



**Marcelo Nascimento Lorio**

**Aproximações de números reais por números racionais:  
Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as  
melhores aproximações?**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador : Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro  
Março 2014



**Marcelo Nascimento Lorio**

**Aproximações de números reais por números racionais:  
Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as  
melhores aproximações?**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcos Craizer**

Orientador

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Christine Sertã Costa**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Gabriela dos Santos Barbosa**

Fundação Educacional Unificada Campograndense – FEUC

**Prof. Antonio Carlos Branco**

Fundação Getúlio Vargas – FGV

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de março de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

### **Marcelo Nascimento Lorio**

Licenciou-se em Matemática na Faculdade de Humanidades Pedro II. Foi aluno da PUC-Rio e da Academia Militar das Agulhas Negras. Foi coordenador pedagógico do Colégio Andrews e do Centro Educacional da Lagoa, e Diretor Acadêmico da Universidade Estácio de Sá. É Professor da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, tendo exercido o cargo de coordenador pedagógico do Ginásio Experimental de Novas Tecnologias Educacionais. É Professor efetivo da Fundação de Apoio à Escola Técnica (FAETEC). Leciona raciocínio lógico e matemática aplicada no curso de administração da Universidade Cândido Mendes.

Lorio, Marcelo Nascimento

Aproximações de números reais por números racionais: por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações? / Marcelo Nascimento Lorio ; orientador: Marcos Craizer. – 2014.

61 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Frações Contínuas. 3. Aproximações. 4. Convergentes. 5. Visualizações geométricas. 6. Algoritmo de Euclides. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD : 510

Para os meus Pais, Olga(in memorian) e Conrado pelo  
amor incondicional.

## Agradecimentos

À Deus, matemático maior, que dissipa sempre todas as minhas dúvidas.

Ao meu amado Pai que não se cansa de me ajudar.

Ao meu orientador; Professor Marcos Craizer, que sendo grande, sempre se mostrou disponível para estar perto e ajudar.

À todos os meus professores da PUC-Rio.

À Capes, ao Profmat e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

À minha companheira Monica Deveza Paciello por todo apoio, paciência e compreensão.

Aos meus filhos queridos, Rodrigo, Daniel e Isabela, pela inspiração.

Aos meus colegas de mestrado pela rede de cooperação que nos fortificou até o fim.

## Resumo

Lorio, Marcelo Nascimento; Craizer, Marcos. **Aproximações de números reais por números racionais: Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações?** Rio de Janeiro, 2014. 61p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Frações Contínuas são representações de números reais que independem da base de numeração escolhida. Quando se trata de aproximar números reais por frações, a escolha da base dez oculta, frequentemente, aproximações mais eficientes do que as exibe. Integrar conceitos de aproximações de números reais por frações contínuas com aspectos geométricos traz ao assunto uma abordagem diferenciada e bastante esclarecedora. O algoritmo de Euclides, por exemplo, ao ganhar significado geométrico, se torna um poderoso argumento para a visualização dessas aproximações. Os teoremas de Dirichlet, de Hurwitz-Markov e de Lagrange comprovam, definitivamente, que as melhores aproximações de números reais veem das frações contínuas, estimando seus erros com elegância técnica matemática incontestável.

## Palavras-Chave

Frações Contínuas; aproximações; convergentes; visualizações geométricas; algoritmo de Euclides.

## Abstract

Lorio, Marcelo Nascimento; Craizer, Marcos (Advisor). **Approximations of real numbers by rational numbers: why the continued fractions converging provide the best approximations?** Rio de Janeiro, 2014. 61 p. Msc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Continued fractions are representations of real numbers that are independent of the choice of the numerical basis. The choice of basis ten frequently hides more than shows efficient approximations of real numbers by rational ones. Integrating approximations of real numbers by continued fractions with geometrical interpretations clarify the subject. The study of geometrical aspects of Euclid's algorithm, for example, is a powerful method for the visualization of continued fractions approximations. Theorems of Dirichlet, Hurwitz-Markov and Lagrange show that, definitely, the best approximations of real numbers come from continued fractions, and the errors are estimated with elegant mathematical technique.

## Keywords

Continued Fractions; approximations; convergent; geometric views; Euclid's algorithm.

## Sumário

1.	Introdução	11
2.	Um pouco de História	
2.1	Os primeiros matemáticos que estudaram o assunto	12
2.2	Adolf Hurwitz e Andrei Andreyevich Markov	14
3.	Sequências de aproximações racionais	15
3.1	Aproximações com denominadores $q$	15
3.2	Condições para uma boa aproximação	16
3.3	A prova geométrica do teorema 3.1.1	16
3.4	A existência de melhores aproximações	20
4.	Frações Contínuas	22
4.1	Definição	22
4.2	Frações contínuas finitas e infinitas	23
4.3	Convergentes (ou Reduzidas)	23
4.4	Exemplos	23
5.	O algoritmo de Euclides e as Frações Contínuas	28
5.1	O algoritmo	28
5.2	A relação entre o algoritmo de Euclides e Frações Contínuas	28
5.3	Um exemplo	29
5.4	Uma representação geométrica do algoritmo de Euclides	29
6.	Frações contínuas como as melhores aproximações de um número real	32
6.1	Algumas fórmulas simples	32



6.2	Uma fórmula exata para um número real	34
6.3	O cálculo do erro	35
6.4	O Teorema de Dirichlet	35
6.5	Uma visão geométrica das melhores aproximações	37
6.6	Exemplos	39
7.	O Teorema de Hurwitz – Markov	42
7.1	O enunciado do teorema	42
7.2	A prova do teorema 7.1	42
7.3	Uma visão geométrica do teorema de Hurwitz – Markov	46
7.4	A prova do teorema de Hurwitz – Markov usando o indicador $\lambda_n$	49
7.5	Um exemplo	50
8.	O teorema de Lagrange	52
8.1	O enunciado do teorema	52
8.2	A prova do teorema 8.1	52
8.3	Exemplos	54
9.	Aplicações	55
9.1	Um truque	55
9.2	Frações contínuas e Eletricidade	56
9.3	Um modelo para Física	59
10.	Conclusão	60
11.	Referência Bibliográficas	61

## Lista de Figuras

Foto 1 -	John Wallis	12
Foto 2 -	Leonhard Euler	13
Foto 3 -	Lagrange	13
Foto 4 -	Adolf Hurwitz	14
Foto 5 -	Andrei Markov	14
Figura 1 -	Reticulado $\Lambda$	16
Figura 2 -	Demonstração da Proposição 3.2.1	17
Figura 3a -	Demonstração do Teorema 3.1.1	18
Figura 3b -	Demonstração do Teorema 3.1.1	19
Tabela 1 -	Tabela Comparativa	20
Figura 4 -	Representação do algoritmo de Euclides	30
Figura 5 -	Visualização das relações do algoritmo de Euclides	31
Figura 6 -	A Cruz Hiperbólica	37
Figura 7 -	Aproximações de um racional	40
Figura 8 -	Aproximações de um irracional	41
Figura 9(a) -	Demonstração do Lema 7.3.2	46
Figura 9(b) -	Demonstração do Lema 7.3.2	46
Figura (10a) -	Teorema 7.3.1	47
Figura (10b) -	Teorema 7.3.1	47
Tabela 2 -	Exemplo do teorema de Hurwitz - Markov	51
Tabela 3 -	Aplicação 1	55
Figura 11 -	Associação Mista de Resistores	56