# 2
# Equações da EG do presente trabalho

## 2.1. Variáveis Cinemáticas

No contexto da elasticidade gradiente trabalha–se com os parâmetros cinemáticos que incluem o gradiente de deslocamentos. Se $\mathbf{u}$ representa o campo de deslocamentos clássico, as grandezas cinemáticas restantes se descrevem como:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \text{ : deformação} \tag{2-1}$$

$$\psi_{ij} = u_{[i,j]} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \text{ : tensor rotacional} \tag{2-2}$$

$$\omega_i = \tfrac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \text{ : vetor rotacional} \tag{2-3}$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i} \text{ : gradiente rotacional} \tag{2-4}$$

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = u_{k,ij} = \tilde{\kappa}_{jik} \text{ : segundo gradiente de deslocamentos} \tag{2-5}$$

$$\hat{\kappa}_{kji} = \frac{1}{2}\left(u_{j,ik} + u_{i,jk}\right) = \varepsilon_{ji,k} \text{ : gradiente de deformação} \tag{2-6}$$

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \tfrac{1}{3}\left(u_{i,jk} + u_{k,ji} + u_{j,ki}\right) = \bar{\bar{\kappa}}_{jik} = \bar{\bar{\kappa}}_{ikj} = \bar{\bar{\kappa}}_{kji} \text{ :parte simétrica de } \tilde{\kappa}_{ijk} \text{ e } \hat{\kappa}_{jik} \tag{2-7}$$

## 2.2. Análise variacional na EG

A densidade de energia de deformação é definida por Mindlin [2]–[41] em três formas equivalentes para o caso de materiais isotrópicos e designadas como Tipo I, Tipo II e Tipo III:

$$W = \tilde{W}(\varepsilon, \tilde{\kappa}) = \hat{W}(\varepsilon, \hat{\kappa}) = \bar{W}(\varepsilon, \bar{\kappa}, \bar{\bar{\kappa}}) \tag{2-8}$$

onde a tensão de Cauchy é definida como

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ji} \tag{2-9}$$

Os diferentes tipos de tensão dupla, de acordo com o tipo de parâmetro cinemático, equações (2-4) – (2-6), ficam definidos como

$$\tilde{\mu}_{kij} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\kappa}_{kij}}, \quad \hat{\mu}_{kij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{kij}}, \quad \bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}, \quad \bar{\bar{\mu}}_{kij} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{\bar{\kappa}}_{kij}} \tag{2-10}$$

No presente trabalho de tese considera–se para efeitos de desenvolvimento a elasticidade gradiente de Mindlin Tipo II, a mesma utilizada por Polyzos na sua formulação do método de elementos de contorno na versão da elasticidade gradiente.

A variação da energia de deformação interna Tipo II é expressa por

$$\int_{\Omega} \delta W^{\text{int}} d\Omega = \int_{\Omega} (\tau^{s}_{ji}\delta\varepsilon^{d}_{ij} + \mu^{s}_{kji}\delta\kappa^{d}_{kji}) d\Omega \tag{2-11}$$

onde $\kappa^{d}_{kji}$ corresponde ao gradiente de deslocamentos Tipo II proposto por Mindlin dado por

$$\kappa^{d}_{kji} = \tfrac{1}{2}(u^{d}_{i,jk} + u^{d}_{j,ik}) = \varepsilon^{d}_{ji,k} = \kappa^{d}_{kij} \tag{2-12}$$

A variação diferencial da energia de deformação de segunda ordem está expressa por

$$\mu^{s}_{kji}\delta\kappa^{d}_{kji} = \tfrac{1}{2}\mu^{s}_{kji}\delta u^{d}_{i,jk} + \tfrac{1}{2}\mu^{s}_{kji}\delta u^{d}_{j,ik} \tag{2-13}$$

que considerando a simetria dos tensores em relação a $i$ e $j$ pode escrever–se como

$$\mu^{s}_{kji}\delta\kappa^{d}_{kji} = \tfrac{1}{2}\mu^{s}_{kji}\delta u^{d}_{i,jk} + \tfrac{1}{2}\mu^{s}_{kji}\delta u^{d}_{j,ik} = \mu^{s}_{kji}\delta u^{d}_{i,jk} \equiv \mu^{s}_{kji}\delta u^{d}_{j,ik} \equiv \mu^{s}_{jki}\delta u^{d}_{i,jk} \tag{2-14}$$

Então (2-11) resulta

$$\int_{\Omega} W^{\text{int}} d\Omega = \int_{\Omega} (\tau^{s}_{ji}\delta u^{d}_{i,j} + \mu^{s}_{jki}\delta u^{d}_{i,jk}) d\Omega \tag{2-15}$$

Aplicando integração por partes e o teorema de Green duas vezes em relação a $j$ e $k$ se obtém

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \delta W^{\text{int}} d\Omega = & \int_{\Gamma} \tau^{s}_{ji} n_j \delta u^{d}_{i} d\Gamma - \int_{\Omega} \tau^{s}_{ji,j}\delta u^{d}_{i} d\Omega + \int_{\Gamma} \mu^{s}_{jki} n_j \delta u^{d}_{i,k} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \mu^{s}_{jki,j} n_k \delta u^{d}_{i} d\Gamma + \int_{\Omega} \mu^{s}_{jki,jk}\delta u^{d}_{i}\, d\Omega\end{aligned} \tag{2-16}$$

Se forem trocados os índices mudos $j$ por $k$ no terceiro, quarto e quinto termo, então obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \delta W^{\text{int}} d\Omega = & \int_{\Gamma} \tau^{s}_{ji} n_j \delta u^{d}_{i} d\Gamma - \int_{\Omega} \tau^{s}_{ji,j}\delta u^{d}_{i} d\Omega + \int_{\Gamma} \mu^{s}_{kji} n_k \delta u^{d}_{i,j} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \mu^{s}_{kji,k} n_j \delta u^{d}_{i} d\Gamma + \int_{\Omega} \mu^{s}_{kji,kj}\delta u^{d}_{i}\, d\Omega\end{aligned} \tag{2-17}$$

Considera–se também a identidade do gradiente de deslocamentos:

$$\delta u_{i,j} = n_j n_l \delta u_{i,l} + (\delta_{jl} - n_j n_l)\delta u_{i,l} \tag{2-18}$$

Definem–se o gradiente de superfície e a derivada normal com a seguinte notação

$$\begin{aligned} D_j &= (\delta_{jl} - n_k n_l)\partial_l \\ D &= n_l \partial_l \end{aligned} \tag{2-19}$$

que leva à seguinte identidade

$$n_k \mu^{s}_{kji}\delta u^{d}_{i,j} = n_k \mu^{s}_{kji}(\delta_{jl} - n_j n_l)\,\delta u^{d}_{i,l} + n_k n_j n_l \mu^{s}_{kji}\,\delta u^{d}_{i,l} \tag{2-20}$$

Utilizando (2-20) na identidade (2-17) obtém–se

$$\int_{\Omega} \delta W^{\text{int}} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma^{s}_{ji} n_j \; \delta u^{d}_{i} d\Gamma + \int_{\Omega} (\tau^{s}_{ji} - \mu^{s}_{kji,k})_{,j} \; \delta u^{d}_{i} d\Omega + \int_{\Gamma} \mu^{s}_{kji} n_j n_k \; n_l \delta u^{d}_{i,l} d\Gamma$$
$$+ \int_{\Gamma} \mu^{s}_{kji} n_k (\delta_{jl} - n_j n_l) \; \delta u^{d}_{i,l} d\Gamma \qquad (2\text{-}21)$$

onde $(\tau^{s}_{ji} - \mu^{s}_{kji,k}) = \sigma^{s}_{ji}$ representa a tensão total e a quarta parcela do lado direito pode ser expressa como

$$n_k \mu^{s}_{kji} (\delta_{jl} - n_j n_l) \, \delta u^{d}_{i,l} = (\delta_{jl} - n_j n_l)\,(n_k \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i})_{,l} - n_k (\delta_{jl} - n_j n_l) \mu^{s}_{kji,l} \delta u^{d}_{i} -$$
$$(\delta_{jl} - n_j n_l) n_{k,l} \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i} \qquad (2\text{-}22)$$

Aliás $(\delta_{jl} - n_j n_l)\,(n_k \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i})_{,j}$ pode ser expressa numa superfície $\boldsymbol{\Gamma}$ como

$$(\delta_{jl} - n_j n_l)\,(n_k \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i})_{,l} = (\delta_{ll} - n_l n_l)\; n_k n_j \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i} + n_q e_{qpm} (e_{mlj} n_l n_k \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i})_{,p} \qquad (2\text{-}23)$$

Pelo teorema de Stokes a integral de $n_q e_{qpm} (e_{mlj} n_l n_k \mu^{s}_{kji})$ numa superfície suave é nula, mas se a superfície é descontínua em trechos $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, gerando uma curva de interseção *C*, pelo teorema de Stokes obtém-se:

$$\int_{\Gamma} n_q e_{qpm} (e_{mlj} n_l n_k \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i})_{,p} \mathrm{d}\Gamma = \oint_{C} \left\| n_i m_j \mu^{s}_{kji} \right\| \delta u^{d}_{i} \mathrm{d}\Gamma \qquad (2\text{-}24)$$

Onde $m_j$ representa a componente do vetor $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} \equiv m_j = e_{mlj} s_m n_l$, produto vetorial do vetor tangente e normal em *C*, $\mathbf{s}, \mathbf{n}$ respectivamente; então a expressão dentro de $\| \;\|$ esta definida por

$$\left\| n_i m_j \mu^{s}_{kji} \right\| = n_i m_j \mu^{s}_{kji} \Big|_{\Gamma_2 \cap C} - n_i m_j \mu^{s}_{kji} \Big|_{\Gamma_1 \cap C} \qquad (2\text{-}25)$$

e portanto a equação final de densidade da energia de deformação em termos de deslocamentos virtuais é dada por

$$\int_{\Omega} \delta W^{\text{int}} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma^{s}_{ji} n_j \; \delta u^{d}_{i} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} (\tau^{s}_{ji} - \mu^{s}_{kji,k})_{,j} \; \delta u^{d}_{i} d\Omega + \int_{\Gamma} (\delta_{ll} - n_l n_l)\; n_k n_j \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i} d\Gamma$$
$$+ \oint_{C} \left\| n_i m_j \mu^{s}_{kji} \right\| \delta u^{d}_{i} d\Gamma - \int_{\Gamma} n_k (\delta_{jl} - n_j n_l) \mu^{s}_{kji,l} \delta u^{d}_{i} d\Gamma$$
$$- \int_{\Gamma} (\delta_{jl} - n_j n_l) n_{k,l} \mu^{s}_{kji} \delta u^{d}_{i} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu^{s}_{kji} n_j n_k n_l \delta u^{d}_{i,l} d\Gamma \qquad (2\text{-}26)$$

A energia de deformação externa é dada por

$$\int_{\Omega} \delta W^{ext} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f}_i \delta u^{d}_{i} d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \delta u^{d}_{i} d\Gamma + \int_{\Gamma} R_i n_l \delta u^{d}_{i,l} d\Gamma + \int_{\Gamma} E_i \delta u^{d}_{i} d\Gamma \qquad (2\text{-}27)$$

A partir daqui é possível a obtenção das condições de contorno

### 2.3. Condições de contorno

As condições de contorno na elasticidade gradiente obtidas de (2-26) e (2-27) são dadas pelas clássicas:

$$\begin{aligned} &u_i = u_i^o \\ &P_i = n_j\sigma_{ji} - n_j\mu_{kji,k} - n_j\Phi_{ji} - D_j(n_j\mu_{kji}) + (D_p n_p)(n_j\mu_{kji}) \end{aligned} \quad \text{em } \Gamma \qquad (2\text{-}28)$$

e as condições de contorno não-clássicas,

$$\begin{aligned} &R_i = n_k n_j \mu_{kji} \text{ e/ou} \\ &q_i = q_i^o \qquad \text{em } \Gamma \\ &E_i = \left\| e_{mlk} s_m n_l n_j \mu_{kji} \right\| \end{aligned} \qquad (2\text{-}29)$$

sendo $q_i = u_{i,j}n_j$ o vetor de deslocamentos não-clássico, e $E_i$ é conhecido na literatura como o tensor de salto de tensões ("jump tensor") que é próprio nos contornos não suaves e definido em (2-25). Por outro lado, $D_j = (\delta_{jl} - n_k n_l)\partial_l$ é o gradiente de superfície definido anteriormente em (2-19), e $R_i$ é a tensão de superfície não-clássica. O carácter físico das condições de contorno não-clássicas ainda não se encontra bem definida na literatura e é um assunto que merece mais investigação teórica e experimental.

### 2.4. Relações tensão deformação

Na particularização da teoria generalizada das microestruturas de Mindlin Tipo II, seção 1.1.2, que é a primeira simplificação utilizada no presente trabalho de tese, e sempre no caso de materiais isotrópicos onde a deformação macroscópica coincide com a micro deformação, a lei modificada de Hooke é dada pelas expressões:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ji} = \tau_{ji} + s_{ji} \\ &\tau_{ji} = 2\mu\varepsilon_{ji} + \lambda u_{k,k}\delta_{ji} \\ &\varepsilon_{ji} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ &s_{ji} = -\left(2\mu c_3 \varepsilon_{ji,kk} + \lambda c_1 u_{k,kll}\delta_{ji} + \lambda c_2 u_{k,kji}\right) \end{aligned} \qquad (2\text{-}30)$$

onde $\sigma_{ji}$ é conhecido como o tensor de tensão total, $\tau_{ji}$ o tensor de tensões de Cauchy, e $s_{ji}$ é o tensor da tensão relativa.

É possível notar que nas equações anteriores são consideradas 5 constantes constitutivas: as duas conhecidas constantes de Lamé, $\lambda$ e $\mu$, e três novas constantes que representam a elasticidade gradiente simplificada de Mindlin: $c_1$, $c_2$ e $c_3$.

## 2.5. A constante constitutiva não-clássica $g^2$ do presente trabalho

Aifantis [6], [8] fez uma simplificação adicional, utilizando só um coeficiente constitutivo não-clássico vinculado com a energia de deformação volumétrica, identificado aqui com a variável $g^2$, a qual foi experimentalmente verificada como consistente para caracterizar o efeito escala satisfatoriamente. Isso é possível fazendo na equação (2-30) de Mindlin, $c_1 = c_3 = g^2$ e $c_2 = 0$, dando como resultado que a tensão dupla e a tensão relativa fiquem:

$$\begin{aligned} \mu_{kij} &= g^2 \tau_{ij,k} \\ s_{ij} &= -\mu_{kij,k} = -g^2 \tau_{ij,kk} \end{aligned} \qquad (2\text{-}31)$$

onde $\hat{\mu}_{kij} = \mu_{kij}$ é o tensor de tensões duplas Tipo II e portanto faz que a equação tensão deformação seja

$$\sigma_{ji} = (1-\nabla^2 g^2)\,\tau_{ji} = (1-\nabla^2 g^2)(\mu(u_{j,i}+u_{j,i}) + \lambda u_{k,k}\delta_{ji}) \qquad (2\text{-}32)$$

## 2.6. Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio na elasticidade gradiente podem ser obtidas de (2-26) e (2-27). A equação de equilíbrio não-clássica incorpora o conceito de tensões duplas $\mu_{kji}$, forças duplas de massa $\Phi_{ji}$, e as conhecidas forças clássicas de massa $f_i$.

$$\begin{aligned} &\tau_{ji,j} - \mu_{kji,kj} - \Phi_{ji,j} + f_i = 0 \quad \equiv \\ &\tau_{ji,j} - g^2 \tau_{ji,kkj} - \Phi_{ji,j} + f_i = 0 \quad \equiv \\ &(\tau_{ji} - g^2 \tau_{ji,kk} - \Phi_{ji})_{,j} + f_i = \sigma_{ji,j} + f_i = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}33)$$

a qual pode ser expressa em termos dos deslocamentos como uma equação de quarta ordem:

$$\begin{aligned} &u_{i,jj}\mu + u_{j,ji}(\lambda+\mu) - g^2(u_{i,jjkk}\mu + u_{j,jikk}(\lambda+\mu)) - \Phi_{ji,j} + f_i = 0 \quad \text{ou} \\ &(1-\nabla^2 g^2)(u_{i,jj}\mu + u_{j,ji}(\lambda+\mu)) - \Phi_{ji,j} + f_i = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}34)$$