

## 5 Formulação do MHECS na EG

### 5.1. Generalização das matrizes H e F (com $u^*$ e $u^R$ )

A formulação gradiente do MHECS é abordada a partir das equações da formulação teórica clássica desenvolvida por Dumont [48], onde a ideia principal consiste em eliminar o uso da matriz  $F$ :

$$H^T p^* = p \quad (5-1)$$

$$U^* p^* = d \quad (5-2)$$

Tenta-se utilizar a simplificação dos resultados obtidos da elasticidade clássica considerando as equações para cavidades em meios infinitos mostrados a seguir com traço superior.

$$H^T p^* = p \quad (5-3)$$

$$\bar{H}^T p^* = \bar{p} \quad (5-4)$$

$$\frac{\bar{H}^T + H^T}{(\bar{H}^T + H^T)} p^* \equiv p^* = p + \bar{p} \quad (5-5)$$

$$F p^* = H d \quad (5-6)$$

$$\bar{F} p^* = \bar{H} d \quad (5-7)$$

$$\frac{(\bar{F} + F) p^*}{(\bar{F} + F)} \equiv U^* p^* = d \quad (5-8)$$

As submatrizes que generalizariam a formulação original no contexto gradiente são construídas mediante o acréscimo de uma solução matricial fundamental não-clássica, Dumont e Huamán [49], cujos tensores com sobrescrito “R” se mostram nas seguintes identidades da parte finita de  $H$  e  $F$

$$H_{PF} = pf \left[ \begin{array}{cc} \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_j n_k u_{iq} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^R n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_j n_k u_{iq} d\Gamma \end{array} \right] = pf \begin{bmatrix} H^* \\ H^R \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

$$F_{PF} = pf \left[ \begin{array}{cc} \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_k u_{im,j}^* d\Gamma & \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im}^R d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_k u_{im,j}^R d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^R n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_k u_{im,j}^* d\Gamma & \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^R n_j u_{im}^R d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_k u_{im,j}^R d\Gamma \end{array} \right] = pf \begin{bmatrix} F^* \\ F^R \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{U}^*$  é dada por

$$\mathbf{U}^* \equiv U_{mn}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^* & \mathbf{u}^R \\ \mathbf{q}^* & \mathbf{q}^R \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (u_{im}^*)^{Y-X} & (n_k u_{i\ell,k}^*)^{X-Y} \\ (n_j u_{im,j}^*)^{Y-X} & (n_j \partial_j)^Y (n_k u_{i\ell,k}^*)^{X-Y} \end{bmatrix}_{\substack{i \rightarrow \text{gdl}(n) \\ j \rightarrow \text{gdl}(n)}} \quad (5-11)$$

onde  $\mathbf{Y-X}$  e  $\mathbf{X-Y}$  referem-se às coordenadas locais do ponto campo em relação ao ponto fonte e vice-versa;  $\mathbf{u}^*$  e  $\mathbf{q}^*$  correspondem aos campos de deslocamentos clássicos e não-clássicos, respectivamente, correspondentes à solução fundamental. A composição de uma “solução fundamental gradiente” identificada com o sobrescrito R é obtida através do gradiente direcional da solução fundamental em relação ao vetor normal no ponto fonte  $n_j^X$ . As coordenadas relativas definem-se segundo a notação seguinte

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^{Y-X} = -x_i^{X-Y} & \Rightarrow & \quad \partial x_i = \partial x_i^{Y-X} = -\partial x_i^{X-Y} \\ n_j &= n_j^Y \\ n_j^X &= n_j^X \end{aligned} \quad (5-12)$$

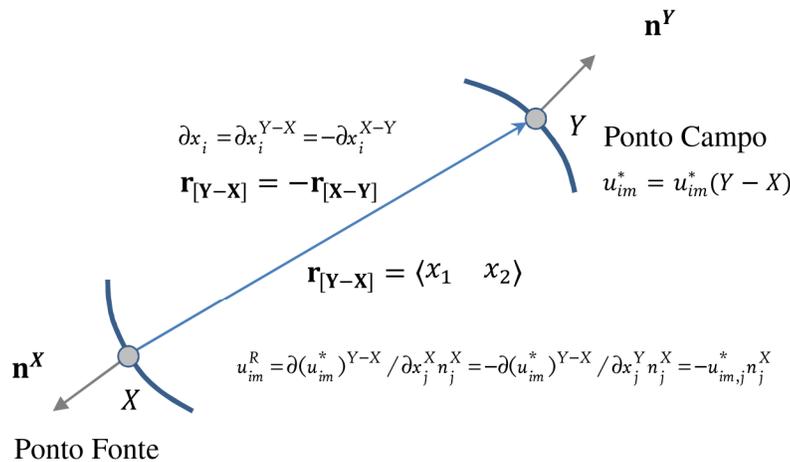


Figura 8. Gráfico onde se mostram as coordenadas relativas para o cálculo de  $\mathbf{u}^*$  e  $\mathbf{u}^R$

Portanto é possível simplificar a notação da seguinte maneira

$$u_{im}^* = (u_{im}^*)^{Y-X} = (u_{im}^*)^{X-Y} \quad (5-13)$$

$$u_{im}^R = \partial(u_{im}^*)^{Y-X} / \partial x_j^X n_j^X = -\partial(u_{im}^*)^{Y-X} / \partial x_j^Y n_j^X = -u_{im,j}^* n_j^X \quad (5-14)$$

e portanto a matriz  $\mathbf{U}^*$  resulta em termos de um só sistema de coordenadas de integração  $x_i = x_i^{Y-X}$  da seguinte maneira,

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{**} & \mathbf{U}^{*R} \\ \mathbf{U}^{R*} & \mathbf{U}^{RR} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{im}^* & -n_k^X \mathbf{u}_{i\ell,k}^* \\ n_j \mathbf{u}_{im,j}^* & -n_j n_k^X \mathbf{u}_{i\ell,kj}^* \end{bmatrix}_{\substack{i \rightarrow gdl(n) \\ j \rightarrow gdl(n)}} \quad (5-15)$$

Os tensores restantes com sobrescrito  $( )^R$  podem também definir-se através das identidades

$$\sigma_{jim}^R = -\sigma_{jim,s}^* n_s^X \quad (5-16)$$

$$\mu_{kjim}^R = -\mu_{kjim,s}^* n_s^X \quad (5-17)$$

ou também através das equações para o cálculo de tensões diretamente em função de  $\mathbf{u}^R$ .

A matriz  $\mathbf{H}$  deve satisfazer a propriedade espectral no cenário gradiente que considera deslocamentos de corpo rígido não-clássico representado por  $\mathbf{W}_q$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d} & \mathbf{H}_{\mu^*q} \\ \mathbf{H}_{\sigma^Rd} + \mathbf{H}_{\mu^Rd} & \mathbf{H}_{\mu^*q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_d \\ \mathbf{W}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{Bmatrix} \quad (5-18)$$

## 5.2. Vínculo formal entre $\mathbf{H}^*$ e $\mathbf{H}^R$

Com o intuito de completar o sistema de equações que permitam determinar todas as incógnitas clássicas e não-clássicas, é preciso de uma equação adicional. Parte-se da equação derivada do princípio de forças virtuais da forma seguinte

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ji}^* n_j (u_i^s - u_i^d) d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta \mu_{kji}^* n_k u_{i,j}^s d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \mu_{kji}^* n_j n_k q_i^d d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \delta \mu_{kji}^* n_k |J|^{-2} t_j t_l u_{i,l}^d d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5-19)$$

agora, se é levado em conta que

$$\delta \sigma_{ji}^* = \sigma_{jim}^* \delta p_m^* \quad (5-20)$$

$$\delta \mu_{kji}^* = \mu_{kjim}^* \delta p_m^*$$

e também a correspondência da incidência nodal (ponto  $M$ ) com o grau de liberdade ( $m$ )

$$m = 2M - 2 + k, \quad k = \{1,2\} \quad (5-21)$$

então é possível escrever a equação (5-19) da forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \delta p_m^* \sigma_{jim}^* n_j u_i^s d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta p_m^* \mu_{kjim}^* n_k u_{i,j}^s d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta p_m^* \mu_{kjim}^* n_j n_k q_i^d d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \delta p_m^* \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_l u_{i,l}^d d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta p_m^* \sigma_{jim}^* n_j u_i^d d\Gamma \end{aligned} \quad (5-22)$$

Se for eliminado da equação  $\delta p_m^*$  e realinhado então se obtém

$$\begin{aligned}
W_m^* &= \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i^d d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_i u_{i,j}^d d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_j n_k q_i^d d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i^s d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{i,j}^s d\Gamma
\end{aligned} \tag{5-23}$$

O critério seguido consiste em: (i) decompor as integrais em duas parcelas: uma parte finita e outra descontínua; (ii) ter presente que  $\mathbf{X}$  (correspondente ao ponto M) é o ponto fonte  $\mathbf{Y}$  ao ponto campo; depois é preciso ter em conta que o vetor normal, o vetor tangente e o deslocamento são funções só de  $\mathbf{Y}$  e as tensões são funções do raio  $\mathbf{r} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$  tal como é mostrado embaixo

$$\mathbf{r} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$$

$$\sigma_{jim}^* = \sigma_{jim}^*(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) = \sigma_{jim(\mathbf{Y}-\mathbf{X})}^*$$

$$\mu_{kjim}^* = \mu_{kjim}^*(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) = \mu_{kjim(\mathbf{Y}-\mathbf{X})}^*$$

$$n_j = n_j(\mathbf{Y}) = n_{j(\mathbf{Y})}$$

$$t_j = t_j(\mathbf{Y}) = t_{j(\mathbf{Y})}$$

$$u_i^p = u_i^p(\mathbf{Y}) = u_{i(\mathbf{Y})}^p$$

$$u_i^d = u_i^d(\mathbf{Y}) = u_{i(\mathbf{Y})}^d = u_{i(\mathbf{X})}^d + \frac{\partial u_{i(\mathbf{X})}^d}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$u_i^s = u_i^s(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) = u_{i(\mathbf{Y}-\mathbf{X})}^s = u_{ir}^* p_r^* + u_i^p$$

$$q_i^s = q_i^s(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) = q_{i(\mathbf{Y}-\mathbf{X})}^s = -u_{ir,j}^* \eta_j p_r^* = q_{ir}^* p_r^*$$

$$u_{im}^* = u_{im}^*(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) = u_{im(\mathbf{Y}-\mathbf{X})}^*$$

$$u_{im,j}^* = u_{im,j}^*(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) = u_{im,j(\mathbf{Y}-\mathbf{X})}^*$$

$$\eta_j = \eta_j(\mathbf{X}) = \eta_{j(\mathbf{X})}$$

$$\Gamma = d\Gamma_{(\mathbf{Y})} \tag{5-24}$$

Isto permite escrever a equação (5-23) com o campo de deslocamentos  $u_i^d$  em função de uma série de potências tendo como variável o raio  $\varepsilon$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
W_m^* &= pf \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i^d d\Gamma + pf \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_i u_{i,j}^d d\Gamma + pf \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_j n_k q_i^d d\Gamma \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{Disc}} \sigma_{jim}^* n_j \left( u_i^d(\mathbf{X}) + \frac{\partial u_i^d(\mathbf{X})}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) d\Gamma \right. \\
&+ \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_i \left( u_{i,j}^d(\mathbf{X}) + \frac{\partial u_{i,j}^d(\mathbf{X})}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) d\Gamma \\
&\left. + \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_j n_k \left( q_i^d(\mathbf{X}) + \frac{\partial q_i^d(\mathbf{X})}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) d\Gamma \right\}
\end{aligned} \tag{5-25}$$

Depois de avaliado, o limite fica

$$\begin{aligned}
W_m^* &= pf \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i^d d\Gamma + pf \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_i u_{i,l}^d d\Gamma + pf \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_j n_k q_i^d d\Gamma \\
&+ u_i^d(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \sigma_{jim}^* n_j d\Gamma + u_{i,l}^d(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_l d\Gamma \\
&+ q_i^d(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_j n_k d\Gamma
\end{aligned} \quad (5-26)$$

Se for considerada a incidência nodal do ponto N sobre o grau de liberdade  $n$  e utilizada as seguintes interpolações nodais

$$\begin{aligned}
u_i^d &= u_{in}^d \\
q_i^d &= u_{in}^d q_{\bar{n}}
\end{aligned} \quad (5-27)$$

e também a identidade

$$t_l \delta u_{i,l}^d = \frac{\partial u_i^d}{\partial \xi} \rightarrow t_l \delta u_{i,l}^d = \frac{\partial \delta u_i^d}{\partial \xi} = u'_{in} \delta d_n \quad (5-28)$$

a equação (5-26) resulta em

$$\begin{aligned}
W_m^* &= pf \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma d_n + pf \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j u'_{in} d\Gamma d_n + pf \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_j n_k u_{in} d\Gamma q_{\bar{n}} \\
&+ u_i^d(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \sigma_{jim}^* n_j d\Gamma + u_{i,l}^d(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_l d\Gamma \\
&+ q_i^d(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_j n_k d\Gamma
\end{aligned} \quad (5-29)$$

que depois de identificar as partes finitas das matrizes  $H^A$ ,  $H^B$  e  $H^C$  a equação em questão, fica

$$W_m^* = H_{mn}^{pf,A} d_n + H_{mn}^{pf,B} d_n + H_{m\bar{n}}^{pf,C} q_{\bar{n}} + c_{mi}^A u_{i(X)}^d + c_{mil}^B u_{i,l(X)}^d + c_{mi}^C q_{i(X)}^d \quad (5-30)$$

Se os coeficientes obtidos da parte descontínua são avaliados através de uma integração 2D num arco de circunferência então se obtém

$$\begin{aligned}
c_{mi}^A &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \sigma_{jim}^* n_j d\Gamma \neq 0 \\
c_{mil}^B &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j t_l d\Gamma = 0 \\
c_{mi}^C &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Disc}} \mu_{kjim}^* n_k n_j d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Os coeficientes são nulos devido à natureza da tensão  $\mu_{kjim}^*$  de não ter singularidade ( $1/r$ ) e só ter caráter impróprio logarítmico que somem no limite para diferencial de área no contorno da seguinte forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f \log(\varepsilon) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f \log(\varepsilon) \varepsilon d\Gamma = 0 \quad (5-31)$$

Isso faz que a equação (5-30) resulte em

$$W_m^* = H_{mn}^{pf,A} d_n + H_{mn}^{pf,B} d_n + H_{mn}^{pf,C} q_n + c_{mi}^A u_i^d(X) = F_{mr}^* p_r^* + b_m \quad (5-32)$$

A partir dessa equação é possível a obtenção de  $H^R$  aplicando a toda ela o operador  $\partial/\partial \eta$ , que só afeta aos termos que são função de  $X$

$$\begin{aligned}
W_m^R &= H_{mn}^{pf,AR} d_n + H_{mn}^{pf,BR} d_n + H_{m\bar{n}}^{pf,CR} q_{\bar{n}} + c_{mi}^A \frac{\partial u_i^d(X)}{\partial \eta} + \frac{\partial c_{mi}^A}{\partial \eta} u_i^d(X) = F_{mr}^R p_r^* + b_s^R \\
&= H_{mn}^{pf,AR} d_n + H_{mn}^{pf,BR} d_n + H_{m\bar{n}}^{pf,CR} q_{\bar{n}} + c_{mi}^A q_i^d(X) + c_{mi}^{AR} u_i^d(X) = F_{mr}^R p_r^* + b_s^R
\end{aligned} \quad (5-33)$$

Onde

$$H_{mn}^{pf,AR} = \frac{\partial H_{mn}^{pf,A}}{\partial \eta}, \quad H_{mn}^{pf,BR} = \frac{\partial H_{mn}^{pf,B}}{\partial \eta}, \quad H_{m\bar{n}}^{pf,CR} = \frac{\partial H_{m\bar{n}}^{pf,C}}{\partial \eta}, \quad q_i^d = \frac{\partial u_i^d}{\partial \eta}, \text{ etc.}$$

$$c_{mi}^A = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j d\Gamma$$

Se for considerado que o ponto  $\mathbf{X}$  representa o ponto fonte (ao ponto M) e que  $c_{mi}^A$  corresponde a parcela descontínua então é possível definir

$$\begin{aligned}
c_{mi}^A u_i^d(X) &= C_{mn}^* d_n \\
c_{mi}^A q_i^d(X) &= C_{m\bar{n}}^R q_{\bar{n}} \\
c_{mi}^{AR} u_i^d(X) &= C_{m\bar{n}}^{*R} d_n
\end{aligned} \quad (5-34)$$

Onde  $C_{mn}^*$  é uma matriz quadrada em banda cuja diagonal está composta de sub matrizes  $c_{mi}^A$  de ordem 2x2;  $C_{m\bar{n}}^R$  é também uma matriz quadrada em banda, mas com a ressalva de ter mais filas e colunas já que os graus de liberdade não-clássicos tem em cada ponto não suave 4 graus de liberdade não-clássicos: dois gdl para cada vetor normal em cada lado da esquina. Os subscritos  $\bar{m}, \bar{n}$  correspondem aos gdlNC vinculados com a incidência nodal do ponto campo M e do ponto fonte N, respectivamente.  $C_{m\bar{n}}^{*R}$  é a parcela descontínua com singularidade  $1/r^2$  tal como é definida por Guiggiani [25] e mostrado no Apêndice A.4. Conforme ao mencionado anteriormente se pode escrever (5-32) e (5-33) do seguinte jeito

$$W_m^* = H_{mn}^{pf,A} d_n + H_{mn}^{pf,B} d_n + H_{m\bar{l}}^{pf,C} q_{\bar{l}} + C_{mn}^* d_n = F_{mr}^* p_r^* + b_m \quad (5-35)$$

$$W_m^R = H_{mn}^{pf,AR} d_n + H_{mn}^{pf,BR} d_n + H_{m\bar{n}}^{pf,CR} q_{\bar{n}} + C_{m\bar{n}}^R q_{\bar{n}} + C_{m\bar{n}}^{*R} d_n = F_{mr}^R p_r^* + b_m^R \quad (5-36)$$

O também matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B + \mathbf{C}^* & \mathbf{H}^C \\ \mathbf{H}^{AR} + \mathbf{H}^{BR} + \mathbf{C}^{*R} & \mathbf{H}^{CR} + \mathbf{C}^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^* \\ \mathbf{F}^R \end{bmatrix} \mathbf{p}^* + \mathbf{b} \quad (5-37)$$

### 5.3. Análise das descontinuidades de H e F na EG

Foi feito uma análise das parcelas descontínuas de  $\mathbf{F}$  para pontos de descontinuidade coincidentes, isto é,  $\mathbf{u}^*$  e  $\boldsymbol{\sigma}^*$  com o mesmo ponto fonte. Além, é necessário identificar as singularidades de cada uma dos termos que aparecem nas

equações integrais as quais foram decompostas em diferentes parcelas de acordo ao tipo de singularidade  $1/r$ ,  $1/r^2$ , se é um integrando improprio  $\ln(r)$  e finalmente se é da forma polinomial.

$$\begin{aligned}\mu_{kjm}^* &= \mu_{kjm}^{*,POL} + \mu_{kjm}^{*,LN} \ln(r/2g) \\ \mu_{kjm}^R &= \frac{1}{r} \mu_{kjm}^{*,SING} + \mu_{kjm}^{*,POL} + \mu_{kjm}^{*,LN} \ln(r/2g) \\ \sigma_{jim}^* &= \frac{1}{r} \sigma_{jim}^{*,SING} \\ \sigma_{jim}^R &= \frac{1}{r^2} \sigma_{jim}^{*,SING}\end{aligned}\quad (5-38)$$

### 5.3.1. Descontinuidades analíticas de H

As descontinuidades de  $\mathbf{H}$  se mostram a seguir desconsiderando as que são nulas. A descontinuidade de parte inferior direita da matriz é obtida da derivação direcional da parte descontínua do deslocamento que acompanha ao integrando livre da parte superior da matriz  $\mathbf{H}$ , como se mostra em detalhe na seção 6.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d} & \mathbf{H}_{\mu^*q} \\ \mathbf{H}_{\sigma^*d} & \mathbf{H}_{\mu^*d} & \mathbf{H}_{\mu^*q} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{PF} = \rho f \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* t_k n_j u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_j n_k u_{iq} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^R n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R t_k n_j u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_j n_k u_{iq} d\Gamma \end{bmatrix}$$

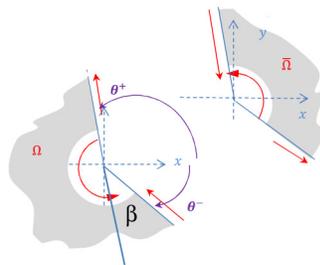
Caso General (Contorno suave, casos vinculados con  $u_{im}^R$ ,  $\beta = 0$ )

$$\mathbf{H}_{,DISC} = \int_{\Gamma} f d\Gamma = \int_{\alpha}^{\alpha+\beta+\pi} f(\theta) R d\theta \quad \wedge \quad \overline{\mathbf{H}}_{,DISC} = \int_{\overline{\Gamma}} f d\Gamma = \int_{\alpha+\beta+\pi}^{\alpha+2\pi} f(\theta) R d\theta$$

Parte Superior de H

$$\mathbf{H}_{\sigma^*d,DISC} + \overline{\mathbf{H}}_{\sigma^*d,DISC} = \mathbf{C}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{H}_{\sigma^*q,DISC} + \overline{\mathbf{H}}_{\sigma^*q,DISC} = \mathbf{C}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1) = \mathbf{I}$$



Onde

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta) + 2(\pi-\beta)(1-\nu) & \cos(\alpha)^2 - \cos(\alpha+\beta)^2 \\ \cos(\alpha)^2 - \cos(\alpha+\beta)^2 & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta) + 2(\pi-\beta)(1-\nu) \end{bmatrix}$$

(5-39)

### 5.3.2. Descontinuidades analíticas de F

A descontinuidade de  $\mathbf{F}$  é dada por uma composição da matriz  $\mathbf{U}$  e a parcela descontínua clássica de H, tanto para a submatriz superior esquerda como para a direita, se expõe também a obtenção da descontinuidade da parcela inferior como resultado da derivação direcional.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\sigma^* u^*} + \mathbf{F}_{\mu^* t^*} & \mathbf{F}_{\sigma^* u^*} + \mathbf{F}_{\mu^* t^*} \\ \mathbf{F}_{\sigma^* u^*} + \mathbf{F}_{\mu^* t^*} & \mathbf{F}_{\sigma^* u^*} + \mathbf{F}_{\mu^* t^*} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{PF} = \rho f \left[ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n u_{im}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n u_{imj}^* d\Gamma \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n u_{im}^R d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n u_{imj}^R d\Gamma \right]$$

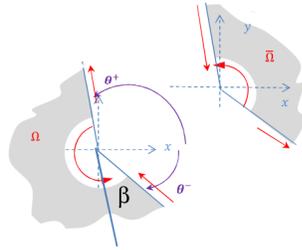
Caso General (Contorno suave, casos vinculados com  $u_{im}^R$ ,  $\beta=0$ )

$$\mathbf{F}_{,DISC} = \int_{\Gamma^+} f d\Gamma = \int_{\alpha}^{\alpha+\beta+\pi} f(\theta) R d\theta \quad \wedge \quad \bar{\mathbf{F}}_{,DISC} = \int_{\Gamma^-} f d\Gamma = \int_{\alpha+\beta+\pi}^{\alpha+2\pi} f(\theta) R d\theta$$

Parte Superior de  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}_{\sigma^* u^*, DISC} + \bar{\mathbf{F}}_{\sigma^* u^*, DISC} = (\mathbf{H}_{\sigma^* u^*, DISC} + \bar{\mathbf{H}}_{\sigma^* u^*, DISC}) \mathbf{U}_{u^*} = \mathbf{U}_{u^*}$$

$$\mathbf{F}_{\sigma^* u^R, DISC} + \bar{\mathbf{F}}_{\sigma^* u^R, DISC} = (\mathbf{H}_{\sigma^* u^R, DISC} - \bar{\mathbf{H}}_{\sigma^* u^R, DISC}) \mathbf{U}_{u^R}$$



Onde

$$\mathbf{U}_{u^*} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu} (1+2(4\nu-3)(\ln(2g)-\gamma)) \delta_{im}$$

(5-40)

## 5.4. MHECS na EG: Análise do problema de uma cavidade:

### 5.4.1. MHEC no problema da cavidade na EG

O problema de cavidade na EG precisa de uma análise previa sobre a natureza das tensões e deslocamentos não-clássicos no contorno em contraposição com o sólido, já que ditas tensões e deslocamentos dependem da derivação direcional no sentido do vetor normal no ponto fonte como se mostra na Figura 9.

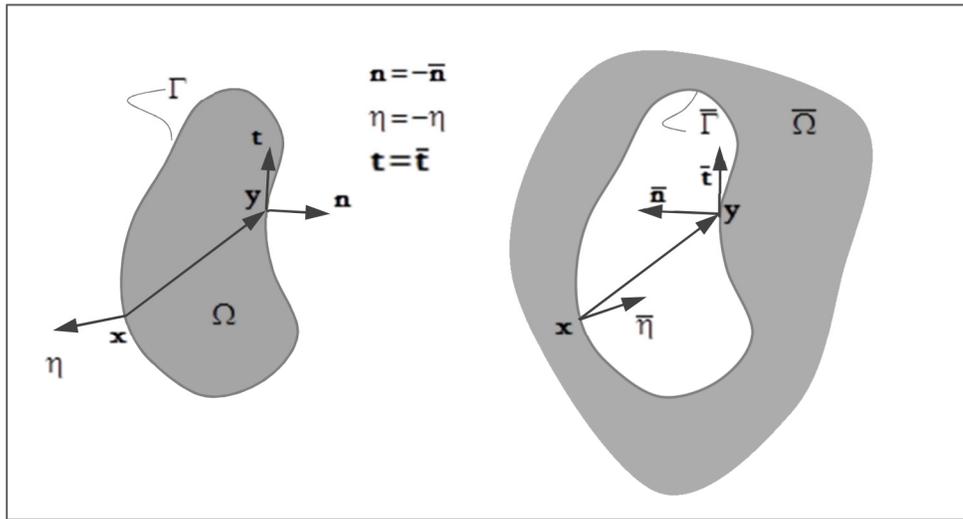


Figura 9. Esboço do domínio, o contorno e os vetores normais e tangentes na análise de uma problema de cavidade em contraposição do problema do sólido finito complementar na EG.

Tensões em $\Gamma$	Tensões em $\bar{\Gamma}$
$\sigma_{jim}^R = \frac{\partial \sigma_{jim}^*}{\partial \eta}$	$\bar{\sigma}_{jim}^R = \frac{\partial \sigma_{jim}^*}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{\partial \sigma_{jim}^*}{\partial \eta} = -\sigma_{jim}^R$
$\mu_{kjim}^R = \frac{\partial \mu_{kjim}^*}{\partial \eta}$	$\bar{\mu}_{kjim}^R = \frac{\partial \mu_{kjim}^*}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{\partial \mu_{kjim}^*}{\partial \eta} = -\mu_{kjim}^R$
Deslocamentos em $\Gamma$	Deslocamentos em $\bar{\Gamma}$
$u_{in}^{*R} = \frac{\partial u_{in}^*}{\partial n}$	$\bar{u}_{in}^{*R} = \frac{\partial u_{in}^*}{\partial \bar{n}} = -\frac{\partial u_{in}^*}{\partial n} = -u_{in}^{*R}$
$u_{in}^{R*} = \frac{\partial u_{in}^*}{\partial \eta}$	$\bar{u}_{in}^{R*} = \frac{\partial u_{in}^*}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{\partial u_{in}^*}{\partial \eta} = -u_{in}^{R*}$
$u_{in}^{RR} = \frac{\partial^2 u_{in}^*}{\partial \eta \partial n}$	$\bar{u}_{in}^{RR} = \frac{\partial^2 u_{in}^*}{\partial \bar{\eta} \partial \bar{n}} = \frac{\partial^2 u_{in}^*}{\partial \eta \partial n} = u_{in}^{RR}$
$q_i^d = \frac{\partial u_i^d}{\partial n}$	$\bar{q}_i^d = \frac{\partial u_i^d}{\partial \bar{n}} = -\frac{\partial u_i^d}{\partial n} = -q_i^d$

Também deve considerar-se que se

$$\begin{aligned}
 u_i^d &= \bar{u}_i^d \quad \wedge \\
 u_{im}^{R^*} &= -\bar{u}_{im}^{R^*} \quad \wedge \\
 u_i^d &= u_{im}^{**} p_m^* + u_{im}^{R^*} R_m^* \quad \wedge \\
 \bar{u}_i^d &= u_{im}^{**} p_m^* + \bar{u}_{im}^{R^*} \bar{R}_m^*
 \end{aligned} \tag{5-41}$$

sendo  $\wedge$  é o operador lógico de conjunção, então se obtém finalmente como corolário que

$$R_m^* = -\bar{R}_m^* \tag{5-42}$$

A primeira equação do MHEC no contorno da cavidade  $\bar{\Gamma}$ , provem propriamente da formulação original apresentada no Capítulo 4 e é dada por

$$c_{mi} u_i^d(\mathbf{x}) + [\underline{\bar{H}}^A + \underline{\bar{H}}^B \quad \underline{\bar{H}}^C] \left\{ \begin{matrix} \underline{\mathbf{d}} \\ \underline{\mathbf{q}} \end{matrix} \right\} = [\underline{\bar{F}}^A \quad \underline{\bar{F}}^B] \left\{ \begin{matrix} \underline{\mathbf{P}}^* \\ \underline{\mathbf{R}}^* \end{matrix} \right\} \tag{5-43}$$

onde o traço inferior ( $\underline{\quad}$ ) representa a parte finita das matrizes correspondentes; por outro lado a segunda equação provem da derivação direcional no sentido do vetor normal no ponto fonte de  $\bar{\Gamma}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ c_{mi} u_i^d(\mathbf{x}) + [\underline{\bar{H}}^A + \underline{\bar{H}}^B \quad \underline{\bar{H}}^C] \left\{ \begin{matrix} \underline{\mathbf{d}} \\ \underline{\mathbf{q}} \end{matrix} \right\} = [\underline{\bar{F}}^A \quad \underline{\bar{F}}^B] \left\{ \begin{matrix} \underline{\mathbf{P}}^* \\ \underline{\mathbf{R}}^* \end{matrix} \right\} \right\} \\
 \equiv c_{mi} \bar{q}_i^d(\mathbf{x}) + [\underline{\bar{H}}^{AR} + \underline{\bar{H}}^{BR} \quad \underline{\bar{H}}^{CR}] \left\{ \begin{matrix} \underline{\mathbf{d}} \\ \underline{\mathbf{q}} \end{matrix} \right\} = [\underline{\bar{F}}^{AR} \quad \underline{\bar{F}}^{BR}] \left\{ \begin{matrix} \underline{\mathbf{P}}^* \\ \underline{\mathbf{R}}^* \end{matrix} \right\}
 \end{aligned} \tag{5-44}$$

onde

$$\bar{H}^{AR} = \frac{\partial \bar{H}^A}{\partial \bar{\eta}}, \quad \bar{H}^{BR} = \frac{\partial \bar{H}^B}{\partial \bar{\eta}}, \quad \bar{F}^{AR} = \frac{\partial \bar{F}^A}{\partial \bar{\eta}}, \quad \text{etc}$$

$\bar{\eta}$ : vetor normal no ponto fonte de  $\bar{\Gamma}$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \begin{matrix} \quad \\ \quad \end{matrix} \right\} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \begin{matrix} \quad \\ \quad \end{matrix} \right\}$$

#### 5.4.2. Matriz F :

Similarmente à análise de sinais anterior, se é utilizada a seguinte notação para parte finita  $\underline{\mathbf{F}} = pf(\mathbf{F})$ , então a equação vinculada com matriz  $\mathbf{F}$  em  $\Gamma$  é dada por

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{P}}^* &= \text{pf} \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{in,j}^* d\Gamma & \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in}^R d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{in,j}^R d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j u_{in}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^R n_k u_{in,j}^* d\Gamma & \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j u_{in}^R d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^R n_k u_{in,j}^R d\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{p}}^* \\ \underline{\mathbf{R}}^* \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{AR}} & \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{BR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{p}}^* \\ \underline{\mathbf{R}}^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-45)$$

e em  $\bar{\Gamma}$

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\mathbf{W}}} = \bar{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \bar{\underline{\mathbf{P}}}^* &= \text{pf} \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \bar{n}_j u_{in}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* \bar{n}_k u_{in,j}^* d\Gamma & \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \bar{n}_j u_{in}^R d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* \bar{n}_k u_{in,j}^R d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{jim}^R \bar{n}_j u_{in}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{\mu}_{kjim}^R \bar{n}_k u_{in,j}^* d\Gamma & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{jim}^R \bar{n}_j u_{in}^R d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{\mu}_{kjim}^R \bar{n}_k u_{in,j}^R d\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\underline{\mathbf{p}}}^* \\ \bar{\underline{\mathbf{R}}}^* \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\underline{\mathbf{F}}}^{\mathbf{A}} & \bar{\underline{\mathbf{F}}}^{\mathbf{B}} \\ \bar{\underline{\mathbf{F}}}^{\mathbf{AR}} & \bar{\underline{\mathbf{F}}}^{\mathbf{RR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\underline{\mathbf{p}}}^* \\ \bar{\underline{\mathbf{R}}}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{AR}} & -\underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{BR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{p}}^* \\ -\underline{\mathbf{R}}^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-46)$$

Similarmente, se é utilizada a notação para parte descontínua  $\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \text{pd}(\underline{\mathbf{F}})$ ,

então a equação em questão em  $\Gamma$  fica

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{**} & \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{*R} \\ \underline{\mathbf{C}}^R \underline{\mathbf{U}}^{R*} & \underline{\mathbf{C}}^R \underline{\mathbf{U}}^{RR} \end{bmatrix} \quad (5-47)$$

e em  $\bar{\Gamma}$

$$\bar{\underline{\underline{\mathbf{W}}}} = \bar{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \bar{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\underline{\mathbf{C}}}^* \bar{\underline{\mathbf{U}}}^{**} & \bar{\underline{\mathbf{C}}}^* \bar{\underline{\mathbf{U}}}^{*R} \\ \bar{\underline{\mathbf{C}}}^R \bar{\underline{\mathbf{U}}}^{R*} & \bar{\underline{\mathbf{C}}}^R \bar{\underline{\mathbf{U}}}^{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{\mathbf{C}}}^* \underline{\mathbf{U}}^{**} & -\bar{\underline{\mathbf{C}}}^* \underline{\mathbf{U}}^{*R} \\ -\bar{\underline{\mathbf{C}}}^R \underline{\mathbf{U}}^{R*} & \bar{\underline{\mathbf{C}}}^R \underline{\mathbf{U}}^{RR} \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

Se são juntadas as equações de parte finita e descontínua então se obtém para  $\Gamma$

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{P}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{**} & \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{*R} \\ \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{AR}} + \underline{\mathbf{C}}^R \underline{\mathbf{U}}^{R*} & \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{BR}} + \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{p}}^* \\ \underline{\mathbf{R}}^* \end{Bmatrix} \quad (5-49)$$

E para  $\bar{\Gamma}$  em termos das grandezas do sólido finito

$$\bar{\underline{\mathbf{W}}} = \bar{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \bar{\underline{\mathbf{P}}}^* = \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{**} & \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{*R} \\ \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{AR}} - \underline{\mathbf{C}}^R \underline{\mathbf{U}}^{R*} & -\underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{BR}} + \underline{\mathbf{C}}^* \underline{\mathbf{U}}^{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{p}}^* \\ -\underline{\mathbf{R}}^* \end{Bmatrix} \quad (5-50)$$

### 5.4.3. Matriz $\mathbf{H}$ :

Similarmente, se é utilizada a notação de parte finita  $\underline{\mathbf{H}} = pf(\mathbf{H})$ , então a equação em função da matriz  $\mathbf{H}$  em  $\Gamma$  é

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{H}}.\underline{\mathbf{D}} &= pf \left[ \begin{array}{cc} \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_j n_k u_{iq} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^R n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_j n_k u_{iq} d\Gamma \end{array} \right] \begin{Bmatrix} d_n \\ q_n \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{H}}^A + \underline{\mathbf{H}}^B & \underline{\mathbf{H}}^C \\ \underline{\mathbf{H}}^{AR} + \underline{\mathbf{H}}^{BR} & \underline{\mathbf{H}}^{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-51)$$

e em  $\bar{\Gamma}$

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\mathbf{W}}} = \bar{\underline{\mathbf{H}}}.\bar{\underline{\mathbf{D}}} &= pf \left[ \begin{array}{cc} \int_{\bar{\Gamma}} \sigma_{jin}^* \bar{n}_j u_{im} d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} \mu_{kjin}^* \bar{t}_j \bar{n}_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\bar{\Gamma}} \mu_{kjin}^* \bar{n}_j \bar{n}_k u_{iq} d\Gamma \\ \int_{\bar{\Gamma}} \sigma_{jin}^R \bar{n}_j u_{im} d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} \mu_{kjin}^R \bar{t}_j \bar{n}_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\bar{\Gamma}} \mu_{kjin}^R \bar{n}_j \bar{n}_k u_{iq} d\Gamma \end{array} \right] \begin{Bmatrix} d_n \\ \bar{q}_n \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\underline{\mathbf{H}}}^A + \bar{\underline{\mathbf{H}}}^B & \bar{\underline{\mathbf{H}}}^C \\ \bar{\underline{\mathbf{H}}}^{AR} + \bar{\underline{\mathbf{H}}}^{BR} & \bar{\underline{\mathbf{H}}}^{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \bar{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{H}}^A - \underline{\mathbf{H}}^B & \underline{\mathbf{H}}^C \\ \underline{\mathbf{H}}^{AR} + \underline{\mathbf{H}}^{BR} & -\underline{\mathbf{H}}^{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{q} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-52)$$

Similarmente, se é utilizada a notação para parte descontínua  $\underline{\underline{\mathbf{H}}} = pd(\mathbf{H})$ , então a equação de  $\mathbf{H}$  em  $\Gamma$  é

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}.\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* & \underline{\underline{\mathbf{O}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{O}}} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5-53)$$

e em  $\bar{\Gamma}$

$$\bar{\underline{\underline{\mathbf{W}}}} = \bar{\underline{\underline{\mathbf{H}}}}.\bar{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^* & \bar{\underline{\underline{\mathbf{O}}}} \\ \bar{\underline{\underline{\mathbf{O}}}} & \bar{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5-54)$$

Se são juntadas as equações de parte finita e descontínua então se obtém para  $\Gamma$

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{H}}.\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}^* + \underline{\mathbf{H}}^A + \underline{\mathbf{H}}^B & \underline{\mathbf{H}}^C \\ \underline{\mathbf{H}}^{AR} + \underline{\mathbf{H}}^{BR} & \underline{\mathbf{C}}^R + \underline{\mathbf{H}}^{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5-55)$$

e para  $\bar{\Gamma}$  é escrita em termos das grandezas do sólido então

$$\bar{\underline{\mathbf{W}}} = \bar{\underline{\mathbf{H}}}.\bar{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{\mathbf{C}}}^* - \underline{\mathbf{H}}^A - \underline{\mathbf{H}}^B & \underline{\mathbf{H}}^C \\ \underline{\mathbf{H}}^{AR} + \underline{\mathbf{H}}^{BR} & \bar{\underline{\mathbf{C}}}^R - \underline{\mathbf{H}}^{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5-56)$$

#### 5.4.4. MHECS para EG

Agora, a tentativa de fazer a formulação MHECS para EG consiste da integração das equações (5-49) e (5-55) para  $\Gamma$  que é dada por

$$\mathbf{W} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^* \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* + \mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B & \mathbf{H}^C \\ \mathbf{H}^{AR} + \mathbf{H}^{BR} & \mathbf{C}^R + \mathbf{H}^{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^A + \mathbf{C}^* \mathbf{U}^{**} & \mathbf{F}^B + \mathbf{C}^* \mathbf{U}^{*R} \\ \mathbf{F}^{AR} + \mathbf{C}^R \mathbf{U}^{R*} & \mathbf{F}^{BR} + \mathbf{C}^* \mathbf{U}^{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^* \\ \mathbf{R}^* \end{Bmatrix} \quad (5-57)$$

e das equações (5-50) e (5-56) em  $\bar{\Gamma}$

$$\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{P}}^* \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^* - \mathbf{H}^A - \mathbf{H}^B & \mathbf{H}^C \\ \mathbf{H}^{AR} + \mathbf{H}^{BR} & \bar{\mathbf{C}}^R - \mathbf{H}^{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}^A + \bar{\mathbf{C}}^* \mathbf{U}^{**} & \mathbf{F}^B - \bar{\mathbf{C}}^* \mathbf{U}^{*R} \\ \mathbf{F}^{AR} - \bar{\mathbf{C}}^R \mathbf{U}^{R*} & -\mathbf{F}^{BR} + \bar{\mathbf{C}}^* \mathbf{U}^{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^* \\ -\mathbf{R}^* \end{Bmatrix} \quad (5-58)$$

Considerando que as parcelas descontínuas  $\bar{\mathbf{C}}^* + \mathbf{C}^* = \mathbf{I}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}^R + \mathbf{C}^R = \mathbf{I}$ , pode-se apreciar que se são somadas a primeira fila de cada equação e restadas a segunda então se obtém finalmente

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{**} & \mathbf{U}^{*R} \\ \mathbf{U}^{R*} & \mathbf{U}^{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^* \\ \mathbf{R}^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{D} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}^* \quad (5-59)$$

E por tanto é factível simplificar a formulação do MHEC original no contexto da EG, eliminando o esforço computacional necessário para a determinação da matriz  $\mathbf{F}$ . A equação final tem uma configuração matricial idêntica à formulação clássica embora o cálculo algébrico implique muitas mudanças de sinais durante o processo da formulação e não é trivial.

#### 5.5. Equações alternativas do MHECS – 2D, ( $\mathbf{R}^* = \mathbf{0}$ )

O resultado numericamente laborioso na definição da formulação geral do MEHCS, pelo comportamento não convencional do tensor  $\mathbf{u}^R$ , pode ser aliviado por uma simplificação para a solução de problemas práticos de tal jeito de trabalhar só com a solução fundamental da elasticidade gradiente (considerando uma condição de contorno tal que  $\mathbf{R}^* = \mathbf{0}$ ) e utilizar só as parcelas de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{F}$  vinculadas com  $\mathbf{u}^*$ , de tal jeito que as matrizes fiquem como se mostrou na formulação inicial na seção 4,

$$\mathbf{H} = \left[ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_j n_k u_{iq} d\Gamma \right] \quad (5-60)$$

$$= \left[ \mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d} \quad \mathbf{H}_{\mu^*q} \right]$$

$$\mathbf{F} = \left[ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_k u_{im,j}^* d\Gamma \right] \quad (5-61)$$

$$= \left[ \mathbf{F}_{\sigma^*d} + \mathbf{F}_{\mu^*d} \right]$$

Para que  $\mathbf{R}^* = \mathbf{O}$  se precisa de uma condição de contorno não-clássica particular, que neste caso por não ter um significado físico claro, se pode utilizar como oportunidade para resolver e pesquisar uma solução prática do MEC na EG. Portanto se é considerado que

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{\mu^*q}^T \cdot \mathbf{p}^* \quad (5-62)$$

e se seguidamente é considerado as propriedades da partes descontínuas revisadas na seção correspondente

$$\mathbf{H}_{\sigma^*d,DISC} + \overline{\mathbf{H}}_{\sigma^*d,DISC} = \mathbf{I} \quad (5-63)$$

$$\mathbf{F}_{\sigma^*d,DISC} = \mathbf{H}_{\sigma^*d,DISC} \mathbf{U}_{u^*d} \wedge \overline{\mathbf{F}}_{\sigma^*d,DISC} = \overline{\mathbf{H}}_{\sigma^*d,DISC} \mathbf{U}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma^*d,DISC}) \mathbf{U}_{u^*d}$$

$$\mathbf{F}_{\mu^*d,DISC} = \overline{\mathbf{F}}_{\mu^*d,DISC} = \mathbf{O}$$

e que

$$\mathbf{F} + \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{U}_{u^*d} \quad (5-64)$$

$$\mathbf{H} + \overline{\mathbf{H}} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{O}]$$

Isto permite reescrever as equações da formulação na versão da elasticidade gradiente mostradas anteriormente na seção 4.1 e 4.2 do seguinte jeito

$$[\mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d} \quad \mathbf{H}_{\mu^*q}]^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{p}^* \\ \mathbf{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{R} \end{matrix} \right\} \quad (5-65)$$

$$[\mathbf{F}_{\sigma^*d} + \mathbf{F}_{\mu^*d}] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{p}^* \\ \mathbf{q} \end{matrix} \right\} = [\mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d} \quad \mathbf{H}_{\mu^*q}] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{matrix} \right\} \quad (5-66)$$

Que podem ser aplicadas a um médio finito e infinito do seguinte jeito

$$\begin{array}{l} (\mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d})^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} \quad \mathbf{H}_{\mu^*q}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{R} \\ (\overline{\mathbf{H}}_{\sigma^*d} + \overline{\mathbf{H}}_{\mu^*d})^T \mathbf{p}^* = \overline{\mathbf{p}} \quad \overline{\mathbf{H}}_{\mu^*q}^T \mathbf{p}^* = \overline{\mathbf{R}} \\ \hline \mathbf{p}^* = \mathbf{p} + \overline{\mathbf{p}} \quad \mathbf{O} = \mathbf{R} + \overline{\mathbf{R}} \end{array} \quad (5-67)$$

e também em termos da matriz F

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{\sigma^*d} + \mathbf{F}_{\mu^*d})\mathbf{p}^* &= (\mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d})\mathbf{d} + \mathbf{H}_{\mu^*q}\mathbf{q} \\ (\bar{\mathbf{F}}_{\sigma^*d} + \bar{\mathbf{F}}_{\mu^*d})\mathbf{p}^* &= (\bar{\mathbf{H}}_{\sigma^*d} + \bar{\mathbf{H}}_{\mu^*d})\mathbf{d} + \bar{\mathbf{H}}_{\mu^*q}\bar{\mathbf{q}} \\ \hline (\mathbf{F}_{\sigma^*d} + \bar{\mathbf{F}}_{\sigma^*d})\mathbf{p}^* &= (2\mathbf{H}_{\mu^*d} + \mathbf{I})\mathbf{d} \end{aligned} \quad (5-68)$$

ou

$$\mathbf{U}_{u^*d}\mathbf{p}^* = \mathbf{d}$$

Finalmente se pode escrever as equações da formulação híbrida simplificada na elasticidade gradiente só em termos de grandezas clássicas

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d})^T \mathbf{p}^* &= \mathbf{p} \\ \mathbf{U}_{u^*d}\mathbf{p}^* &= \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5-69)$$

que se pode resolver independentemente das grandezas não-clássicas as quais podem-se determinar seguidamente através das identidades

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mu^*q}^T \mathbf{p}^* &= \mathbf{R} \\ (\mathbf{F}_{\sigma^*d} + \mathbf{F}_{\mu^*d})\mathbf{p}^* - (\mathbf{H}_{\sigma^*d} + \mathbf{H}_{\mu^*d})\mathbf{d} &= \mathbf{H}_{\mu^*q}\mathbf{q} \end{aligned} \quad (5-70)$$

Na prática as grandezas  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{q}$  não seriam relevantes calcular por não ter ainda um significado físico e cujo esclarecimento formaria parte de uma pesquisa posterior.

### 5.5.1. Observações no que concerne a $\mathbf{U}^*$

É possível determinar uma formulação particular do método híbrido simplificado no contexto da elasticidade gradiente sem a necessidade de considerar forças e deslocamentos não-clássicos no contorno os quais são difíceis de conceber fisicamente e que, contrariamente ao que se encontra na literatura, podem ser determinadas a partir da solução do problema em termos só dos parâmetros clássicos.

O outro aspecto favorável da formulação é que não existe o problema da determinação da diagonal da matriz  $\mathbf{U}^*$  já que na elasticidade gradiente a constante constitutiva não-clássica  $g$  permite eliminar a singularidade da elasticidade clássica e efetuar o cálculo da solução fundamental para  $r \rightarrow 0$ , dando

como resultado um valor finito constante e dependente unicamente das constantes constitutivas  $g$ ,  $\nu$  e  $\mu$ .

Vale ressaltar que a elasticidade gradiente é singularmente proveitosa inclusive para análise de materiais onde o comprimento das partículas não é representativo em relação ao comprimento do elemento estrutural, já que se podem considerar valores de ordem de  $1 \mu\text{m}$ . de  $g$  e ela permite a obtenção de uma diagonal finita proporcional ao resto da matriz  $\mathbf{U}^*$ ; por exemplo para  $g=1.0 \mu\text{m}$ .,  $\nu=0.2$ , a relação da solução fundamental  $u_{11}^*(r=0\text{m.})/u_{11}^*(r=1\text{m.}) \cong 31$ . A Figura 10 mostra a relação entre a solução fundamental  $d_x/d_f = u_{11}^*(x)/u_{11}^*(r=1\text{m.})$  para diferentes valores de  $g$ .

O que é também merece um comentário é o interessante fato que a solução fundamental começa a ficar iminente constante uma vez que é avaliada a uma distância menor que o valor da constante constitutiva  $g$  (cuja dimensão é comprimento), a qual está estreitamente vinculada com o tamanho das microestruturas ou partículas do material. Aliás, se o comprimento característico das microestruturas é designado por  $D$ , então se acostuma considerar que  $g/D < 1$ .

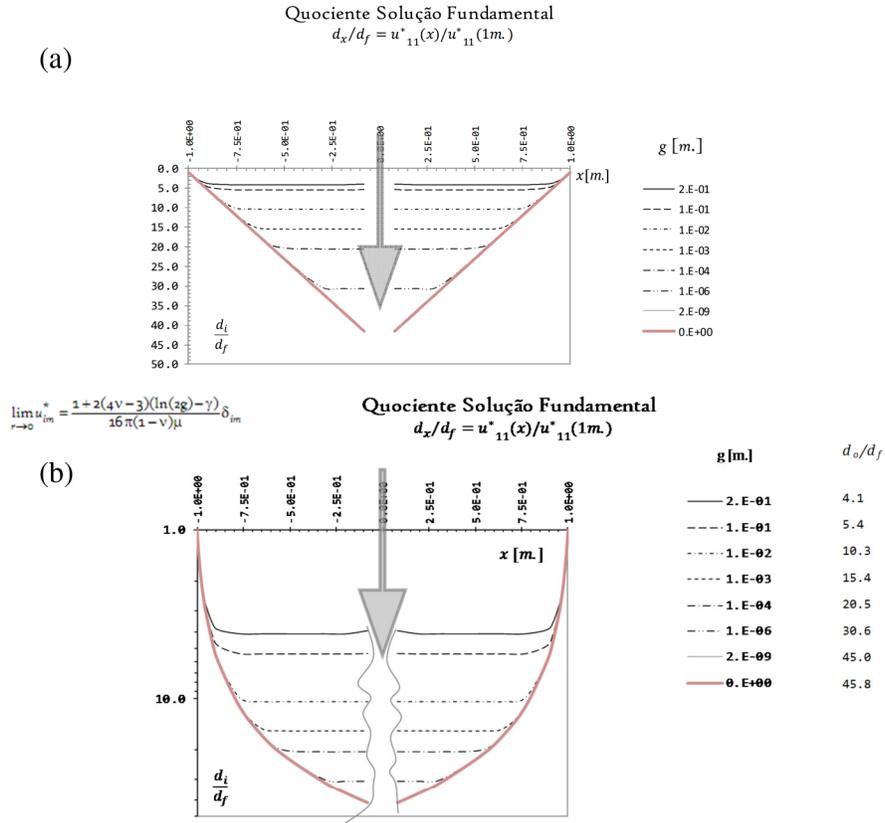


Figura 10. Solução fundamental da EG para valores em torno a ponto zero e o valor de  $g$  em gráfico logarítmico simples (a) e gráfico logarítmico nas duas direções (b).

## 5.6. Propriedades espectrais de $H$

A matriz  $H$  deve satisfazer a propriedade espectral no contexto gradiente onde se consideram deslocamentos de corpo rígido não-clássicos representados por  $W_q$ .

$$H \cdot W = \begin{bmatrix} H^* \\ H^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_d \\ W_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\sigma^*d} + H_{\mu^*d} & H_{\mu^*q} \\ H_{\sigma^Rd} + H_{\mu^Rd} & H_{\mu^*q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_d \\ W_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix} \quad (5-71)$$

O detalhe interessante reside na matriz  $W$  a qual está composta de três vetores colunas correspondentes a 2 deslocamentos de corpo rígido e 1 de rotação as quais contém duas parcelas:  $W_d^z$  e  $W_q^z$ , uma clássica e outra adicional não-clássica, respectivamente. Por outro lado, os deslocamentos não-clássicos resultam nulos, (pelo gradiente involucrado) dando lugar a que  $W$  fique finalmente da seguinte forma

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_d \\ \mathbf{W}_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_d^x & \mathbf{W}_d^y & \mathbf{W}_d^z \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{W}_q^z \end{bmatrix} \quad (5-72)$$

Como se pode verificar nas aplicações numéricas dos capítulos 10 e 11, cada parcela de  $\mathbf{H}$  não satisfaz em forma geral e independente as propriedades espectrais vinculadas com  $\mathbf{W}_d^z$  e  $\mathbf{W}_q^z$ .

No caso do  $\mathbf{H}^*$ , por exemplo,  $\mathbf{H}_{\sigma_d}$  corresponde á matriz  $\mathbf{H}$  clássica e portanto satisfaz as propriedades espectrais de forma independente e diferentemente que  $\mathbf{H}_{\mu_d^*}$  e  $\mathbf{H}_{\mu_q^*}$ , quem precisam complementar-se mutuamente para satisfazer a propriedade espectral vinculada especificamente à rotação de corpo rígido. Não obstante,  $\mathbf{H}_{\mu_d}$  satisfaz independentemente as propriedades espectrais vinculadas com os deslocamentos de translação de corpo rígido. Os deslocamentos de translação de corpo rígido não-clássicos são nulos, portanto  $\mathbf{H}_{\mu_d}$  satisfaz automaticamente o requerimento em questão.

Por outro lado,  $\mathbf{H}^R$  possui um comportamento diferente:  $\mathbf{H}_{\mu_d^R}$  e  $\mathbf{H}_{\mu_q^R}$  são ortogonais aos deslocamentos de translação de corpo rígido de forma independente (o caso de  $\mathbf{H}_{\mu_d^R}$  é do mesmo modo que o caso anterior, automático); mas para o caso da ortogonalidade aos deslocamentos de rotação de corpo rígido as três sub matrizes  $\mathbf{H}_{\mu_d^R}$ ,  $\mathbf{H}_{\mu_q^R}$  e  $\mathbf{H}_{\mu_d^*}$  precisam complementar-se mutua e dependentemente para poder satisfazer de forma global o requerimento espectral correspondente e nenhuma pode fazê-lo independentemente.