

6

Tensões clássicas e não-clássicas na EG

6.1. Tensões e deslocamentos generalizados na EG (formato indicial)

6.1.1. Solução Fundamental 2D

Parte-se novamente da solução fundamental da elasticidade gradiente

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\Theta \delta_{im} - \Lambda r_{,i} r_{,m} \right] \quad (6-1)$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta &= -2(3-4\nu) \ln r + \frac{4g^2}{r^2} - 2(3-4\nu) K_0 \left(\frac{r}{g} \right) - 2K_2 \left(\frac{r}{g} \right) \\ \Lambda &= -2 + \frac{8g^2}{r^2} - 4K_2 \left(\frac{r}{g} \right) \end{aligned} \quad (6-2)$$

6.1.2. Solução não-clássica q^* : gradiente direcional à normal do ponto campo

A solução fundamental não-clássica q^* no ponto campo $\mathbf{Y}$ é determinada do gradiente direcional de $\mathbf{u}^*$ à normal $\mathbf{n}$ no ponto campo $\mathbf{Y}$ originada por uma força clássica no ponto fonte $\mathbf{X}$.

$$\begin{aligned} q_{im}^* &= u_{im,j}^* n_j \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\Theta' \delta_{im} r_{,j} - \frac{\Lambda}{r} \delta_{ij} r_{,m} - \frac{\Lambda}{r} \delta_{jm} r_{,i} - \left(\Lambda' - \frac{2\Lambda}{r} \right) r_{,i} r_{,m} r_{,j} \right] n_j \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\Theta' \delta_{im} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\Lambda}{r} n_{,i} r_{,m} - \frac{\Lambda}{r} n_{,m} r_{,i} - \left(\Lambda' - \frac{2\Lambda}{r} \right) r_{,i} r_{,m} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\left(\Theta' \delta_{im} - \left(\Lambda' - \frac{2\Lambda}{r} \right) r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\Lambda}{r} (n_{,i} r_{,m} + n_{,m} r_{,i}) \right] \end{aligned} \quad (6-3)$$

Que finalmente fica da forma seguinte

$$q_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\left(\Theta' \delta_{im} - \Lambda_1 r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial r}{\partial n} - \Lambda_2 (n_{,i} r_{,m} + n_{,m} r_{,i}) \right] \quad (6-4)$$

Onde os novos termos são dados por

$$\begin{aligned}
\Theta' &= \frac{\partial \Theta}{\partial r} = -\frac{2}{r}(3-4\nu) - \frac{8g^2}{r^3} - \frac{8}{g}(1-\nu)K_1\left(\frac{r}{g}\right) + \frac{4}{r}K_2\left(\frac{r}{g}\right) \\
\Lambda' &= \frac{\partial \Lambda}{\partial r} = -\frac{16g^2}{r^3} + \frac{4}{g}K_1\left(\frac{r}{g}\right) + \frac{8}{r}K_2\left(\frac{r}{g}\right) \\
\Lambda_1 &= \Lambda' - \frac{2\Lambda}{r} \\
\Lambda_2 &= \frac{\Lambda}{r}
\end{aligned} \tag{6-5}$$

6.1.3. Solução não-clássica q^R : gradiente direcional ao vetor normal do ponto fonte

A solução fundamental não-clássica q^R no ponto campo Y é determinada do gradiente direcional de q^* à normal η do ponto fonte X originada por uma força não-clássica em esse ponto.

$$\begin{aligned}
q_{im}^R &= -q_{im,j}^* \eta_j \\
&= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\Theta' \delta_{im} - \Lambda_1 r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial r}{\partial n} - \Lambda_2 (n_i r_{,m} + n_m r_{,i}) \right] \\
&= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\left(\Theta'' \frac{\partial r}{\partial \eta} \delta_{im} - \Lambda_1' \frac{\partial r}{\partial \eta} r_{,i} r_{,m} + \frac{\Lambda_1}{r} \left(\eta_{,i} r_{,m} + \eta_{,m} r_{,i} + 2r_{,i} r_{,m} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\
&\quad \left. + \left(\Theta' \delta_{im} - \Lambda_1 r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} - \Lambda_2' \frac{\partial r}{\partial \eta} (n_i r_{,m} + n_m r_{,i}) + \frac{\Lambda_2}{r} \left(n_i \eta_{,m} + n_i r_{,m} \frac{\partial r}{\partial \eta} + n_m \eta_{,i} + n_m r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \right] \\
&= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\left(\Theta'' \delta_{im} + \Lambda_3 r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial n} + \Lambda_4 (\eta_{,i} r_{,m} + \eta_{,m} r_{,i}) \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\
&\quad \left. + \left(\Theta' \delta_{im} - \Lambda_1 r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} + \Lambda_5 \frac{\partial r}{\partial \eta} (n_i r_{,m} + n_m r_{,i}) + \Lambda_6 (n_i \eta_{,m} + n_m \eta_{,i}) \right]
\end{aligned} \tag{6-6}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
q_{im}^R &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\left(\Theta'' \delta_{im} + \Lambda_3 r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\Theta' \delta_{im} - \Lambda_1 r_{,i} r_{,m} \right) \frac{\partial^2 r}{\partial n \partial \eta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial r}{\partial \eta} \Lambda_5 (n_i r_{,m} + n_m r_{,i}) + \frac{\partial r}{\partial n} \Lambda_4 (\eta_{,i} r_{,m} + \eta_{,m} r_{,i}) + \Lambda_6 (n_i \eta_{,m} + n_m \eta_{,i}) \right]
\end{aligned} \tag{6-7}$$

Onde

$$\begin{aligned}
\Lambda_3 &= \frac{2\Lambda_1}{r} - \Lambda'_1 \\
\Lambda_4 &= \frac{\Lambda_1}{r} \\
\Lambda_5 &= \frac{\Lambda_2}{r} - \Lambda'_2 \\
\Lambda_6 &= \frac{\Lambda_2}{r}
\end{aligned} \tag{6-8}$$

6.1.4. Tensão de Cauchy

Igualmente, é possível determinar a tensão de Cauchy a qual difere do caso clássico pela inclusão de parcelas não-clássicas compostas por funções de Bessel. A tensão de Cauchy da EG difere também da tensão total não-clássica no sentido de ser esta última excepcionalmente equivalente á tensão de Cauchy clássica, fato não trivial que também não é mencionado estranhamente na literatura. A tensão de Cauchy na elasticidade gradiente é dada por

$$\begin{aligned}
\tau_{jim}^* &= \mu(u_{im,j}^* + u_{im,j}^*) + \lambda u_{km,k}^* \delta_{ji} \\
&= \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \left((r_{,j} \delta_{im} + r_{,i} \delta_{jm}) \Psi_1 + r_{,i} r_{,j} r_{,m} X_1 + r_{,i} \delta_{jm} \phi_1 \right)
\end{aligned} \tag{6-9}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \Theta' - \Lambda / r \\
X_1 &= 4\Lambda / r - 2\Lambda' \\
\phi_1 &= \frac{2\nu}{1-2\nu} (\Theta' - \Lambda' - (\alpha-1)\Lambda / r) - 2\Lambda / r
\end{aligned} \tag{6-10}$$

6.1.5. A tensão não-clássica 2D na EG

A tensão de segunda ordem é dada por

$$\mu_{kjim}^* = g^2 \tau_{jim,k}^* \tag{6-11}$$

que analiticamente é

$$\begin{aligned}
\mu_{kjim}^* &= \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ (r_{,j} r_{,k} \delta_{im} + r_{,i} r_{,k} \delta_{jm}) \left(\Psi'_1 - \frac{\Psi_1}{r} \right) + (r_{,j} r_{,m} \delta_{ik} + r_{,i} r_{,j} \delta_{km} + r_{,i} r_{,m} \delta_{kj}) \frac{X_1}{r} \right. \\
&\quad \left. + r_{,k} r_{,m} \delta_{ij} \left(\phi'_1 - \frac{\phi_1}{r} \right) + r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,m} \frac{3X_1}{r} + (\delta_{im} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm}) \Psi_1 + \delta_{km} \delta_{ij} \frac{\phi_1}{r} \right\}
\end{aligned} \tag{6-12}$$

6.2. Tensões explícitas na EG

Foi analisada as características das tensões totais soma da tensão de Cauchy e a tensão relativa $\sigma_{jim}^* = \tau_{jim}^* + s_{jim}^* = (1 - \nabla^2) \tau_{jim}^*$ a partir da solução fundamental quase singular (imprópria na origem, mas finita no limite) e comparada com os resultados da elasticidade clássica obtendo-se os mesmos resultados tanto para o caso 2D como 3D.

A continuação se apresentam os resultados obtidos da forma algébrica e explícita das tensões totais para os casos 2D e 3D. É possível visualizar como as parcelas não-clássicas vinculadas com a constante constitutiva não-clássica g , as funções de **BesselK**($n, r/g$) (para 2D) e **exp**(r/g) (para 3D) somem nas expressões finais das tensões totais resultando finalmente em tensões clássicas. A influência deste parâmetro participa na geração das novas parcelas da matriz **H** do MHEC na versão gradiente, isto é, nas tensões não-clássicas μ_{kijm}^* .

6.2.1. Tensões totais 2D

As tensões totais em 2D são idênticas ao caso clássico, isto é, $\sigma_{jim}^C = \sigma_{jim}^{NC}$, :

(clássico = não-clássico)

$$\begin{aligned}\sigma_{111}^* &= \frac{x^3(2\nu-3) - (1-2\nu)y^2x}{4r^4\pi(1-\nu)} \\ \sigma_{112}^* &= \frac{(1-2\nu)y^3 - x^2y(1+2\nu)}{4r^4\pi(1-\nu)} \\ \sigma_{121}^* &= \sigma_{211}^* = \frac{x^2y(2\nu-3) - (1-2\nu)y^3}{4r^4\pi(1-\nu)} \\ \sigma_{122}^* &= \sigma_{212}^* = \frac{y^2x(2\nu-3) - (1-2\nu)x^3}{4r^4\pi(1-\nu)} \\ \sigma_{221}^* &= \frac{(1-2\nu)x^3 - y^2x(2\nu+1)}{4r^4\pi(1-\nu)} \\ \sigma_{222}^* &= \frac{(2\nu-2)y^3 - x^2y(1-2\nu)}{4r^4\pi(1-\nu)}\end{aligned}$$

(6-13)

6.2.2. Tensões não-clássicas 2D

Seguidamente mostra-se a tensões não-clássicas μ_{kijm}^* que igualmente ao caso das tensões clássicas são simétricas em termos dos subscritos i, j, $\mu_{kijm}^* = \mu_{kijm}^*$.

$\mu^*, 2D:$

$$\begin{aligned}\mu_{1111}^* &= \frac{1}{2\pi(1-v)r^6} (-x^6 + vx^6 + 2vx^4y^2 + 3x^4g^2 - 3vx^4y^2 - 18x^2y^2g^2 - 2x^2y^4 + vx^2y^4 + 3g^2y^4)K_0(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} g(-vx^6 - 6x^4y^2 + 6x^4g^2 + vx^4y^2 - 4x^2y^4 - 36x^2y^2g^2 - vx^2y^4 - vy^6 + 6g^2y^4 + 2y^6)K_1(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} g^2(-3x^6 + 3x^4y^2 + 7x^2y^4 + 2vx^6 + 2vx^4y^2 - 2vx^2y^4 - 72x^2y^2g^2 + 12x^4g^2 + 12g^2y^4 + y^6 - 2vy^6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{1112}^* &= \frac{1}{2\pi(1-v)r^6} xy(x^4 - vx^4 + 12g^2x^2 - 2vx^2y^2 + x^2y^2 - vy^4 - 12g^2y^2)K_0(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} xyg(5x^4 - 2vx^4 + 2x^2y^2 - 4vx^2y^2 + 24g^2x^2 - 2vy^4 - 3y^4 - 24g^2y^2)K_1(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} xyg^2(-2vx^4 - 4vx^2y^2 + 3y^4 - 2vy^4 + 24g^2x^2 - x^4 - 24g^2y^2 + 2x^2y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{1121}^* &= \frac{1}{2\pi(1-v)r^6} xy(vx^4 - x^2y^2 + 2vx^2y^2 + 12g^2x^2 - y^4 + vy^4 - 12g^2y^2)K_0(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} xyg(-2vx^4 + 3x^4 - 2x^2y^2 + 4vx^2y^2 + 24g^2x^2 - 5y^4 + 2vy^4 - 24g^2y^2)K_1(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} xyg^2(2vx^4 + 4vx^2y^2 + y^4 + 2vy^4 + 24g^2x^2 - 3x^4 - 2x^2y^2 - 24g^2y^2) \\ &= \mu_{1211}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{1122}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-v)r^6} (x^6 - vx^6 + 3x^4g^2 - 2vx^4y^2 + x^4y^2 - 18x^2y^2g^2 - vx^2y^4 + 3g^2y^4)K_0(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} g(2x^6 - vx^6 + 6x^4g^2 - 4x^4y^2 - vx^4y^2 - 6x^2y^4 - 36x^2y^2g^2 + vx^2y^4 + vy^6 + 6g^2y^4)K_1(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} g^2(x^6 + 7x^4y^2 + 3x^2y^4 - 2vx^6 - 2vx^4y^2 + 2vx^2y^4 - 72x^2y^2g^2 + 12x^4g^2 + 12g^2y^4 - 3y^6 + 2vy^6) \\ &= \mu_{1212}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{1221}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-v)r^6} (vx^6 - x^4y^2 + 2vx^4y^2 + 3x^4g^2 - x^2y^4 - 18x^2y^2g^2 + vx^2y^4 + 3g^2y^4)K_0(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} g(x^6 - vx^6 - 5x^4y^2 + 6x^4g^2 + vx^4y^2 - 5x^2y^4 - 36x^2y^2g^2 - vx^2y^4 - vy^6 + 6g^2y^4 + y^6)K_1(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} g^2(-x^6 + 5x^2y^4 + 2vx^6 + 2vx^4y^2 - 2vx^2y^4 - 72x^2y^2g^2 + 12x^4g^2 + 12g^2y^4 - y^6 + 5x^4y^2 - 2vy^6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{1122}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-v)r^6} xy(2x^4 - vx^4 + 3x^2y^2 + 2vx^2y^2 + 12g^2x^2 + y^4 - vy^4 - 12g^2y^2)K_0(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} xyg(-2vx^4 + 7x^4 + 6x^2y^2 - 4vx^2y^2 + 24g^2x^2 - y^4 - 2vy^4 - 24g^2y^2)K_1(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} xyg^2(-2vx^4 - 4vx^2y^2 + 5y^4 - 2vy^4 + 24g^2x^2 + x^4 + 6x^2y^2 - 24g^2y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{2111}^* &= \frac{1}{2\pi(1-v)r^6} xy(-x^4 + vx^4 + 2vx^2y^2 - 3x^2y^2 + 12g^2x^2 - 2y^4 + vy^4 - 12g^2y^2)K_0(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} xyg(2vx^4 + x^4 - 6x^2y^2 - 4vx^2y^2 + 24g^2x^2 - 7y^4 + 2vy^4 - 24g^2y^2)K_1(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} xyg^2(24g^2x^2 - y^4 - 5x^4 + 4vx^2y^2 + 2vy^4 - 24g^2y^2 + 2vx^4 - 6x^2y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{2112}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-v)r^6} (3x^4g^2 + vx^4y^2 - x^2y^4 - 18x^2y^2g^2 + 2vx^2y^4 + vy^6 + 3g^2y^4)K_0(\gamma_g) \\ &- \frac{1}{2\pi(1-v)r^7} g(6x^6 - vx^6 - 5x^4y^2 + 6x^4y^2 - vx^4y^2 - 5x^2y^4 - 36x^2y^2g^2 + vx^2y^4 + vy^6 + 6g^2y^4 + y^6)K_1(\gamma_g) \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-v)r^8} g^2(5x^4y^2 + 2vy^6 - 2vx^4y^2 + 2vx^2y^4 - y^6 - 72x^2y^2g^2 + 12g^2y^4 + 12x^4g^2 + 5x^2y^4 - x^6 - 2vx^6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{2121}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-v)r^6}(-vx^4y^2 + 3x^4g^2 - 18x^2y^2g^2 + x^2y^4 - 2vx^2y^4 + 3g^2y^4 - vy^6)K_0(\gamma_g) \\
&\quad - \frac{1}{2\pi(1-v)r^7}g(-vx^6 - 6x^4y^2 + 6x^4g^2 + vx^4y^2 - 4x^2y^4 - 36x^2y^2g^2 - vx^2y^4 - vy^6 + 6g^2y^4 + 2y^6)K_1(\gamma_g) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi(1-v)r^8}g^2(-3x^6 + 3x^4y^2 + 7x^2y^4 + 2vx^6 + 2vx^4y^2 - 2vx^2y^4 - 72x^2y^2g^2 + 12x^4g^2 + 12g^2y^4 + y^6 - 2vy^6) \\
&= \mu_{2211}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{2122}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-v)r^6}xy(x^4 - vx^4 + 12g^2x^2 - 2vx^2y^2 + x^2y^2 - vy^4 - 12g^2y^2)K_0(\gamma_g) \\
&\quad - \frac{1}{2\pi(1-v)r^7}xyg(5x^4 - 2vx^4 + 2x^2y^2 - 4vx^2y^2 + 24g^2x^2 - 2vy^4 - 3y^4 - 24g^2y^2)K_1(\gamma_g) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi(1-v)r^8}xyg^2(-2vx^4 - 4vx^2y^2 + 3y^4 - 2vy^4 + 24g^2x^2 - x^4 - 24g^2y^2 + 2x^2y^2) \\
&= \mu_{2212}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{2121}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-v)r^6}xy(vx^4 - x^2y^2 + 2vx^2y^2 + 12g^2x^2 - y^4 - vy^4 - 12g^2y^2)K_0(\gamma_g) \\
&\quad - \frac{1}{2\pi(1-v)r^7}xyg(2vx^4 + 3x^4 - 2x^2y^2 + 4vx^2y^2 + 24g^2x^2 - 5y^4 + 2vy^4 - 24g^2y^2)K_1(\gamma_g) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi(1-v)r^8}xyg^2(2vx^4 + 4vx^2y^2 + y^4 + 2vy^4 + 24g^2x^2 - 3x^4 - 2x^2y^2 - 24g^2y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{2222}^* &= +\frac{1}{2\pi(1-v)r^6}(vx^4y^2 + 3x^4g^2 - 2x^4y^2 - 18x^2y^2g^2 - 3x^2y^4 + 2vx^2y^4 - y^6 + 3g^2y^4 + vy^6)K_0(\gamma_g) \\
&\quad - \frac{1}{2\pi(1-v)r^7}g(2x^6 - vx^6 + 6x^4g^2 - 4x^4y^2 - vx^4y^2 - 6x^2y^4 - 36x^2y^2g^2 + vx^2y^4 + vy^6 + 6g^2y^4)K_1(\gamma_g) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi(1-v)r^8}g^2(x^6 + 7x^4y^2 + 3x^2y^4 - 2vx^6 - 2vx^4y^2 + 2vx^2y^4 - 72x^2y^2g^2 + 12x^4g^2 + 12g^2y^4 - 3y^6 + 2vy^6)
\end{aligned}$$

(6-14)