PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Marcelo Nascimento Lorio

Aproximações de números reais por números racionais: Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações?

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador : Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Março 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Marcelo Nascimento Lorio

Aproximações de números reais por números racionais: Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações?

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer
Orientador
Departamento de Matemática PUC-Rio

Profa. Christine Sertã Costa
Departamento de Matemática PUC-Rio

Profa. Gabriela dos Santos Barbosa
Fundação Educacional Unificada Campograndense – FEUC

Prof. Antonio Carlos Branco
Fundação Getúlio Vargas – FGV

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de março de 2014

Marcelo Nascimento Lorio

Licenciou-se em Matemática na Faculdade de Humanidades Pedro II.Foi aluno da PUC-Rio e da Academia Militar das Agulhas Negras.Foi coordenador pedagógico do Colégio Andrews e do Centro Educacional da Lagoa, e Diretor Acadêmico da Universidade Estácio de Sá. É Professor da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, tendo exercido o cargo de coordenador pedagógico do Ginásio Experimental de Novas Tecnologias Educacionais. É Professor efetivo da Fundação de Apoio à Escola Técnica (FAETEC). Leciona raciocínio lógico e matemática aplicada no curso de administração da Universidade Cândido Mendes.

Lorio, Marcelo Nascimento

Aproximações de números reais por números racionais: por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações? / Marcelo Nascimento Lorio ; orientador: Marcos Craizer. – 2014.

61 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Frações Contínuas. 3. Aproximações. 4. Convergentes. 5. Visualizações geométricas. 6. Algoritmo de Euclides. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD : 510

Para os meus Pais, Olga(in memorian) e Conrado pelo

amor incondicional.

Agradecimentos

À Deus,matemático maior, que dissipa sempre todas as minhas dúvidas.

Ao meu amado Pai que não se cansa de me ajudar.

Ao meu orientador; Professor Marcos Craizer, que sendo grande, sempre se mostrou disponível para estar perto e ajudar.

À todos os meus professores da PUC-Rio.

À Capes, ao Profmat e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

À minha companheira Monica Deveza Paciello por todo apoio, paciência e compreensão.

Aos meus filhos queridos, Rodrigo, Daniel e Isabela, pela inspiração.

Aos meus colegas de mestrado pela rede de cooperação que nos fortificou até o fim.

Resumo

Lorio, Marcelo Nascimento; Craizer, Marcos. **Aproximações de números reais por números racionais: Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações?** Rio de Janeiro, 2014. 61p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Frações Contínuas são representações de números reais que independem da base de numeração escolhida. Quando se trata de aproximar números reais por frações, a escolha da base dez oculta, frequentemente, aproximações mais eficientes do que as exibe. Integrar conceitos de aproximações de números reais por frações contínuas com aspectos geométricos traz ao assunto uma abordagem diferenciada e bastante esclarecedora. O algoritmo de Euclides, por exemplo, ao ganhar significado geométrico, se torna um poderoso argumento para a visualização dessas aproximações. Os teoremas de Dirichlet, de Hurwitz-Markov e de Lagrange comprovam, definitivamente, que as melhores aproximações de números reais veem das frações contínuas, estimando seus erros com elegância técnica matemática incontestável.

Palavras-Chave

Frações Contínuas; aproximações; convergentes; visualizações geométricas; algoritmo de Euclides.

Abstract

Lorio, Marcelo Nascimento; Craizer, Marcos (Advisor). **Approximations of real numbers by rational numbers: why the continued fractions converging provide the best approximations?** Rio de Janeiro, 2014. 61 p. Msc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Continued fractions are representations of real numbers that are independent of the choice of the numerical basis. The choice of basis ten frequently hides more than shows efficient approximations of real numbers by rational ones. Integrating approximations of real numbers by continued fractions with geometrical interpretations clarify the subject. The study of geometrical aspects of Euclid's algorithm, for example, is a powerful method for the visualization of continued fractions approximations. Theorems of Dirichlet, Hurwitz-Markov and Lagrange show that, definitely, the best approximations of real numbers come from continued fractions, and the errors are estimated with elegant mathematical technique.

Keywords

Continued Fractions; approximations; convergent; geometric views; Euclid's algorithm.

Sumário

Lista de Figuras