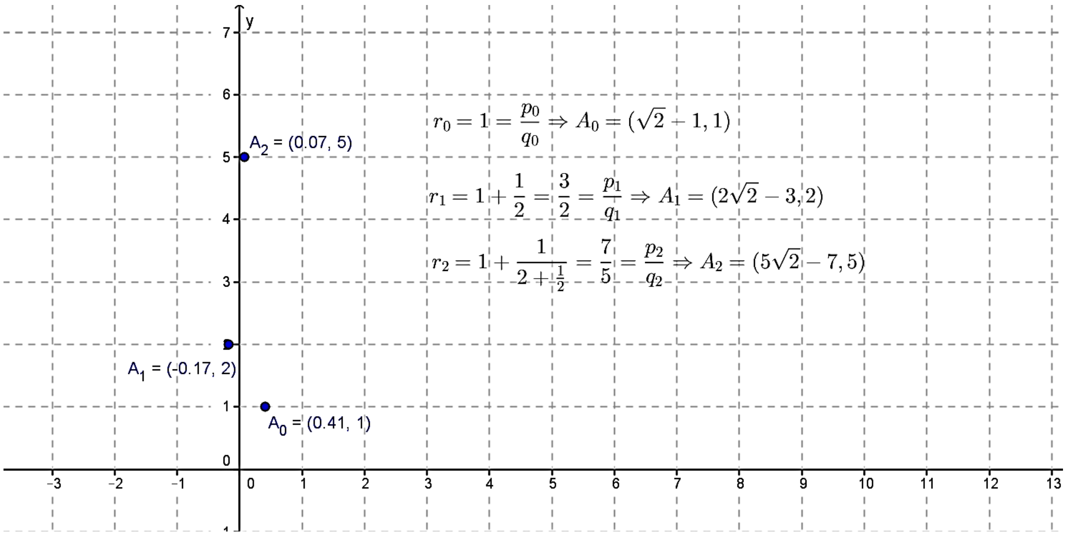

Figura 8 –Aproximações de um irracional

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1212458/CA