

## 7 Estrutura da matriz H na EG

Como já foi visto na formulação do MHEC a matriz  $\mathbf{H}$  na EG está conformada pela composição de 6 submatrizes do seguinte jeito

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B & \mathbf{H}^C \\ \mathbf{H}^{AR} + \mathbf{H}^{BR} & \mathbf{H}^{CR} \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

onde  $\mathbf{H}^A$  corresponde à matriz  $\mathbf{H}$  clássica. Também é possível expressar  $\mathbf{H}$  como a composição de duas matrizes

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^* \\ \mathbf{H}^R \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

Onde

$$\mathbf{H}^R = \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \eta} \quad (7-3)$$

sendo  $\eta$  o vetor normal do ponto fonte. Também são satisfeitas as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{AR} &= \frac{\partial \mathbf{H}^A}{\partial \eta} \\ \mathbf{H}^{BR} &= \frac{\partial \mathbf{H}^B}{\partial \eta} \\ \mathbf{H}^{CR} &= \frac{\partial \mathbf{H}^C}{\partial \eta}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (7-4)$$

### 7.1.1. Análise da montagem da matriz $\mathbf{H}^A$

A matriz  $\mathbf{H}^A$  corresponde exatamente a matriz clássica caracterizada por uma singularidade forte a qual  $1/r$

$$H_{mn}^A = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in} d\Gamma \quad (7-5)$$

#### 7.1.1.1. Força de superfície total clássica da matriz $\mathbf{H}^A$ , $\mathbf{p}^{A*} = \mathbf{p}^*$

A expressão clássica de forças de superfície é dada por

$$p_{im}^* = \sigma_{jim}^* n_j = -\frac{1}{4\pi(1-v)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} ((1-2v)\delta_{im} + 2r_i r_m) + (1-2v)(n_{i,m} - n_{m,i}) \right] \quad (7-6)$$

### 7.1.1.2. Integração da parte finita

Onde não se têm pontos de singularidade a integração da parte finita é feita por Gauss Legendre regular. Nos pontos onde se tem integração singular ( $1/r$ ) a integração é feita a través das seguintes equações

$$\begin{aligned} H_{mn}^A &= \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in} d\Gamma \\ p_{im}^A &= p_{im}^* = \sigma_{jim}^* n_j \\ f_{mn}^A &= p_{im}^A u_{in} \\ H_{mn}^A &= GL \int_{\Gamma} p_{im}^A u_{in} d\Gamma + f_{mn}^A \Big|_{\xi=\xi_0} \operatorname{sgn}(\delta) (\ln(J_o) - I'^{\xi}) \end{aligned} \quad (7-7)$$

### 7.1.1.3. Integrando livre

O integrando livre de  $\mathbf{H}^A$  é dado por

$$f_{mn}^A = p_{im}^* u_{in} r = -\frac{u_{in}}{4\pi(1-v)} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} ((1-2v)\delta_{im} + 2r_i r_m) + (1-2v)(n_i r_{,m} - n_m r_{,i}) \right] \quad (7-8)$$

que avaliada no ponto de singularidade resulta em

$$f_{mn}^A \Big|_{\xi=\xi_0} = p_{im}^* u_{in} r = -\frac{(1-2v)}{4\pi(1-v)} [(n_i r_{,m} - n_m r_{,i})] \quad (7-9)$$

Mas

$$(n_i r_{,m} - n_m r_{,i}) \Big|_{\xi=\xi_0} = \operatorname{sgn}(\delta) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-10)$$

e portanto

$$f_{mn}^A \Big|_{\xi=\xi_0} = p_{im}^* u_{in} r = -\operatorname{sgn}(\delta) \frac{(1-2v)}{4\pi(1-v)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-11)$$

### 7.1.2. Análise da montagem das matrizes $\mathbf{H}^B$ e $\mathbf{B}^C$

#### 7.1.2.1. Quadraturas a utilizar na integração numérica

Como se pode verificar a integração 2D das parcelas compostas por  $\mu_{kjin}^*$  precisam de uma quadratura tipo Gauss regular mais uma quadratura logarítmica para o qual cada integrando é decomposto através de séries em duas parcela do seguinte jeito

$$\begin{aligned} H_{mn}^C &= \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma = GL \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^{*,REG} n_k n_j u_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^{*,LN} n_k n_j u_{in} d\Gamma \\ H_{mn}^B &= \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjin}^* n_k t_j u'_{in} d\Gamma = GL \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjin}^{*,REG} n_k t_j u'_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjin}^{*,LN} n_k t_j u'_{in} d\Gamma \end{aligned} \quad (7-12)$$

onde

$$\mu_{kjm}^{*REG} = \mu_{kjm}^* - \mu_{kjm}^{*,LN} \ln(\xi) \quad (7-13)$$

quando a singularidade se dá no extremo inferior e

$$\mu_{kjm}^{*REG} = \mu_{kjm}^* - \mu_{kjm}^{*,LN} \ln(1-\xi) \quad (7-14)$$

quando a singularidade se dá no extremo superior da integração. O diferencial de comprimento no caso 2D é dado por

$$d\Gamma = J d\xi \quad (7-15)$$

A tensão  $\mu_{kjm}^{*,LN}$  é a parcela com fator logarítmico e que será integrada com a quadratura correspondente.

### 7.1.2.2. Força de superfície não-clássica de $H^B$ , $p^{B*}$

Define-se a tensão  $p^B$  do integrando da matriz  $H^B$  do seguinte jeito

$$H_{im}^B = \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^* n_k t_j u'_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{im}^{*B} u'_{in} d\Gamma \quad (7-16)$$

$$p_{im}^{*B} = \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^* n_k t_j u'_{in}$$

que simplificada é

$$p_{im}^{*B} = \frac{g^2}{16\pi(1-v)J^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial t} (\delta_{im} \Psi_2^B + r_{,i} r_{,m} X_2^B) + \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,i} t_{,m} \Psi_2^B + r_{,m} t_{,i} \Gamma_2^B) + \frac{\partial r}{\partial t} (r_{,m} n_i + r_{,i} n_m) \frac{X_2^B}{3} + \Phi_2^B n_i t_m + \Phi_2^B n_m t_i \right\} \quad (7-17)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_2^B &= \Psi'_1 - \Psi_1 / r = C_2^{\Psi B} + O(r^2) \\ X_2^B &= 3X_1 / r = C_2^{XB} + O(r^2) \\ \Gamma_2^B &= \phi'_1 - \phi_1 / r = C_2^{\Gamma B} + O(r^2) \\ \Phi_2^B &= \phi_1 / r = C_2^{\phi B} + O(r^2) \\ \Psi_2 &= \Psi_1 / r = C_2^{\Psi} + O(r^2) \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= r_{,i} t_i \end{aligned} \quad (7-18)$$

### 7.1.2.3. Força de superfície não-clássica de $H^C$ , $p^{C*}$

Define-se a tensão  $p^C$  do integrando da matriz  $H^C$  do seguinte jeito

$$H_{im}^C = \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k n_j u'_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{im}^{*C} u'_{in} d\Gamma \quad (7-19)$$

$$p_{im}^{*C} = \mu_{kjm}^* n_k n_j u'_{in}$$

que desenvolvida de forma indicial é

$$\rho_{im}^{*C} = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \left( \delta_{im} \Psi_2^C + r_{,i} r_{,m} X_2^C \right) + \frac{\partial r}{\partial n} \left( r_{,i} n_m Y_2^C + r_{,m} n_i Z_2^C \right) + r_{,i} r_{,m} \frac{X_2^C}{3} \right. \\ \left. + \Phi_2^C \delta_{im} + \Phi_2^C n_i n_m \right\} \quad (7-20)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_2^C &= \Psi'_1 - \Psi_1 / r \\ Y_2^C &= \Psi'_1 - \Psi_1 / r + X_1 / r = C_2^{YC} + O(r^2) \\ Z_2^C &= X_1 / r + \phi'_1 - \phi_1 / r = C_2^{ZC} + O(r^2) \\ X_2^C &= 3X_1 / r \\ \phi_2^C &= (\phi_1 + \Psi_1) / r = C_2^{\phi C} (\alpha_2^{\phi C} + \ln(r)) r + O(r^3) \\ \Phi_2^C &= \Psi_1 / r = C_2^{\phi C} (\alpha_2^{\phi C} + \ln(r)) + O(r^2) \end{aligned} \quad (7-21)$$

#### 7.1.2.4. Transformação das tensões não-clássicas, $\mu$ em series

Devido à singularidade logarítmica foi necessário a transformação em séries de  $\mu^*$ , que em coordenadas polares apresentam a seguinte estrutura algébrica típica:

$$\begin{aligned} \mu_{kjm}^* &= \mu_{kjm}^{*,REG} + \mu_{kjm}^{*,LN} \ln(\gamma_{2g}) \\ \mu_{kjm}^{*,REG} &= C_{kjm\_0}^{\mu,REG} + C_{kjm\_2}^{\mu,REG} r^2 + O(r^4) \\ \mu_{kjm}^{*,LN} &= C_{kjm\_0}^{\mu,LN} + C_{kjm\_2}^{\mu,LN} r^2 + O(r^4), \end{aligned} \quad (7-22)$$

onde os primeiros dois coeficientes  $C_{kjm;\lambda}^{\mu,REG}, C_{kjm;\lambda}^{\mu,LN}$  se apresentam embaixo embora tenha-se utilizado um número de termos maior que 10 devido ao problema de aproximação das séries das funções BesselK. Por questão de espaço e com uma finalidade ilustrativa apresentam-se a estrutura típica das séries de  $\mu_{kjm}^*$  apenas com os primeiros termos.

$\mu_{1111}^* :$ 

$C_{1111\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (16c^2 + 64c(1-v) + \gamma(160 - 128v) - 8)$

$C_{1111\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(-8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 44) + 12c^2 - 12c(1-v) + 32v - 46)$

$C_{1111\_0}^{\mu, LN} = \alpha g^4 (160 - 128v)$

$C_{1111\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (-8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 44)$

 $\mu_{1122}^* = \mu_{1212}^* :$ 

$C_{1122\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (32\gamma(3-4v) + 8 - 16c^2 + 64c(1-v))$

$C_{1122\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20) - 12c^2 - 12c(1-v) + 32v - 18)$

$C_{1121\_0}^{\mu, LN} = \alpha g^4 32(3-4v)$

$C_{1122\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20)$

 $\mu_{1122}^* = \mu_{1212}^* :$ 

$C_{1122\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (32\gamma(3-4v) + 8 - 16c^2 + 64c(1-v))$

$C_{1122\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20) - 12c^2 - 12c(1-v) + 32v - 18)$

$C_{1121\_0}^{\mu, LN} = \alpha g^4 32(3-4v)$

$C_{1122\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20)$

 $\mu_{1121}^* = \mu_{1211}^* :$ 

$C_{1121\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (16sc - 32(1-2v))$

$C_{1121\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(-8sc - 8(1-2v)s) + 12sc - 6s(1-2v))$

$C_{1121\_0}^{\mu, LN} = 0$

$C_{1121\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^4 (-sc - 8(1-2v))$

 $\mu_{2221}^* :$ 

$C_{2221\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (-16sc - 32s(1-2v))$

$C_{2221\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8cs - 8c(1-2v)) - 12cs - 6s(1-2v))$

$C_{2221\_0}^{\mu, LN} = 0$

$C_{2221\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8cs - 8s(1-2v))$

 $\mu_{2222}^* :$ 

$C_{2222\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (32\gamma(5-4v) - 8 + 16c^2 - 64c(1-v))$

$C_{2222\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(-8c^2 - 16c(1-v) + 44 - 32v) - 12c^2 - 12c(1-v) - 46 + 32v)$

$C_{2222\_0}^{\mu, LN} = \alpha g^4 32(5-4v)$

$C_{2222\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (-8c^2 - 16c(1-v) + 44 - 32v)$

$$\mu_{1212}^* = \mu_{1122}^* :$$

$$C_{1212\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (32\gamma(1-2v) + 8 - 16c^2 - 64c(1-v))$$

$$C_{1212\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20) - 12c^2 - 12c(1-v) + 32v - 18)$$

$$C_{1212\_0}^{\mu, LN} = \alpha g^2 32(3-4v)$$

$$C_{1212\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20)$$

$$\mu_{1222}^* :$$

$$C_{1222\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (-16sc + 32s(3-2v))$$

$$C_{1222\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8cs + 8s(3-2v)) - 12sc - 6s(3-2v))$$

$$C_{1222\_0}^{\mu, LN} = 0$$

$$C_{1222\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8cs + 8s(3-2v))$$

$$\mu_{1221}^* :$$

$$C_{1221\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (32\gamma(1-4v) + 8 - 16c^2 - 64cv)$$

$$C_{1221\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8c^2 + 32v - 12 + 16cv) - 12vc - 12c^2 - 32v + 14)$$

$$C_{1221\_0}^{\mu, LN} = \alpha g^2 32(1-4v)$$

$$C_{1221\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8c^2 + 32v - 12 + 16cv)$$

$$\mu_{2111}^* :$$

$$C_{2111\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (16sc + 32\gamma(3-2v))$$

$$C_{2111\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8cs + 8s(3-2v)) + 12sc - 6s(3-2v))$$

$$C_{2111\_0}^{\mu, LN} = 0$$

$$C_{2111\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (-8cs - 16s(3-2v))$$

$$\mu_{2112}^* :$$

$$C_{2112\_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (-32\gamma(1-4v) - 64vc - 16c^2 + 8)$$

$$C_{2112\_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(32v - 12 + 8c^2 - 16vc) + 14 - 12c^2 - 12vc - 32v)$$

$$C_{2112\_0}^{\mu, LN} = -\alpha g^4 32(1-4v)$$

$$C_{2112\_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (32v - 12 + 8c^2 - 16vc)$$

$$\mu_{2122}^* = \mu_{2121}^* :$$

$$C_{2122_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (-16sc - 32s(1-2v))$$

$$C_{2122_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8sc + 8s(1-2v)) - 12sc - 6s(1-2v))$$

$$C_{2122_0}^{\mu, LN} = 0$$

$$C_{2122_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8cs - 8s(1-2v))$$

$$\mu_{2211}^* = \mu_{2121}^* :$$

$$C_{2211_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (32\gamma(3-4v) + 8 - 16c^2 - 64c(1-v))$$

$$C_{2211_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20) - 12c^2 - 12c(1-v) - 18 + 32v)$$

$$C_{2211_0}^{\mu, LN} = \alpha g^4 (32(3-4v))$$

$$C_{2211_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8c^2 - 16c(1-v) - 32v + 20)$$

$$\mu_{2212}^* = \mu_{2122}^* :$$

$$C_{2212_0}^{\mu, POL} = \alpha g^4 (-16sc - 32s(1-2v))$$

$$C_{2212_2}^{\mu, POL} = \alpha g^2 (\gamma(8cs - 8c(1-2v)) - 12cs - 6s(1-2v))$$

$$C_{2212_0}^{\mu, LN} = 0$$

$$C_{2212_2}^{\mu, LN} = \alpha g^2 (8cs - 8s(1-2v))$$

(7-23)

Os parâmetros novos são dados por

$$\alpha = \frac{1}{512\pi(1-v)g^4}$$

$$\gamma = \text{Constante de Euler} = 0.5772156649\dots$$

$$c = \cos(2\theta)$$

$$s = \sin(2\theta)$$

(7-24)

Como já é conhecido na literatura, o comportamento das séries de potencias de Bessel depende do número de termos que se utilizem e o tamanho do argumento. O cálculo das series de  $\mu_{kjm}^*$  depende do comportamento das funções

Bessel tipo K cujo argumento,  $r/g$ , representa a grandeza que determina a quantidade de tais termos necessários para uma escolha certa da serie. Como este objetivo, foi feito uma correspondência do erro de aproximação das séries a partir do erro  $10^{-8}$  apresentada na Tabela 1. onde se mostra valores para  $\mu_{2222}^*$  e  $\mu_{2211}^*$ ,

sendo  $v=0.15$ , e considerando diferentes valores de  $g$  e comprimento  $r$ .

| $\frac{r}{g}$ | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 1.00 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.05          | 15   | 23   | 27   | >30  | >30  | >30  | >30  | >30  | >30  | >30  |
| 0.10          | 11   | 15   | 19   | 23   | 25   | 27   | >30  | >30  | >30  | >30  |
| 0.20          | 9    | 11   | 13   | 15   | 17   | 19   | 21   | 23   | 25   | 25   |
| 0.50          | 9    | 9    | 9    | 11   | 11   | 13   | 13   | 14   | 15   | 15   |

(a)

| $\frac{r}{g}$ | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 1.00 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.05          | 16   | 22   | 29   | >30  | >30  | >30  | >30  | >30  | >30  | >30  |
| 0.10          | 12   | 16   | 18   | 22   | 25   | 29   | >30  | >30  | >30  | >30  |
| 0.20          | 9    | 12   | 15   | 16   | 14   | 18   | 20   | 22   | 24   | 25   |
| 0.30          | 9    | 11   | 12   | 13   | 15   | 16   | 16   | 18   | 18   | 20   |

(b)

Tabela 1. Número de termos das series calculadas na aproximação das tensões não-clássicas  $\mu_{2222}^*$ (a) e  $\mu_{2211}^*$ (b) com um erro de aproximação  $\approx 10^{-8}$ 

Para a integração da grandeza que contém parcela logarítmica se aplicou uma rotina que permite fazer uma subdivisão do elemento de integração, i.e., em um número de subelementos,  $N_d$ , e um fator de amplificação de comprimento,  $f_a$ . Os subelementos foram integrados numericamente de forma separada e finalmente somados. O esquema da lógica mostra-se na Figura 11. O resultado foi refletido numa análise do erro de aproximação de integração das series utilizadas em função do comprimento do elemento,  $r$ , a constante constitutiva  $g$ , o número de subdivisões  $N_d$ , o fator de amplificação que se manteve constante,  $f_a=2$ , e os números de pontos de integração de Gauss, NPG.

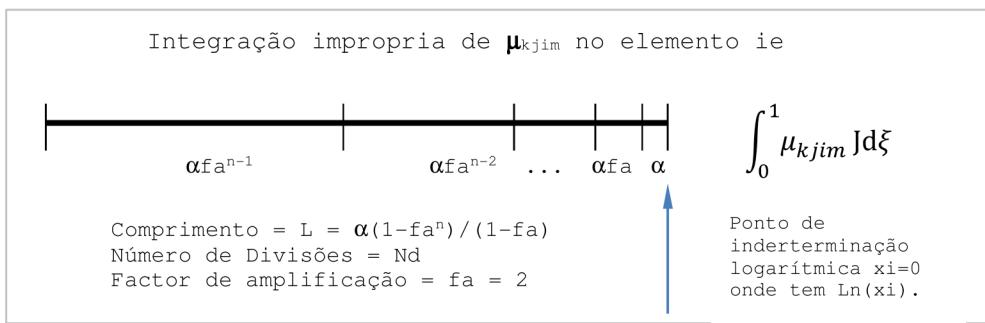


Figura 11. Esquema do teste realizado para a análise do erro de aproximação das series de  $\mu_{kjm}^*$

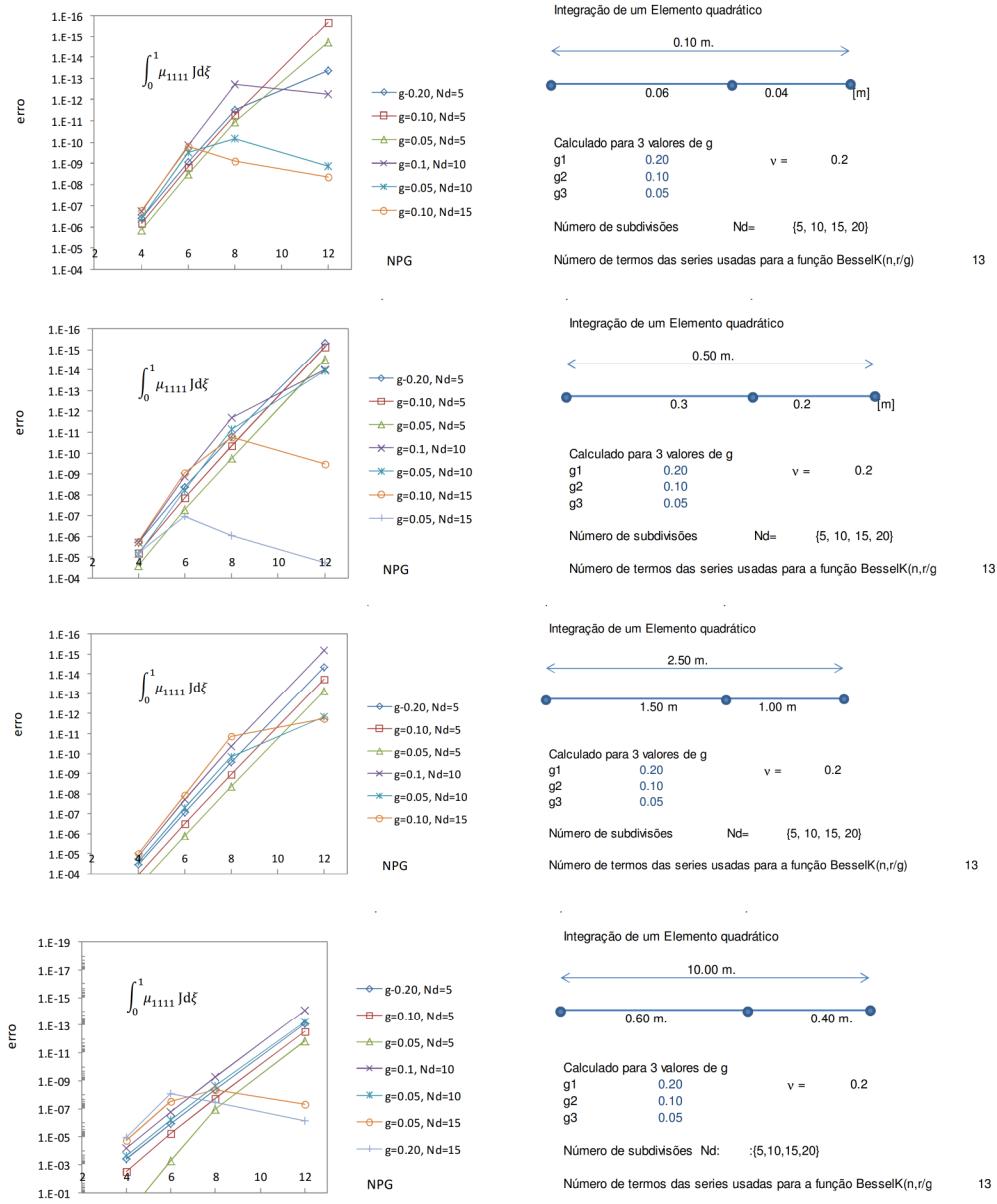


Figura 12. Aproximação da integração da tensão de segunda ordem através de séries de potências para diferentes comprimento.

A conclusão da análise reflete que se vai utilizar-se um número reduzido de pontos de Gauss então as subdivisões ajudam em atingir uma boa aproximação embora a aproximação seja reduzida quando o comprimento de  $r$  vai decrescendo. Um bom número de pontos de Gauss, que dependem também dos números de termos que se usarem nas séries, ajudam a desconsiderar os fatores restantes. No presente trabalho se considerou 8 pontos de Gauss em geral.

### 7.1.3. Análise da montagem da matriz $H^{AR}$

#### 7.1.3.1. Equação de $H^{AR}$

Define-se a tensão  $p^{AR}$  do integrando da matriz  $H^{AR}$  do seguinte jeito

$$H_{mn}^{AR} = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j u_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{im}^{AR} u_{in} d\Gamma \quad (7-25)$$

$$p_{mn}^{AR} = \sigma_{jim}^R n_j$$

onde

$$\sigma_{jim}^R = \frac{\partial \sigma_{jim}^*}{\partial \eta} = -\sigma_{jim,k}^* \eta_k \quad (7-26)$$

e portanto

$$p_{nm}^{AR} = -\frac{u_{in}}{4\pi(1-v)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{-(1-2v)\delta_{im} - 6r_i r_m}{r} \right) + \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} ((1-2v)\delta_{im} - 2r_i r_m) \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\eta_i r_m + \eta_m r_i}{r} \right) - \frac{\partial r}{\partial \eta} 2(1-2v) \left( \frac{n_i r_m - n_m r_i}{r} \right) + (1-2v) \left( \frac{n_m \eta_i - n_i \eta_m}{r} \right) \right] \quad (7-27)$$

#### 7.1.3.2. Integração da parte finita de $H^{AR}$

Seja  $H_{mn}$  o termo definida pela correspondência de incidência entre o grau de liberdade  $(m, n)$  e os pontos nodais  $(M, N)$  respectivamente, segundo:  $m=I$ ncidênci $a(M)$ ,  $n=I$ ncidênci $a(N)$ . O elemento de integração é integrado por  $ns$  sub elementos de acordo à ordem  $\omega$  do elemento cujos pontos são dados pelo vetor  $ig$  de  $\omega+1$  elementos e portanto por  $\omega$  sub elementos.

A força  $p^{AR}$  está sujeita em geral a uma singularidade do ordem  $O(1/r^2)$  e  $O(1/r)$  segundo os seguinte casos:

**Caso 1:**  $\exists$  Singularidade ( $M=ig[ns] \vee M=ig[ns+1]$ )  $\wedge M = N$

que será tratada no momento da integração pela seguinte fórmula de integração de parte finita para os dois polos de singularidade  $\xi_0 = 0$  e  $\xi_0 = 1$ .

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma = GL \int_0^1 \frac{1}{r^2} f_{im}^{AR} J d\xi + \text{sgn}(\delta) \frac{f'_{mn_o}^{AR}}{J_o} \left( \ln(J_o) - I'^{\xi} \right) + \frac{f_{mn_o}^{AR}}{J_o} \left( -1 - I'^{\xi^2} \right) \quad (7-28)$$

**Caso 2:**  $\exists$  Singularidade ( $M=ig[ns] \vee M=ig[ns+1]$ )  $\wedge M \neq N$

Neste caso a avaliação numérica precisa considerar a redução da singularidade a  $1/r$  devido a função de forma que tende a zero nos pontos contíguos ao ponto de singularidade

$$f_{mn}^{AR} = \bar{f}_{mn}^{AR} N(\xi) \quad (7-29)$$

onde

$$N(\xi) = \bar{N}(\xi)(\xi - \xi_o) \quad (7-30)$$

e portanto

$$\begin{aligned} pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma &= pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2(\xi - \xi_o)^2} \bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}(\xi)(\xi - \xi_o) d\Gamma = pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}}{r} d\Gamma \\ &= \begin{cases} pf \int_{\circ}^{r_1} \frac{1}{r} \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}}{r} J \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} dr & \text{singularidade } \xi = 0 \\ pf \int_{r_o}^{\circ} \frac{1}{r} \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}}{r} J \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} dr & \text{singularidade } \xi = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (7-31)$$

Por normalização de singularidade  $1/r$  a equação anterior fica

$$\begin{aligned} pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma &= \operatorname{sgn}(\delta) \ln(J_o) \frac{\bar{f}_{mn_o}^{AR} \bar{N}_o}{J_o} + pf \int_{\circ}^1 \frac{1}{r} \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}(\xi)}{r} J \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} d\xi \\ &= \ln(J_o) \frac{\bar{f}_{mn_o}^{AR} \bar{N}_o}{J_o} + pf \int_{\circ}^1 \frac{1}{r} \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}(\xi)}{r} J d\xi \end{aligned} \quad (7-32)$$

Se é restado e somado o primeiro termo da série do integrando livre da parte finita

$$\begin{aligned} pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma &= \operatorname{sgn}(\delta) \ln(J_o) \frac{\bar{f}_{mn_o}^{AR} \bar{N}_o}{J_o} + pf \int_{\circ}^1 \frac{1}{r} \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}J}{r} - \frac{1}{\xi - \xi_o} \left( \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}J}{r^2} \right)_{\xi=\xi_o} d\xi \\ &\quad + \left( \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}J}{r^2} \right)_{\xi=\xi_o} pf \int_{\circ}^1 \frac{1}{\xi - \xi_o} J d\xi \\ &= \operatorname{sgn}(\delta) \ln(J_o) \frac{\bar{f}_{mn_o}^{AR} \bar{N}_o}{J_o} + GL \int_{\circ}^1 \frac{1}{r} \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}}{r} J d\xi - \left( \frac{\bar{f}_{im}^{AR} \bar{N}J}{r^2} \right)_{\xi=\xi_o} GL \int_{\circ}^1 \frac{1}{\xi - \xi_o} J d\xi \end{aligned} \quad (7-33)$$

para finalmente obter

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma = GL \int_{\circ}^1 \frac{1}{r^2} f_{im}^{AR} J d\xi + \operatorname{sgn}(\delta) \frac{\bar{f}_{mn_o}^{AR} \bar{N}_o}{J_o} (\ln(J_o) - I'^{\xi}) \quad (7-34)$$

#### RESUMO:

Caso 1:  $\exists$  Singularidade ( $M = \operatorname{ig}[ns] \vee M = \operatorname{ig}[ns+1]$ )  $\wedge M = N$

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma = GL \int_{\circ}^1 \frac{1}{r^2} f_{im}^{AR} J d\xi + \operatorname{sgn}(\delta) \frac{f'_{mn_o}^{AR}}{J_o} (+\ln(J_o) - I'^{\xi}) + \frac{f_{mn_o}^{AR}}{J_o} (-1 - I'^{\xi^2}) \quad (7-35)$$

Caso 2:  $\exists$  Singularidade ( $M = \text{ig}[ns] \vee M = \text{ig}[ns+1]$ )  $\wedge M \neq N$

$$\rho f \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma = GL \int_0^1 \frac{1}{r^2} f_{im}^{AR} J d\xi + \text{sgn}(\delta) \frac{\bar{f}_{mn_o}^{AR} \bar{N}_o}{J_o} (\ln(J_o) - I'^{\xi}) \quad (7-36)$$

### 7.1.3.3. Integrando livre de $p^{AR}$

O integrando livre  $f_{im}^{AR}$  correspondente à expressão

$$\int_{\Gamma} p_{im}^{AR} u_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{im}^{AR} d\Gamma \quad (7-37)$$

fica do seguinte jeito

$$f_{im}^{AR} = p_{im}^{AR} r^2 u_{in} = -\frac{u_{in}}{4\pi(1-v)} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial n} ((1-2v)\delta_{im} - 6r_{,i}r_{,m}) + r \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} ((1-2v)\delta_{im} - 2r_{,i}r_{,m}) - 2 \frac{\partial r}{\partial n} (\eta_{,i}r_{,m} + \eta_{,m}r_{,i}) - \frac{\partial r}{\partial \eta} 2(1-2v)(n_{,i}r_{,m} - n_{,m}r_{,i}) + (1-2v)(n_m\eta_i - n_i\eta_m) \right] \quad (7-38)$$

É possível calcular a expressão do caso para o ponto de singularidade ( $\partial r/\partial n|_{\xi=\xi_o}=0$ )

$$f_{im}^{AR} \Big|_{\xi=\xi_o} = -\frac{u_{in_o}}{4\pi(1-v)} \left[ (n_k\eta_k)((1-2v)\delta_{im} - 2r_{,i}r_{,m}) - \frac{\partial r}{\partial \eta} 2(1-2v)(n_{,i}r_{,m} - n_{,m}r_{,i}) + (1-2v)(n_m\eta_i - n_i\eta_m) \right]_{\xi=\xi_o} \quad (7-39)$$

agora, têm-se dois casos para avaliação desta grandeza como se mostra na seguinte figura.

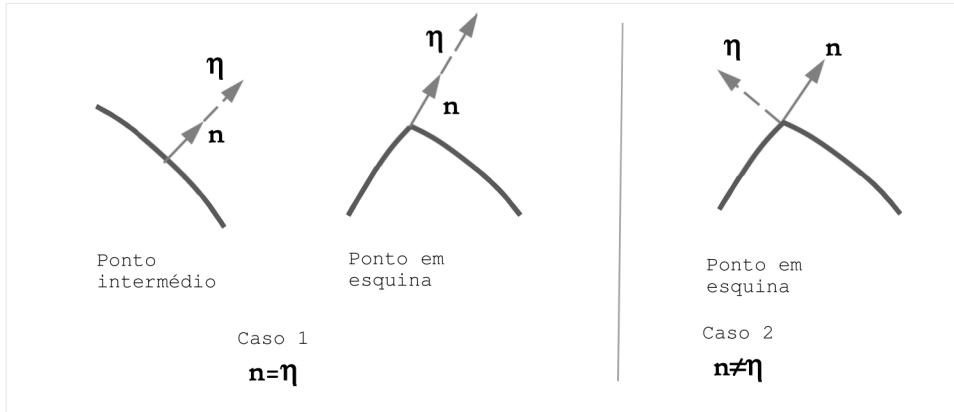


Figura 13. Casos de avaliação da grandeza  $f_{im}^{AR}$

### Caso 1, $n=\eta$

$$\begin{aligned} f_{im}^{AR}|_{\xi=\xi_o} &= -\frac{u_{in_o}}{4\pi(1-v)} \left( (1-2v)\delta_{im} - 2r_i r_{,m} \right)_{\xi=\xi_o} \\ &= -\frac{u_{in_o}}{4\pi(1-v)J_o^2} \begin{bmatrix} (1-2v)J^2 - 2\bar{x}^2 & -2\bar{x}\bar{y} \\ -2\bar{x}\bar{y} & (1-2v)J^2 - 2\bar{y}^2 \end{bmatrix}_{\xi=\xi_o} \end{aligned} \quad (7-40)$$

### Caso 2, $n \neq \eta$

$$\begin{aligned} f_{im}^{AR}|_{\xi=\xi_o} &= -\frac{u_{in_o}}{4\pi(1-v)} \left[ (n_k \eta_k) \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} (1-2v)J^2 - 2\bar{x}^2 & -2\bar{x}\bar{y} \\ -2\bar{x}\bar{y} & (1-2v)J^2 - 2\bar{y}^2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{J} (t_k \eta_k) 2(1-2v) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} - (1-2v) \frac{1}{J} (t_k \eta_k) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\xi=\xi_o} \\ f_{im}^{AR}|_{\xi=\xi_o} &= -\frac{u_{in_o}}{4\pi(1-v)} \left[ \tilde{n} \cdot \tilde{\eta} \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} (1-2v)J^2 - 2\bar{x}^2 & -2\bar{x}\bar{y} \\ -2\bar{x}\bar{y} & (1-2v)J^2 - 2\bar{y}^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{J} \tilde{t} \cdot \tilde{\eta} (1-2v) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\xi=\xi_o} \end{aligned} \quad (7-41)$$

A partir de aqui é possível decompor a expressão da montagem da matriz

$\mathbf{H}^{AR}$

$$H_{im}^{AR} = GL \int_o^1 p_{im}^{AR} u_{in} J d\Gamma + \text{sgn}(\delta) \left[ \frac{f'^{AR}}{J} (+\ln(J_o) - I'^{\xi}) \right]_{\xi=\xi_o} + \left[ \frac{f^{AR}}{J} (-1 - I'^{\xi^2}) \right]_{\xi=\xi_o} \quad (7-42)$$

e também expressá-lo do seguinte jeito

$$H_{im}^{AR} = H_{im}^{AR,GL} + H_{im}^{AR,PF1} + H_{im}^{AR,PF2} \quad (7-43)$$

no caso 1 ou

$$H_{im}^{AR} = H_{im}^{AR,GL} + H_{im}^{AR,PF1} \quad (7-44)$$

no caso 2.

### **7.1.4. Análise da montagem das matrizes $\mathbf{H}^{BR}$ e $\mathbf{B}^{CR}$**

Do mesmo modo que o caso da montagem das matrizes  $\mathbf{H}^B$  e  $\mathbf{H}^C$ , foi necessário a decomposição em séries dos integrando de tal jeito de dar o tratamento especial às parcelas logarítmicas e singulares ( $1/r$ ).

Mostra-se a continuação as expressões vinculadas com tais tratamentos: as tensões de superfície e os termos livres de  $\mathbf{H}^B$  e  $\mathbf{H}^C$ .

#### **7.1.4.1. Força de superfície não-clássica de $\mathbf{H}^{BR}$ , $\mathbf{p}^{BR}$**

Define-se a tensão  $\mathbf{p}^{BR}$  do integrando da matriz  $\mathbf{H}^{BR}$  do seguinte jeito

$$H_{im}^{BR} = \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^R n_k t_j u'_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{im}^{*B} u'_{in} d\Gamma$$

$$p_{im}^{RB} = \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^R n_k t_j = \frac{1}{J^2} \frac{\partial \mu_{kjm}^R}{\partial \eta} n_k t_j$$

que simplificada é

(7-45)

$$\begin{aligned} p_{im}^{RB} = & \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)J^2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) (\delta_{im} \Psi_2^B + r_{,i} r_{,m} X_2^B) + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{im} \Psi_2^B + r_{,i} r_{,m} X_3^B) \right. \\ & + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,m} \eta_i + r_{,i} \eta_m) X_4^B + \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} (r_{,t} r_{,m} \Psi_2^B + r_{,m} t_{,i} \Gamma_2^B) + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} (r_{,t} r_{,m} \Psi_3^B + r_{,m} t_{,i} \Gamma_3^B) \\ & + \frac{\partial r}{\partial n} (\eta_{,t} r_{,m} \Psi_4^B + \eta_{,m} t_{,i} \Gamma_4^B) + \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial \eta} \frac{X_2^B}{3} (r_{,m} n_i + r_{,i} n_m) + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} ((r_{,m} n_i + r_{,i} n_m) X_5^B + (r_{,m} \eta_i + r_{,i} \eta_m) X_6^B) \\ & \left. + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{X_4^B}{3} (\eta_{,i} n_m + \eta_{,m} n_i) + \frac{\partial r}{\partial \eta} (n_{,t} r_{,m} \Phi_3^B + n_{,m} t_{,i} \phi_3^B) \right\} \end{aligned}$$
(7-46)

onde

$$\begin{aligned} \Psi_3^B &= \Psi_2^B - \Psi_2^B / r = C_3^{\Psi_B} \frac{1}{r} + O(r) \\ \Psi_4^B &= -\Psi_2^B / r = C_4^{\Psi_B} \frac{1}{r} + O(r) \\ X_3^B &= X_2^B - 2X_2^B / r = C_3^{XB} \frac{1}{r} + O(r) \\ X_4^B &= -X_2^B / r = C_4^{XB} \frac{1}{r} + O(r) \\ X_5^B &= X_2^B / 3 = C_4^{XB} r + O(r^3) \\ X_6^B &= -X_2^B / (3r) = C_6^{XB} \frac{1}{r} + O(r) \\ \Gamma_3^B &= \Gamma_2^B - \Gamma_2^B / r = C_2^{\Gamma_B} \frac{1}{r} + O(r) \\ \Gamma_4^B &= -\Gamma_2^B / r = C_4^{\Gamma_B} \frac{1}{r} + O(r) \\ \phi_3^B &= \phi_2^B = C_3^{\phi_B} \frac{1}{r} + O(r) \\ \phi_3^B &= \phi_2^B = C_3^{\phi_B} \frac{1}{r} + O(r) \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= r_{,i} t_i \end{aligned}$$
(7-47)

A seguir é possível calcular o integrando livre  $f_{im}^{BR}$  correspondente à expressão

$$\int_{\Gamma} p_{im}^{BR} u'_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f_{mn}^{BR} d\Gamma$$
(7-48)

da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
f_{mn}^{BR} = p_{im}^{BR} r u'_{in} &= \frac{g^2 u'_{in}}{16\pi(1-v)J^2} \left\{ r \left( -\frac{1}{r} \left( n_k \eta_k + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \frac{\partial r}{\partial t} + -\frac{1}{r} \left( t_k \eta_k + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) (\delta_{im} \Psi_2^B + r_i r_m X_2^B) \right. \\
&+ r \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{im} \Psi_2^B + r_i r_m X_2^B) + r \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} (r_m \eta_i + r_i \eta_m) X_4^B \\
&\left. + r \left( -\frac{1}{r} \left( n_k \eta_k + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \right) (r_i t_m \Psi_2^B + r_m t_i \Gamma_2^B) + r \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} (r_i t_m \Psi_3^B + r_m t_i \Gamma_3^B) + \dots \right. \\
&\dots + r \frac{\partial r}{\partial n} (\eta_i t_m \Psi_4^B + \eta_m t_i \Gamma_4^B) + r \left( -\frac{1}{r} \left( t_k \eta_k + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \right) \frac{X_2^B}{3} (r_m n_i + r_i n_m) \\
&+ r \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} ((r_m n_i + r_i n_m) X_5^B + r(r_m \eta_i + r_i \eta_m) X_6^B) \\
&\left. + r \frac{\partial r}{\partial t} \frac{X_4^B}{3} (\eta_i n_m + \eta_m n_i) + r \frac{\partial r}{\partial \eta} (n_i t_m \phi_3^B + n_m t_i \phi_3^B) \right\} \quad (7-49)
\end{aligned}$$

Portanto, se este parâmetro é avaliado no ponto de singularidade e considerado a natureza das séries dos parâmetros que acompanham cada termo do tipo  $( )_{im}$ , sua singularidade e as equações utilitárias da seção 7.1.5 teremos

$$\begin{aligned}
f_{mn}^{BR}|_{\xi=\xi_o} &= \frac{g^2 u'_{in_o}}{16\pi(1-v)J_o^2} \left\{ \left( -(n_k \eta_k) \frac{\partial r}{\partial t} \right) (\delta_{im} C_2^{\Psi_B} + r_i r_m C_2^{XB}) - (n_k \eta_k) (r_i t_m C_2^{\Psi_B} + r_m t_i C_2^{\Gamma_B}) \right. \\
&+ \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \eta} ((r_m n_i + r_i n_m) C_5^{XB} + (r_m \eta_i + r_i \eta_m) C_6^{XB}) + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{C_4^{XB}}{3} (\eta_i n_m + \eta_m n_i) \\
&\left. + \frac{\partial r}{\partial \eta} (n_i t_m C_3^{\phi_B} + n_m t_i C_3^{\phi_B}) \right\}_{\xi=\xi_o} \quad (7-50)
\end{aligned}$$

### Caso 1, $n=\eta$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = 0$$

$$\begin{aligned}
f_{mn}^{BR}|_{\xi=\xi_o} &= \frac{g^2 u'_{in_o}}{16\pi(1-v)J_o^2} \left\{ -\text{sgn}(\delta) J (\delta_{im} C_2^{\Psi_B} + r_i r_m C_2^{XB}) - (r_i t_m C_2^{\Psi_B} + r_m t_i C_2^{\Gamma_B}) \right. \\
&+ \text{sgn}(\delta) J \frac{C_4^{XB}}{3} (\eta_i n_m + \eta_m n_i) \left. \right\}_{\xi=\xi_o} \quad (7-51)
\end{aligned}$$

### Caso 2, $n \neq \eta$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} \neq 0$$

$$f_{mn}^{BR}\Big|_{\xi=\xi_o} = \frac{g^2 u'_{in_o}}{16\pi(1-v)J^2} \left\{ -\text{sgn}(\delta)n_k n_k J \left( \delta_{im} C_2^{\Psi B} + r_i r_m C_2^{XB} \right) - n_k n_k \left( r_i t_m C_2^{\Psi B} + r_m t_i C_2^{\Gamma B} \right) \right. \\ \left. - t_k n_k \left( (r_{,m} n_i + r_i n_m) C_5^{XB} + (r_{,m} n_i + r_i n_m) C_6^{XB} \right) + \text{sgn}(\delta) J \frac{C_4^{XB}}{3} \left( \eta_i n_m + \eta_m n_i \right) \right. \\ \left. - \frac{\text{sgn}(\delta)}{J} t_k n_k \left( n_i t_m C_3^{\Phi B} + n_m t_i C_3^{\Phi B} \right) \right\}_{\xi=\xi_o} \quad (7-52)$$

onde

$$\begin{aligned} C_2^{\Psi B} &= (3-4v)/g^2 & C_2^{XB} &= -3/g^2 & C_2^{\Gamma B} &= -(1-4v)/g^2 \\ C_5^{XB} &= 2/g^2 & C_6^{XB} &= 1/g^2 & C_4^{XB} &= 6/g^2 \\ C_2^{\Phi B} &= (3-4v)/g^2 & C_2^{\Phi B} &= -(1-4v)/g^2 \end{aligned} \quad (7-53)$$

#### 7.1.4.2. Força de superfície não-clássica de $\mathbf{H}^{CR}$ , $\mathbf{p}^{CR}$

Define-se a tensão  $\mathbf{p}^{RC}$  do integrando da matriz  $\mathbf{H}^{CR}$  da seguinte forma

$$H_{im}^{CR} = \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^R n_k n_j u_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{im}^{CR} u_{in} d\Gamma \quad (7-54)$$

$$p_{im}^{CR} = \mu_{kjm}^R n_k n_j = \frac{\partial \mu_{kjm}^R}{\partial \eta} n_k n_j$$

que simplificada é

$$p_{im}^{CR} = \frac{g^2}{16\pi(1-v)} \left\{ \left( 2 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right) \left( \delta_{im} \Psi_2^C + r_i r_m X_2^C \right) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial \eta} \left( \delta_{im} \Psi_2^C + r_i r_m X_3^C \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \left( r_{,m} \eta_i + r_i \eta_m \right) X_4^C + \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} \left( r_{,i} n_m Y_2^C + r_{,m} t_i Z_2^C \right) + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} \left( r_{,i} n_m Y_3^C + r_{,m} n_i Z_3^C \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial r}{\partial n} \left( \eta_{,i} n_m Y_4^C + \eta_{,m} n_i Z_4^C \right) + \frac{\partial r}{\partial \eta} \left( \delta_{im} \Phi_3^C + n_i n_m \Phi_3^C + r_i r_m X_5^C \right) + \left( r_{,m} \eta_i + r_i \eta_m \right) X_4^C / 3 \right\} \quad (7-55)$$

onde

$$\begin{aligned} Y_3^C &= Y_2^C - Y_2^C / r = C_3^{YC} \frac{1}{r} + O(r) \\ X_3^C &= X_2^C / r - 2X_2^C / r^2 = C_3^{XC} \frac{1}{r} + O(1) \\ X_4^C &= X_2^C / r = C_4^{XC} \frac{1}{r} + O(r) \\ X_5^C &= X_2^C / 3 - 2X_2^C / (3r) = C_5^{YC} \frac{1}{r} + O(r) \\ Z_3^C &= Z_2^C - Z_2^C / r = C_3^{ZC} + O(r^2) \\ \Phi_3^C &= \Phi_2^C = C_3^{\Phi C} \ln(r) + O(r^2) \\ \Phi_3^C &= \Phi_2^C = C_3^{\Phi C} \frac{1}{r} + O(r) \end{aligned} \quad (7-56)$$

A seguir o integrando livre  $f_{im}^{CR}$

$$\int_{\Gamma} p_{im}^{CR} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f_{mn}^{CR} d\Gamma \quad (7-57)$$

que fica do seguinte seito

$$\begin{aligned} f_{mn}^{CR} = p_{im}^{CR} r u_{in} = & \frac{g^2 u_{in}}{16\pi(1-v)} \left\{ r \left( \frac{2}{r} \left( n_k \eta_k + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right) (\delta_{im} \Psi_2^C + r_{,i} r_{,m} X_2^C) + r \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{im} \Psi_2^C + r_{,i} r_{,m} X_3^C) \right. \\ & - r \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 (r_{,m} \eta_i + r_{,i} \eta_m) X_4^C + r \frac{2}{r} \left( n_k \eta_k + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) (r_{,i} n_{,m} Y_2^C + r_{,m} t_i Z_2^C) \\ & + r \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} (r_{,i} n_{,m} Y_3^C + r_{,m} n_i Z_3^C) + r \frac{\partial r}{\partial n} (\eta_{,i} n_{,m} Y_4^C + \eta_{,m} n_i Z_4^C) + r \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{im} \Phi_3^C + n_i n_{,m} \Phi_3^C + r_{,i} r_{,m} X_5^C) \\ & \left. + r (r_{,m} \eta_i + r_{,i} \eta_m) X_4^C / 3 \right\} \end{aligned} \quad (7-58)$$

que avaliado no ponto de singularidade fica

$$f_{mn}^{RC} \Big|_{\xi=\xi_o} = \frac{g^2 u_{in_o}}{16\pi(1-v)} \left\{ 2(n_k \eta_k)(r_{,i} n_{,m} C_2^{YC} + r_{,m} t_i C_2^{ZC}) + \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{im} C_3^{\Phi C} + r_{,i} r_{,m} C_5^{XC}) + (r_{,m} \eta_i + r_{,i} \eta_m) C_4^{XC} / 3 \right\}_{\xi=\xi_o} \quad (7-59)$$

### Caso 1, $n=\eta$

$$\partial r / \partial \eta = 0$$

$$f_{mn}^{RC} \Big|_{\xi=\xi_o} = \frac{g^2 u_{in_o}}{16\pi(1-v)} \left\{ 2(r_{,i} n_{,m} C_2^{YC} + r_{,m} t_i C_2^{ZC}) + (r_{,m} \eta_i + r_{,i} \eta_m) C_4^{XC} / 3 \right\}_{\xi=\xi_o} \quad (7-60)$$

### Caso 2, $n \neq \eta$

$$\partial r / \partial \eta \neq 0$$

$$f_{mn}^{RC} \Big|_{\xi=\xi_o} = \frac{g^2 u_{in_o}}{16\pi(1-v)} \left\{ 2(n_k \eta_k)(r_{,i} n_{,m} C_2^{YC} + r_{,m} t_i C_2^{ZC}) + \frac{\text{sgn}(\delta) t_k \eta_k}{J} (\delta_{im} C_3^{\Phi C} + r_{,i} r_{,m} C_5^{XC}) + (r_{,m} \eta_i + r_{,i} \eta_m) C_4^{XC} / 3 \right\}_{\xi=\xi_o} \quad (7-61)$$

onde

$$\begin{aligned} C_2^{YC} &= 2(1-2v)/g^2 & C_2^{ZC} &= -2(1-2v)/g^2 & C_3^{\Phi C} &= (3-4v)/g^2 \\ C_5^{XC} &= 2/g^2 & C_5^{XC} &= -3/g^2 \end{aligned} \quad (7-62)$$

### 7.1.4.3. Integração da parte finita de $H^{BR}$ e $H^{CR}$

Igualmente ao caso da singularidade  $1/r$  de  $H^A$  a integração da parte finita de  $H^{BR}$  e  $H^{CR}$  é dada por parcela singular  $\mu_{kjm}^{R,SING}$  mais uma parcela regular  $\mu_{kjm}^{R,REG}$  e finalmente outra logarítmica  $\mu_{kjm}^{R,LN}$  como é mostrado a seguir

$$\begin{aligned}\mu_{kjm}^R &= \mu_{kjm}^{R,SING} + \mu_{kjm}^{R,REG} + \mu_{kjm}^{R,LN} \\ &= \mu_{kjm}^{R,GL} + \mu_{kjm}^{R,LN}\end{aligned}\quad (7-63)$$

e

$$\mu_{kjm}^{R,PF} = \mu_{kjm}^{R,SING} + \mu_{kjm}^{R,REG} \quad (7-64)$$

**Caso único:**  $\exists$  Singularidade ( $M = ig[ns] \vee M = ig[ns+1]$ )  $\wedge$  ( $M = N \vee M \neq N$ )

$H^{BR}$ :

$$H_{mn}^{BR} = \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^R t_j n_k u_m' d\Gamma = pf \int_{\Gamma} p_{im}^{BR,PF} u_{in}' d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} p_{im}^{BR,LN} u_{in}' d\Gamma$$

ou

$$(7-65)$$

$$H_{mn}^{BR} = GL \int_{\Gamma} p_{im}^{BR,PF} u_{in}' d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} p_{im}^{BR,LN} u_{in}' d\Gamma + f_{mn}^{BR} \Big|_{\xi=\xi_o} \operatorname{sgn}(\delta) (\ln(J_o) - I^{\xi})$$

e  $H^{CR}$ :

$$H_{mn}^{CR} = \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^R n_j n_k u_{in} d\Gamma = pf \int_{\Gamma} p_{im}^{CR,PF} u_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} p_{im}^{CR,LN} u_{in} d\Gamma$$

ou

$$(7-66)$$

$$H_{mn}^{CR} = GL \int_{\Gamma} p_{im}^{CR,PF} u_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} p_{im}^{CR,LN} u_{in} d\Gamma + f_{mn}^{CR} \Big|_{\xi=\xi_o} \operatorname{sgn}(\delta) (\ln(J_o) - I^{\xi})$$

#### 7.1.4.4. Integração da parte descontínua de $H^{CR}$

A integração da parte descontínua de  $H^{CR}$  é dada pelo caso onde  $M=N$ , ou seja onde o ponto fonte e o ponto campo são os mesmos; tal como se mostrou na seção 5.2, a parte descontínua de  $H^{CR}$  provem da derivação direcional da primeira equação da formulação do MHEC no contexto da EG

$$\begin{aligned}W_{\bar{m}}^R &= H_{\bar{m}n}^{pf,AR} d_n + H_{\bar{m}n}^{pf,BR} d_n + H_{\bar{m}n}^{pf,CR} q_{\bar{n}} + c_{\bar{m}i}^A \frac{\partial u_i^d(X)}{\partial \eta} = F_{\bar{m}r}^R p_r^* + b_s^R \\ &= H_{\bar{m}n}^{pf,AR} d_n + H_{\bar{m}n}^{pf,BR} d_n + H_{\bar{m}n}^{pf,CR} q_{\bar{n}} + c_{\bar{m}i}^A q_i^d(X) = F_{\bar{m}r}^R p_r^* + b_s^R\end{aligned}\quad (7-67)$$

onde se pode apreciar que a parcela descontínua que acompanha ao deslocamento não-clássico corresponde à parte descontínua da matriz  $H$  clássica, mostrada de forma analítica e geral na seção 5.3.1. O detalhe é que a colocação é feita nos graus de liberdade não-clássicos, e portanto a parte descontínua de  $H^A$  passa a formar parte da parte descontínua de  $H^{CR}$  só que de uma maneira mais expandida.

A incidência nodal está representada aqui pelo vetor normal do ponto fonte  $\eta$ , vinculado como o gdl não-clássico  $\bar{m}$  (ponto  $M$ ) e pelos ângulos entre as dois

tangentes adjacentes do ponto campo,  $\theta^+ = \alpha + \beta + \pi$  e  $\theta^- = \alpha$ , vinculado como gdl  $n$ , (ponto N), tao como se mostra na figura da seção 5.3.1.

#### 7.1.4.5. Estrutura da banda da parte finita e descontínua da matriz H

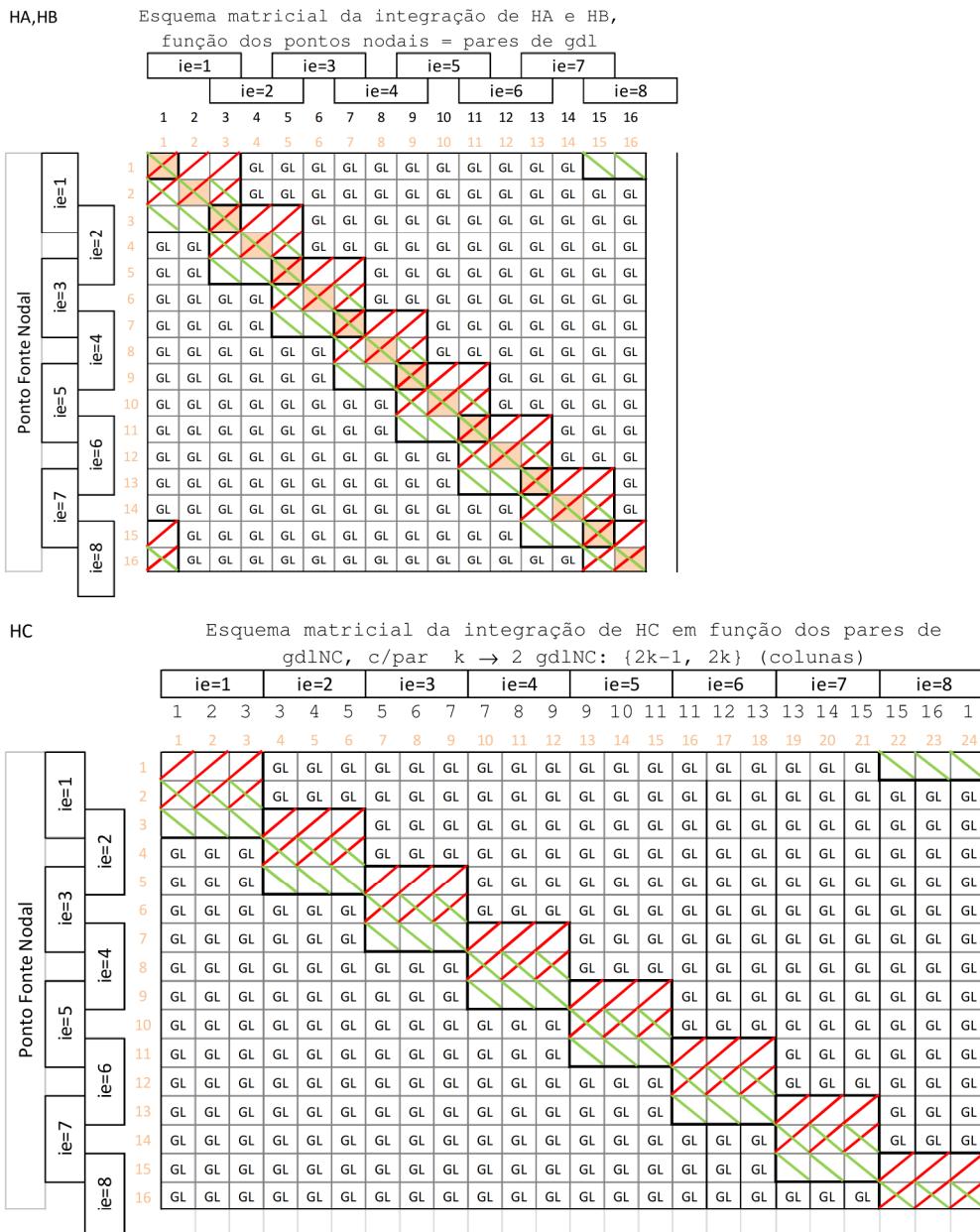


Figura 14. Estrutura da banda da Matrix  $H^*$  com singularidades o integração impropria.

### Tipo de Integração

Singular ou logarítmica no extremo inferior mais GR, matriz 2x2

:  $\xi=0 \{1/\xi, \ln(\xi)\}$

Singular ou logarítmica no extremo superior mais GR, matriz 2x2

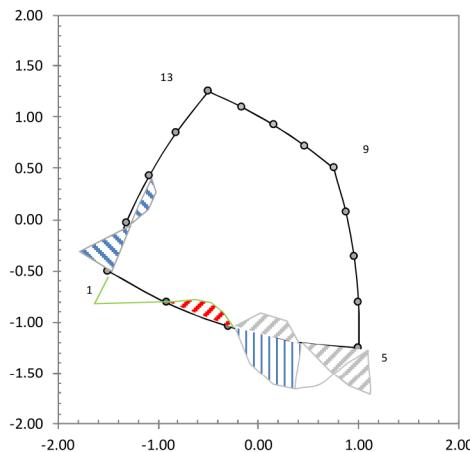
:  $\xi=1 \{1/(1-\xi), \ln(1-\xi)\}$

Singular ou logarítmica nos ambos extremos mais GR, matriz 2x2

:  $\{\xi=0 \{1/\xi, \ln(\xi)\}, 1/(1-\xi), \ln(1-\xi)\}$

Só GR, Gauss Regular, matriz 2x2

GL

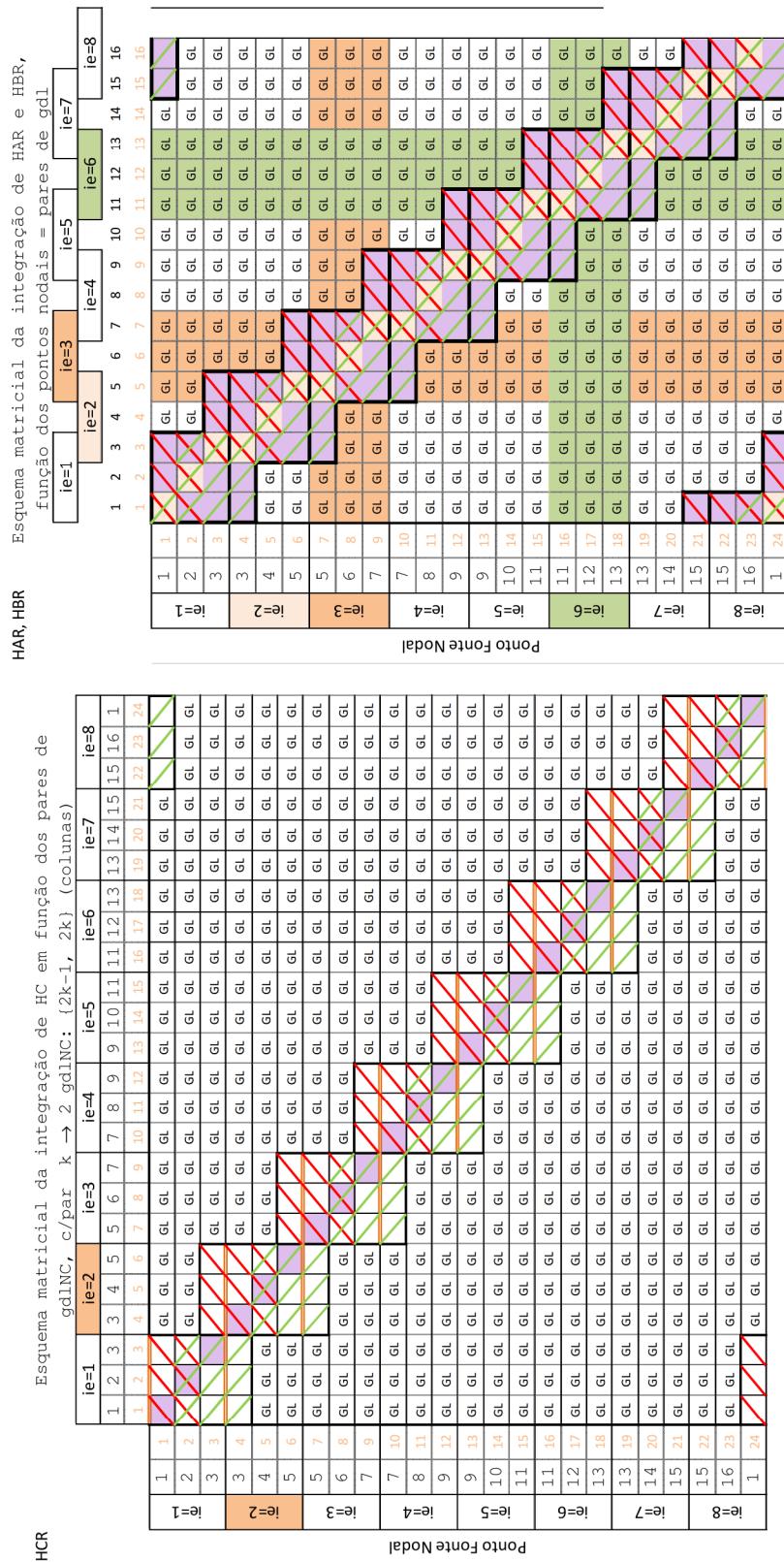


Nota:

Muestra singularidad onde precisa-se parte finita

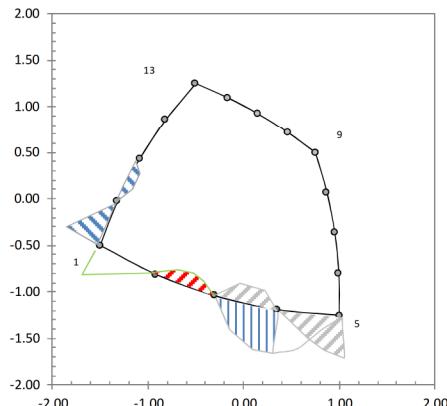
Exemplo: Sólido 16 nós,  
8 elementos quadráticos, 32 gdIC,  
48 gdINC, 80 gdl total.

Figura 15. Legenda da identificação de singularidades na Matrix  $H^*$ .

Figura 16. Estrutura da banda da Matrix  $H^R$  com singularidades e integração imprópria.

### Tipo de Integração

- Singular ou logarítmica no extremo inferior mais GR, matriz 2x2**  
:  $\xi=0 \quad \{1/\xi^2, 1/\xi, \ln(\xi)\}$
- Singular ou logarítmica no extremo superior mais GR, matriz 2x2**  
:  $\xi=1 \quad \{1/\xi^2, 1/\xi, \ln(\xi)\}$
- Singular ou logarítmica nos ambos extremos mais GR, matriz 2x2**  
:  $\{\xi=0, \xi=1\} \quad \{1/\xi, 1/\xi^2, \ln(\xi), 1/(1-\xi), 1/(1-\xi)^2, \ln(1-\xi)\}$
- Só GR, Gauss Regular, matriz 2x2**  
GL



Nota:

- Mostra singularidade onde precisa-se parte finita HBR e HCR
- Mostra singularidade onde precisa-se parte finita HAR & HBR  
e também parte descontínua
- Mostra singularidade onde precisa-se parte finita HCR  
e também parte descontínua

Exemplo: Sólido 16 nós,  
8 elementos quadráticos, 32 gdiC,  
48 gdINC, 80 gdi total.

Figura 17. Legenda da identificação de singularidades na Matrix  $H^R$ .

### 7.1.5. Equações utilitárias para o cálculo de termos livres

A primeira identidade está vinculada com o gradiente direcional ao vetor tangente

$$\frac{\partial r}{\partial t} = r_{,j} t_j = \frac{x_{,j} x'_j}{r} = \frac{\bar{x}_{,j} \bar{x}'_j}{\bar{r}} = \frac{\bar{x}_{,j} (\bar{x}' \delta + \bar{x}_{,j})}{\bar{r}} = \frac{\bar{x}_{,j} \bar{x}' \delta}{\bar{r}} + \bar{r} \quad (7-68)$$

onde  $\delta = \xi - \xi_o$  e considerando que  $\bar{r} = \text{sgn}(\delta) \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ . Portanto

$$\left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_o} = \left. \frac{\bar{x}_{,j} \bar{x}'_j}{\bar{r}} \right|_{\xi=\xi_o} = \left. \frac{\bar{x}_{,j} \bar{x}_j}{\bar{r}} \right|_{\xi=\xi_o} = \left. \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}} \right|_{\xi=\xi_o} = \bar{r}_o = J_o \text{sgn}(\delta) \quad (7-69)$$

Por outro lado para 2D

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = -r_{,j} \eta_j = -\frac{x_{,j} \eta_j}{r} = -\frac{\bar{x}_{,j} \eta_j}{\bar{r}} = -\frac{\bar{x} \eta_x + \bar{y} \eta_y}{\bar{r}} \quad (7-70)$$

Portanto, de forma genérica

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_o} = -\left. \frac{\bar{x}_{,j} \eta_j}{\bar{r}} \right|_{\xi=\xi_o} = -\left. \frac{x_{,j} \eta_j}{r} \right|_{\xi=\xi_o} = -\frac{\text{sgn}(\delta)}{J_o} \tilde{t}_o \cdot \tilde{\eta}_o \neq 0 \quad (7-71)$$

Só se  $\eta = n$  (em pontos com continuidade  $C^1$  ou onde as duas normais encontram-se numa esquina no mesmo canto) então

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_o} = 0 \quad (7-72)$$

Em geral, em qualquer ponto de singularidade  $\xi = \xi_o$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial n} \right|_{\xi=\xi_o} = 0 \quad (7-73)$$

A seguinte identidade está vinculada com os gradientes duplos

$$\frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} = -\frac{1}{r} (\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}) n_i \eta_k = -\frac{1}{r} \left( n_k \eta_k + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \quad (7-74)$$

Que é indeterminado no ponto de singularidade. A seguinte equação

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial t} = -\frac{1}{r} (\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}) \eta_i t_k = -\frac{1}{r} \left( \eta_k t_k + \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial t} \right) \quad (7-75)$$

é finita para 2D no ponto de singularidade.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial t} \right|_{\xi=\xi_o} &= -\left\{ \frac{1}{\bar{r} \delta} \left( \eta_k (\bar{x}'_k \delta + \bar{x}_{,k}) - \left( \frac{\bar{x}'_k \bar{x}_k \delta}{\bar{r}} + \bar{r} \right) \frac{\eta_k \bar{x}_k}{\bar{r}} \right) \right\}_{\xi=\xi_o} \\ &= -\left\{ \frac{1}{\bar{r} \delta} \left( \eta_k \bar{x}'_k \delta - \left( \frac{\bar{r}'}{\bar{r}} \right) \eta_k \bar{x}_k \delta \right) \right\}_{\xi=\xi_o} \\ &= -\frac{\text{sgn}(\delta)}{J_o} \left( \eta_k \bar{x}'_k - \left( \frac{J'}{2J} \right) \eta_k \bar{x}_k \right) \end{aligned} \quad (7-76)$$

Se  $\mathbf{n}=\boldsymbol{\eta}$  então

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial t} \Big|_{\xi=\xi_0} = -\frac{\text{sgn}(\delta)}{2J_o} (n_k x''_k)_{\xi=\xi_0} \quad (7-77)$$

A identidade seguinte é sempre satisfeita

$$\left( \boldsymbol{\eta}_k t_k + \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial r}{\partial t} \right)_{\xi=\xi_0} = 0$$

Também são úteis as seguintes expressões

$$\begin{aligned} (n_i r_{,m} - n_m r_{,i})_{\xi=\xi_0} &= \text{sgn}(\delta) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \\ n_m \boldsymbol{\eta}_i - n_i \boldsymbol{\eta}_m &= -\frac{1}{J} t_k \boldsymbol{\eta}_k \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \\ -\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\eta}} (n_i r_{,m} - n_m r_{,i})_{\xi=\xi_0} &= \left( \frac{1}{J} t_k \boldsymbol{\eta}_k \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \right)_{\xi=\xi_0} \end{aligned} \quad (7-78)$$