4. Frações Contínuas

A partir de agora começaremos a estudar algumas das considerações apresentadas no capítulo 3 deste trabalho. Na ocasião, comparamos algumas frações $\frac{p}{q}$ e verificamos que algumas eram melhores aproximações para um número real, por além de apresentarem erros menores, possuírem números p e q não muito grandes. Neste capítulo iremos identificá-las e aprender como determiná-las, acreditando, assim como fizemos até agora, que elas são frações mais convenientes para aproximar números reais.Posteriormente, provaremos que as mesmas possuem essa notável característica. A seguir, apresentamos a definição de fração contínua.

4.1 Definição

Uma fração contínua de um número real α é uma expressão da forma :

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

Com $a_n \in Z,\ \forall n \geq 0,\ a_n > 0,\ \forall n \geq 1$,que representamos

por α =$[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Chamemos de a_0 a parte inteira de α, ou seja, a_0=$\lfloor \alpha \rfloor \in Z,\quad a_0 \leq \alpha < a_0 + 1$.

Se $\alpha = a_0$, paramos, senão, $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - a_0} > 1,\quad \alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$.

Para n≥ 1, $\alpha_n > 1, a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \in N^*$

Se α_n=a_n paramos, senão, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} > 1,\quad \alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$

Assim, teremos :

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \; a_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}$$

que representamos por $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$

4.2 Frações contínuas finitas e infinitas

Se $\alpha_n = a_n,\ \ \exists n \in N,$ tal que

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

α = $[a_{0;}a_1, a_2, \dots, a_n]$ ∈ Q, que representa uma fração contínua finita.

Se $\alpha_n \notin$ Z, $\forall n \in N$,

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

e representamos $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, por uma fração contínua infinita.

4.3 Convergentes (ou Reduzidas)

Os números a_0, a_1, a_2, ... são chamados de quocientes parciais de α. O número

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

É chamado n-ésima convergente (ou reduzida) de α. Obviamente, $r_0 < r_2 < r_4 < \cdots < \alpha < \cdots < r_5 < r_3 < r_1$. Ou seja, as convergentes de ordem par são aproximações de α por falta e as convergentes de ordem ímpar são as aproximações de α por excesso.

4.4 Exemplos

a) Vamos representar o número racional $b_0 = \frac{235}{82}$ por uma fração contínua, usando o algoritmo $\boldsymbol{b_n = \frac{1}{b_{n-1} - a_{n-1}}}$, n ≥ 1 **e** $\boldsymbol{a_0 = \lfloor b_0 \rfloor}$, $\boldsymbol{a_1 = \lfloor b_1 \rfloor}$, $\boldsymbol{a_2 = \lfloor b_2 \rfloor} \dots \boldsymbol{a_n = \lfloor b_n \rfloor}$**, ...** e a seguir, calcular suas convergentes (frações que são aproximações deste número racional). Vejamos:

$$a_0 = \lfloor b_0 \rfloor = \left\lfloor \frac{235}{82} \right\rfloor = 2$$

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{235}{82} - 2} = \frac{82}{71}$$

$$a_1 = \lfloor b_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{82}{71} \right\rfloor = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{82}{71} - 1} = \frac{71}{11}$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{71}{11} \right\rfloor = 6$$

$$b_3 = \frac{1}{b_2 - a_2} = \frac{1}{\frac{71}{11} - 6} = \frac{11}{5}$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor = 2$$

$$b_4 = \frac{1}{b_3 - a_3} = \frac{1}{\frac{11}{5} - 2} = 5$$

$$a_4 = \lfloor b_4 \rfloor = \lfloor 5 \rfloor = 5$$

Portanto,

$$\frac{235}{82} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{5}}}}$$

E assim,

$$\frac{235}{82} = [2; 1,6,2,5]$$

Observe que trata-se de uma fração contínua finita.

Cálculo das Convergentes:

$$r_0 = \frac{2}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$r_1 = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$r_2 = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{6}} = \frac{20}{7} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$r_3 = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}} = \frac{43}{15} = \frac{p_3}{q_3}$$

Observações:

r_4 é a própria fração $\frac{235}{82}$. Observe também que $\frac{235}{82} = 2{,}8658536$ e a quarta convergente $r_3 = \frac{43}{15} = 2{,}8666666....$ possui um erro de aproximação de apenas 0,000813 (para 6 dígitos decimais!)

b) Consideremos agora o número irracional $\sqrt{3}$. Usaremos o algoritmo $\boldsymbol{b_n = \frac{1}{b_{n-1} - a_{n-1}}}$ **e** $\boldsymbol{a_0 = \lfloor b_0 \rfloor,\ a_1 = \lfloor b_1 \rfloor,\ a_2 = \lfloor b_2 \rfloor \dots a_n = \lfloor b_n \rfloor, \ \dots}$ para representá-lo como uma fração contínua.Tomando, então, $b_0 = \sqrt{3}$, teremos:

$$a_0 = \lfloor b_0 \rfloor = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$a_1 = \lfloor b_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$a_2 = \lfloor \sqrt{3} + 1 \rfloor = 2$$

$$b_3 = \frac{1}{b_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

Note que $b_3 = b_1$, assim os próximos valores irão se repetir. Portanto,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \cdots}}}} = [1; 1,2,1,2, \dots]$$

Note que $\sqrt{3}$ possui uma representação por fração contínua, infinita e periódica.

Cálculo das 5 primeiras convergentes:

$$\mathrm{r}_{\mathbf{0}} = \frac{1}{1} = \frac{\mathrm{p}_{\mathbf{0}}}{\mathrm{q}_{\mathbf{0}}}$$

$$r_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2 = \frac{p_1}{q_1}$$

$$r_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$r_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{7}{4} = \frac{p_3}{q_3}$$

$$r_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{11} = \frac{p_4}{q_4}$$

c) O número π por frações contínuas é :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Ou seja, π = [3;7,15,1,292,1,...]

Obs : Não é surpresa que as aproximações muito boas de π sejam $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$, pois ambas são oriundas da fração contínua acima (r_1e $r_{3)}$.Veremos nos capítulos finais deste trabalho, que possuiremos um indicador para qualificar essas aproximações.

d) A Razão Áurea : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618... por frações contínuas é : [1;1,1,1,1,...]. Observe que a Razão Áurea é a raiz positiva da equação x^2-x-1=0. Dividindo a equação por x, obtemos $x = 1 + \frac{1}{x}$, que no processo de obtenção de sua fração contínua significa retirar a parte inteira igual a 1 e inverter o resultado, dando o próprio número, e assim o processo se repete, gerando a representação [1;1,1,1,1,...].

e) O número $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

Assim, $\sqrt{2} = [1; 2,2,2, \dots]$

Observe que sendo $\sqrt{2} - 1$ o inverso de $\sqrt{2} + 1$ o processo se repete.

e) Apenas mostraremos, sem demonstração, a representação do número e :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2{,}71828182828459004523 \dots$$

ou , e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,...].