3. Sequências de aproximações racionais

3.1 Aproximações com denominadores q

Sabemos que o conjunto dos números racionais é denso em R, isto é, números reais podem ser bem aproximados por números racionais, ou seja, $\forall \alpha \in R,\ \forall \in > 0$, $\exists$ $\frac{p}{q} \in Q$, p $\in Z, q \in Z^*$, com $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \in$.

Exemplo: Consideremos o número $\pi = 3{,}141592633589793238$ ... Podemos escrever que:

$3 \leq \pi < 4$

$$\frac{31}{10} \leq \pi < \frac{32}{10}$$

$$\frac{314}{100} \leq \pi < \frac{315}{100}$$

Ou seja, para k casas decimais após a vírgula, teremos: $\frac{p_k}{10^k} \leq \pi < \frac{p_k+1}{10^k}$, onde p_k é o número formado pelos (k+1) primeiros dígitos de π.

O erro cometido nessas aproximações será $\left|\pi - \frac{p_k}{10^k}\right| < \frac{1}{10^k}$, que pode ser considerado pequeno se fizermos o valor de k ser muito grande.

O que nos interessa, no entanto, é que tenhamos erros pequenos em nossas aproximações por racionais, mas também que não tenhamos denominadores grandes demais. Comparar o erro com o tamanho do denominador é o que se espera naturalmente. Assim, vejamos o seguinte teorema:

3.2 Condições para uma boa aproximação

A primeira coisa que importa é que o erro, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, seja o menor possível. Mas isso não é tudo: a fração deve ser conveniente, ou seja, os números inteiros p e q não podem ser muito grandes. O tamanho de p depende de α, o qual não está relacionado com a precisão da aproximação. Então, nós precisamos minimizar dois números, o erro $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ e o denominador q. Mas os dois objetivos se contradizem. Fazer o erro menor possível é fazer o denominador maior possível!(e vice-versa).

Para conciliarmos essa contradição podemos combiná-los em um indicador de qualidade de uma aproximação.

Chamaremos $\frac{p}{q}$ uma boa aproximação para um número real α se o produto $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$.q for pequeno, digamos, menor que $\frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{1000000}$ por exemplo.

3.3 Teorema 3.1.1 (Das infinitas aproximações)

“Para todo $\alpha \in R$, e todo $\varepsilon > 0$,existem infinitas frações $\frac{p}{q}$, $p \in Z, q \in Z, q > 0$ tais que $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varepsilon$”

A prova do teorema tem uma forte inspiração geométrica e o principal ingrediente geométrico para esta inspiração é a noção de reticulado.

Seja O um ponto origem do plano, e seja v = $\overrightarrow{OA}$ e w = $\overrightarrow{OB}$ dois vetores não colineares (que significa que os pontos O,A e B não pertencem à mesma reta). Considere o conjunto de todos os pontos que sejam extremidades dos vetores pv + qw com p$\in Z$ e q $\in Z$. Isso é o que chamaremos de reticulado (Λ) gerado pelos vetores v e w, apresentado na figura 1. (Um exemplo: Observe que o ponto K é a extremidade do vetor $\overrightarrow{OK}$= 2v + 3w).

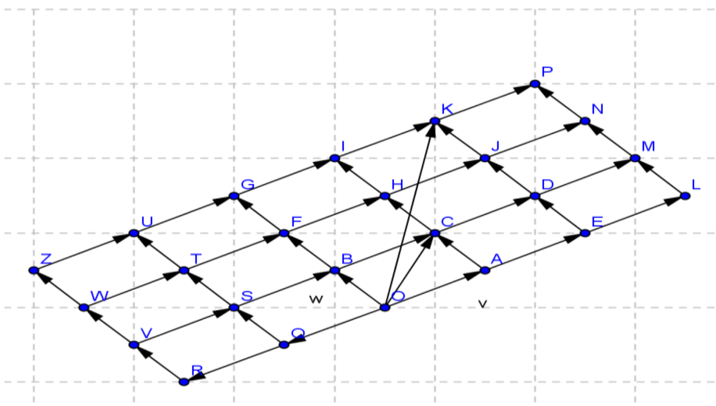

Figura 1 -Reticulado Λ

Precisaremos da proposição a seguir para provarmos o teorema.

Proposição 3.2.1

Seja KLMN um paralelogramo tal que os vértices K, L e M pertençam ao reticulado Λ, gerado pelos vetores v e w. Então, N também pertencerá ao reticulado Λ.

Prova da Proposição 3.2.1

Seja $\overrightarrow{OK} = av + bw$, $\overrightarrow{OL} = cv + dw$, $\overrightarrow{OM} = ev + fw$, com a,b,c,d,e,f $\in$ Z. Então, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OK} + \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL}\right) = av + bw + ev + fw - cv - dw = (a + e - c)v + (b + f - d)w$, por isso N ϵ $\wedge$.

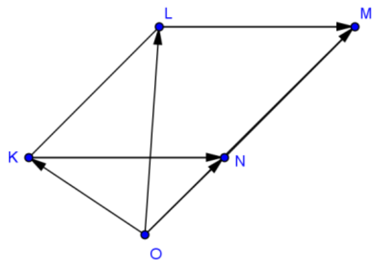

Figura 2 -Demonstração da Proposição 3.2.1

Proposição 3.2.2[1]

Seja KLMN um paralelogramo com vértices no reticulado $\wedge$.

(a) A área de KLMN é igual à n.s, onde n é um número inteiro positivo e s a área do paralelogramo elementar OACB, onde $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (ver figura 1)

(b) Se nenhum ponto do reticulado $\wedge$, exceto K,L,M,N pertence ao interior do paralelogramo KLMN ou à sua borda, então a área de KLMN é igual à s.

Prova do Teorema 3.1.1

Sejam $\alpha \in R$, p $\in Z$ e q $\in Z^*$ Considere o reticulado gerado pelos vetores v = (-1,0) e w = (α,1), então pv +qw = (q α – p, q) = (q($\alpha - \frac{p}{q}$), q) . Observe que o módulo da abscissa desse vetor representa o indicador de qualidade da aproximação $\frac{p}{q}$ do número real α e sua ordenada, o denominador desta fração.

[1] A prova desta proposição encontra-se em FUCHS, Dmitry; TABACHNIKOV, Serge. Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics, p.8.

Nós precisamos provar que na faixa onde $-\epsilon < q(\alpha - \frac{p}{q}) < \epsilon$, existem infinitos pontos (p,q) do reticulado gerado por v e w.

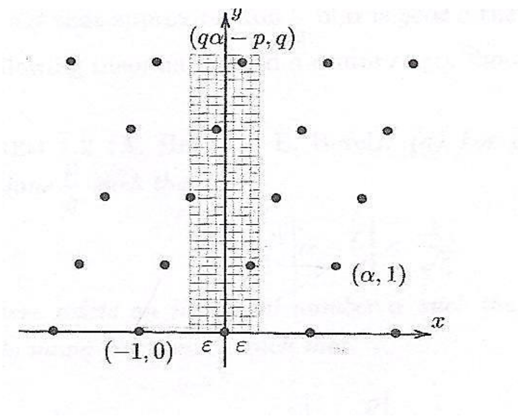

Figura 3a - Demonstração do Teorema 3.1.1

Isso parece óbvio se ϵ não for muito pequeno, digamos $\epsilon = \frac{1}{2}$. De fato, para todo inteiro positivo q, a reta horizontal y = q contém uma sequência de pontos do reticulado com distância igual a 1 entre dois pontos consecutivos. Precisamente um desses pontos estará dentro da larga faixa $|x| < \frac{1}{2}$. Daí a larga faixa conterá infinitos pontos do reticulado com a ordenada y positiva.

Escolha agora um inteiro positivo n tal que $\frac{1}{2n} < \epsilon$ e divida a larga faixa em 2n faixas estreitas de largura $\frac{1}{2n}$. Pelo menos uma dessas pequenas faixas deverá conter infinitos pontos com ordenadas y positivas, uma vez que mostramos ter a larga faixa um número infinito de pontos (p,q) do reticulado gerado por v e w. Seja a faixa mostrada na figura 3b. Sejam também os pontos $A_0, A_1, A_2,$ ...dentro dessa faixa, numerados na direção de aumento da ordenada y. Para todo i > 0 tome o vetor igual a A_0O com origem A_i e extremidade B_i. Desde que $OA_0A_iB_i$ seja um paralelogramo e O, A_0 e A_i pertençam ao reticulado, B_i também pertencerá ao reticulado. Além disso, a abscissa x de B_i é igual a diferença entre as abscissas de A_i e A_0 (novamente porque $OA_0A_iB_i$ é um paralelogramo). Assim, o valor absoluto da abscissa x de B_i será menor do que $\frac{1}{2n} < \in$, sendo assim todos os pontos B_i pertencerão à faixa de comprimento $\frac{1}{2n}$

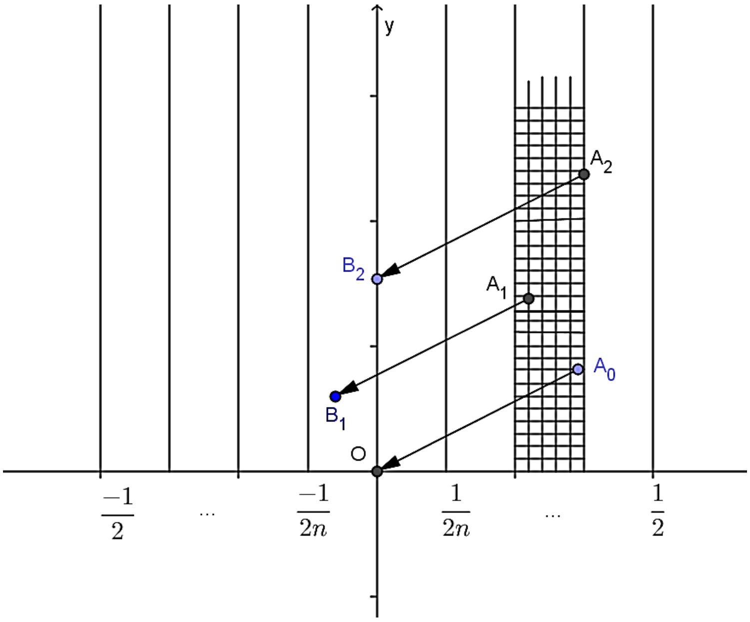

Figura 3b – Demonstração do Teorema 3.1.1

Proposição 3.2.3 (O erro das aproximações)

As infinitas aproximações de um número real possuem erro menor ou igual à metade do inverso do denominador.

Prova :

Seja p = $\lfloor q\alpha \rfloor \in Z$, q ∈ Z, q > 0 e α ∈ R. Sabemos que todo número real está entre dois inteiros consecutivos, e assim, p≤ $q\alpha < p + 1$. Dividindo por q, teremos $\frac{p}{q} \leq \alpha < \frac{p+1}{q}$.

Observamos que o erro será $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$. Além disso, a soma dos erros $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| + \left|\alpha - \frac{p+1}{q}\right| = \frac{1}{q}$, logo $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$ ou $\left|\alpha - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$.

Mas isso não é o melhor que podemos conseguir. Existem melhores aproximações!

3.4 A existência de melhores aproximações

Exemplo 1:

Apresentaremos uma tabela com frações que aproximam o valor de $\sqrt{57}$, comparando essas frações com as frações decimais, ou seja, aquelas cujos denominadores são potências de 10. Constataremos que existem aproximações bem melhores, avaliando o erro obtido em cada uma delas. Ainda trata-se de apenas uma constatação. Afinal, como surgem essas frações que aproximam tão bem o número irracional em questão? Esse é o objetivo de nosso trabalho que será revelado nas seções posteriores. Vejamos a tabela, considerando aproximações de $\sqrt{57}$ = 7,5498344... por frações decimais e frações não decimais.

Fração decimal	**Valor decimal : (I)**	**Erro: $\sqrt{57} - (I)$**	**Fração**	**Valor decimal: (II)**	**Erro : $\sqrt{57} - (II)$**
$\frac{7}{1}$	7	0,5498344...	$\frac{7}{1}$	7	0,5498344...
$\frac{75}{10}$	7,5	0,0498344...	$\frac{8}{1}$	8	1,5498344...
$\frac{754}{100}$	7,54	0,0098344...	$\frac{15}{2}$	7,5	0,0498344...
$\frac{7549}{1000}$	7,549	0,0008344...	$\frac{68}{9}$	7,55555...	0,0057211...
$\frac{75498}{10000}$	7,5498	0,0000344...	$\frac{83}{11}$	7,54545...	0,0043799...
$\frac{754983}{100000}$	7,54983	0,0000044...	$\frac{151}{20}$	7,55	0,0001656...

Tabela 1 –Tabela Comparativa

Observe, por exemplo, as frações $\frac{754}{100}$ e $\frac{68}{9}$ e note que esta, além de possuir um erro menor, possui termos também bem menores. O mesmo acontece para as frações $\frac{7549}{1000}$ e $\frac{151}{20}$. Portanto, é fato que existem frações cujas aproximações são melhores do que as das frações decimais e com denominadores menores.

Exemplo 2 : Arquimedes descobriu uma aproximação para o número π igual a $\frac{22}{7}$, cujo erro $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0{,}0012 \ldots < \frac{1}{700}$, que é uma aproximação melhor que a fração $\frac{314}{100}$. Ou ainda, a aproximação de π pela fração $\frac{355}{113}$ = 3,14159292... possui um erro $\left|\pi - \frac{355}{113}\right|$=0,00000026 $< \frac{1}{3000000}$, um erro melhor do que na base 10 com denominador 1000000! Veremos que isso não occorre por acaso.