5. O algoritmo de Euclides e as frações contínuas

5.1 O algoritmo

Seja um número racional da forma $\frac{p}{q}$ com p,q inteiros, e q >0.

Podemos escrever:

p = $a_0 q + r_1$, $\quad 0 < r_1 < q$

q = $a_1 r_1 + r_2$, $\quad 0 < r_2 < r_1$

$r_1 = a_2 r_2 + r_3$, $\quad 0 < r_3 < r_2$

...

$\mathrm{r}_{n-2} = \mathrm{a}_{n-1}\mathrm{r}_{n-1} + \mathrm{r}_n$, $\quad 0 < \mathrm{r}_n < \mathrm{r}_{n-1}$

$\mathrm{r}_{n-1} = \mathrm{a}_n \mathrm{r}_n$, $\quad \mathrm{r}_n > 0$ onde $r_n = mdc(p,q)$

5.2 A relação entre o algoritmo de Euclides e frações contínuas

Podemos também escrever :

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}}$$

$$= \cdots$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Logo, representamos, neste caso, $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$

Note que todo número racional possui representação por frações contínuas finita, pois o algoritmo de Euclides é um processo de divisões sucessivas de números inteiros e chegará, necessariamente ao fim, resultando em resto zero.

Ainda que tenhamos números grandes p e q, o número de passos que deverão ser efetuados no algoritmo de Euclides poderá nos fazer concluir que se tomarmos um número, e seu processo de transposição à fração contínua terminar rápido, saberemos que o referido número é racional, caso contrário, não poderemos concluir que se trate de um número irracional, mas, se for racional, possuirá denominador muito grande

5.3 Um exemplo

No processo de cálculo do mdc entre 235 e 82, teremos:

235 = 2.82 + 71

82 = 1.71 + 11

71 = 6.11 + 5

11 = 2.5 + 1

5 = 5.1 + 0

Logo, o mdc(235,82) = 1

Podemos expressar a fração $\frac{235}{82}$ como :

$$\frac{235}{82} = 2 + \frac{71}{82} = 2 + \frac{1}{\frac{82}{71}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{11}{71}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{71}{11}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{5}{11}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{11}{5}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}} = [2; 1,6,2,5]$$

5.4 Uma representação geométrica para o algoritmo de Euclides

Tome um ponto O no plano e uma reta vertical l que passe por O. Tome os pontos $A_{-2} = (\beta, 1) e\ A_{-1} = (-\gamma, 0\,)$ distantes $\beta\ e\ \gamma$ de l, acima da linha horinzontal que passa por O.Construa o vetor $\overrightarrow{OA_{-1}}$ com origem A_{-2}, tantas vezes quanto for possível, sem que estes cruzem a reta vertical l. Seja A_0 a extremidade do último vetor, assim o vetor $\overrightarrow{A_0D}$ atravessa a reta$l$. Então construa o vetor $\overrightarrow{OA_0}$ com origem em A_{-1} tantas vezes quanto for possível sem que estes cruzem a reta vertical l. Seja A_1 a extremidade do último vetor. Então construimos o vetor $\overrightarrow{OA_1}$ a partir de A_0 e tomemos o ponto A_2, então A_3, A_4(não mostrados na figura).

Obtemos duas linhas poligonais $A_{-2}A_0A_2A_4$ ... e $A_{-1}\,A_1A_3$ ... convergindo para l por dois lados, e $\overrightarrow{A_{-2}A_0} = a_0\overrightarrow{OA_{-1}}$, $\overrightarrow{A_{-1}A_1} = a_1\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{A_0A_2} = a_2\overrightarrow{OA_1}$ etc...

Essa construção está relacionada com o algoritmo de Euclides da seguinte forma :

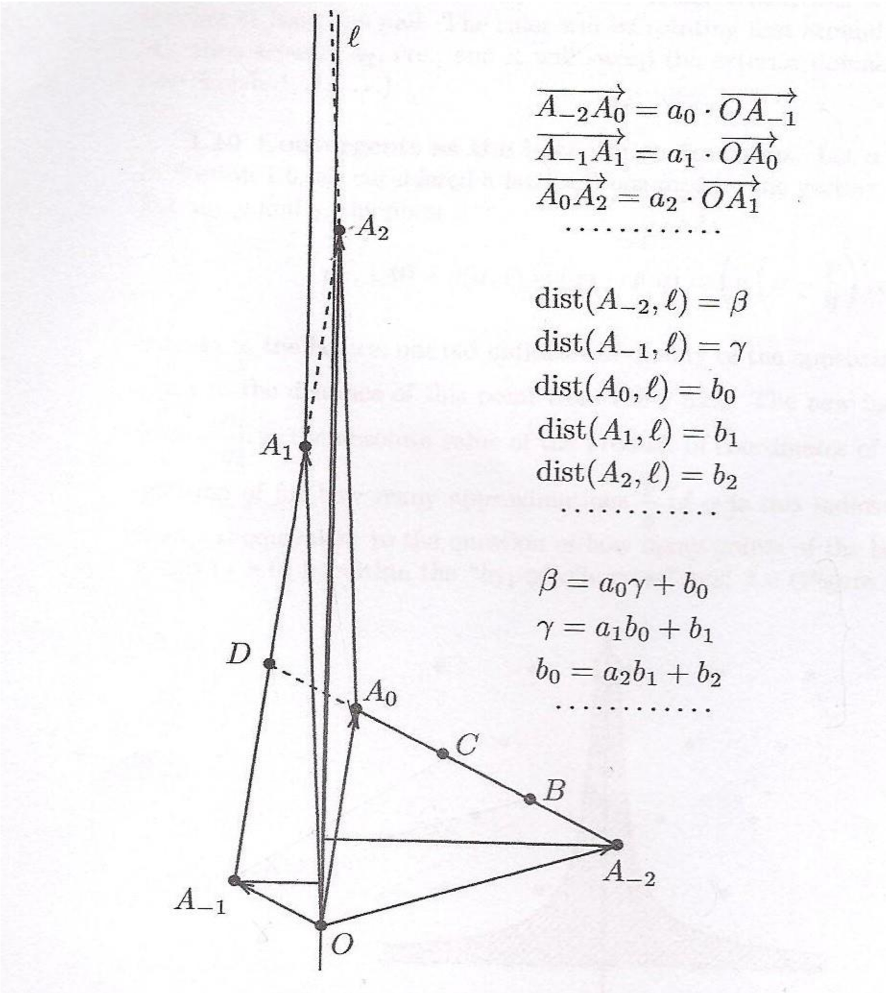

Figura 4-Representação do algoritmo de Euclides

Em particular, $\frac{\beta}{\gamma} = [a_{0;}a_1, a_{2,} \dots]$

Note que se algum ponto A_n pertencer à reta l, então a relação $\frac{\beta}{\gamma}$ é racional e igual a $[a_{0;}a_{1,}a_2, \dots, a_n]$. Observe também que,todos os pontos marcados na figura 4, não somente $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2$, mas também B, C,D , pertencem ao reticulado $\wedge$ gerado pelos vetores $\overrightarrow{OA_{-2}}$ e $\overrightarrow{OA_{-1.}}$ De fato, considere a sequência de paralelogramos $OA_{-1}A_{-2}B$, $A_{-1}OBC$, $A_{-1}OCA_0$, $A_{-1}OA_0D, DOA_0A_1, A_1OA_0A_2 \dots$ Sendo A_{-1}, O, A_{-2} pontos do reticulado $\wedge$, deduzimos, sucessivamente, pela Proposição 3.2.1 que $B, C, A_0, D, A_1, A_2, \dots$ são pontos do reticulado.

Visualizando melhor as relações com o algoritmo de Euclides:

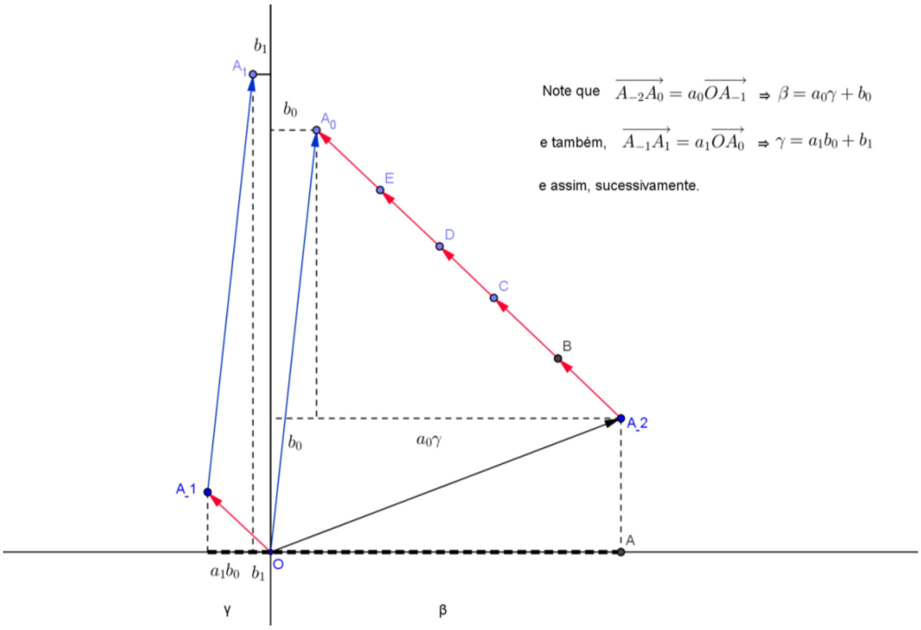

Figura 5 – Visualização das relações do algoritmo de Euclides

Proposição 5.4.1

Nenhum ponto do reticulado ∧ localiza-se entre as poligonais $A_{-2}A_0A_2A_4 \ldots e\ A_{-1}A_1A_3 \ldots$ (e acima de $A_{-2}\ e\ A_{-1}$)

Prova

O domínio entre essas poligonais está coberto pelos paralelogramos $OA_{-1}A_{-2}B$, $A_{-1}OBC$, $A_{-1}OCA_0$, $A_{-1}OA_0D, DOA_0A_1, A_1OA_0A_2$ ...(O ponto E é bem superior na figura 4).

Esses paralelogramos possuem áreas iguais (todos dois paralelogramos consecutivos possuem base comum e alturas iguais). Assim, todos eles possuem a mesma área do paralelogramo $OA_{-2}BA_{-1}$ e pela proposição 3.2.2 (b) nenhum deles possue algum ponto do reticulado ∧.