

1 Introdução

Recentemente as teorias generalizadas dos meios contínuos têm sido objeto de numerosas pesquisas que estudam o efeito escala na análise de problemas micro estruturais. Quando os efeitos das microestruturas são importantes, o material comporta-se de maneira anisotrópica. Além disso, as tensões num ponto não dependem só da deformação local, mas da distribuição das deformações ao redor a dito ponto. Quando o efeito escalar é considerado no problema das microestruturas a teoria clássica não é adequada para descrever o comportamento do material e é preciso recorrer a teorias não-clássicas. A elasticidade clássica dos meios contínuos é uma versão particular de teorias generalizadas da mecânica e não pode descrever adequadamente a relação tensão–deformação quando o tamanho relativo das partículas que compõem a estrutura é importante.

Os irmãos Cosserat [5] foram uns dos primeiros a desenvolver no início do século uma teoria de elasticidade que considerasse a participação das partículas de um material como sólidos rígidos dentro de um macro meio elástico. Mindlin [2] desenvolveu em 1964 uma teoria linear para micro estruturas introduzindo a ideia de unidades celulares deformáveis na qual é possível obter uma forma linear da teoria generalizada da mesma época e caráter do autor Toupin [3]. Posteriormente E. Aifantis [6]–[8] desenvolveu na década de 1980 uma teoria mais simplificada que a proposta condensada de Mindlin, reduzindo o número das constantes constitutivas não-clássicas de três a apenas uma. Se as partículas, os grãos ou os cristais fossem considerados numa primeira aproximação como indeformáveis, o campo de deslocamentos do meio no qual estão imersos (chamados *macromeios*) seria afetado apenas por essas partículas e nesse caso a teoria das partículas deformáveis reduz-se ao contínuo de Cosserat.

No trabalho de Fleck e Hutchinson [19] são tratados os efeitos da teoria de elasticidade gradiente. Nele se mostram algumas características obtidas da evidência experimental acumulada nesse tipo de enfoque. Primeiramente, quanto menor a geometria do sólido, mais rígida é a resposta plástica [19]. Em partículas

reforçadas com matrizes compostas, partículas menores apresentam um acréscimo da tensão permissível do endurecimento do material comparado com outro sólido de igual volume, mas com partículas maiores (Kelly e Nicholson 1963; Ebeling e Ashby, 1966). Foi mostrado em testes de torção em fios cujos diâmetros encontram-se no intervalo de 12-170 μm , que os fios mais delgados têm o comportamento mais rígido que os mais grossos (Fleck et al, 1993).

As primeiras implementações 2D e 3D da versão da elasticidade gradiente do método clássico de elementos de contorno foram desenvolvidas por Polyzos et al [13]–[14], que desenvolveram uma solução aos problemas mecânicos estáticos, dinâmicos e da fratura. Desde o tempo de Toupin e Mindlin procura-se estabelecer uma base variacional da teoria e uma formulação consistente das condições de contorno cinemáticas e de equilíbrio, o que parece ter tido êxito com os recentes trabalhos de Amanatidou e Aravas [18] e Elias Aifantis [6]–[8]. Em Lages [51] foi analisada a teoria do contínuo micromórfico baseado no trabalho de Eringen [52] onde é considerado que o material possui além dos graus de liberdade clássicos de translação, uma rotação e uma extensão axial. Por outro lado em 2008, Huamán [50] fez uma compilação sobre formulações da elasticidade gradiente para diferentes modelos numéricos e mecânicos desenvolvidos pelos autores mencionados, como Aifantis [6] - [8], Beskos e Polyzos [13]-[14], Amatidou [18] entre outros.

A pesquisa do presente trabalho está orientada à aplicação da elasticidade gradiente proposta por Aifantis ao método híbrido de elementos de contorno e finito formulado e desenvolvido por Dumont e Huamán [42]-[44]. É utilizado um conceito de cálculo e geometria diferencial que permite reduzir na expressão de trabalhos virtuais as operações comuns de integração por partes e o teorema da divergência nas grandezas não-clássicas de modo que as expressões integrais da matriz H, F e o vetor de forças de superfície resultam algebricamente mais concisas do que se encontram geralmente na literatura, por exemplo, Polyzos et al [13]–[14].

A diferença teórica básica entre a proposta de Mindlin [2] e o presente trabalho (Dumont e Huaman [42]-[44]), embora sejam algebricamente idênticas, no início consiste no fato de que em Mindlin o operador da variação é aplicado na densidade de energia de deformação interna e no presente trabalho utiliza-se o princípio de deslocamentos e forças virtuais obtidos através do potencial de

Hellinger Reissner, onde a variação é aplicada a deslocamentos e forças virtuais quaisquer, independentemente das incógnitas do problema.

No capítulo 3 apresenta-se um rigoroso desenvolvimento das soluções fundamentais 2D e 3D, singulares e não-singulares no contexto da elasticidade gradiente e baseada nelas foram implementadas numericamente os exemplos do método híbrido de elementos de contorno e finito no capítulo 9 e 10. No capítulo 4 é apresentado em detalhe a formulação própria do método híbrido de contorno e finito na elasticidade gradiente. No capítulo 5 se mostra a formulação híbrida simplificada no contexto da EG e no capítulo 6 o procedimento da montagem da matriz \mathbf{H} generalizada. A seguir é apresentada no capítulo 7 a aplicação do método híbrido de contorno ao problema mais elementar: um elemento estrutural unidimensional da EG sujeito a tensão axial ; no capítulo 8 é resolvido o seguinte problema elementar da mecânica através do MHEC: a flexão bidimensional de vigas no contexto na elasticidade gradiente.

No capítulo 9 apresentam-se os exemplos numéricos para diferentes elementos finitos 2D construídos através de elementos de contorno lineares, quadráticos e cúbicos. Foi feita uma comparação dos resultados entre as soluções fundamentais polinomiais e as soluções enriquecidas com funções de Bessel. A análise de convergência mostrou que as funções polinomiais sem funções de Bessel têm melhor desempenho de convergência na determinação das tensões. Mostram-se os patch tests que foram feitos em elementos de diferentes ordens. No capítulo 11 mostra-se a aplicação numérica do MHECS da EG vinculada à análise espectral da matriz generalizada \mathbf{H} e também análises de convergência do MHEC da EG.

1.1. Revisão de teorias de elasticidade linear não-clássicas

A continuação se mostra um resumo das diferentes teorias de elasticidade não-clássicas que precederam à elasticidade gradiente que é utilizada no presente trabalho extraído textualmente da pesquisa realizada por Huaman [50]. Mostra-se primeiro a teoria dos irmãos Cosserat e seguidamente a teoria generalizada das microestruturas desenvolvida por Mindlin que é a origem da simplificação feita por Aifantis, elasticidade do presente trabalho, e que é mostrada na seção 2. Finalmente mostra-se o teorema de reciprocidade e o teorema de Castigliano no contexto de grandezas não-clássicas.

1.1.1. Equações de Equilíbrio de Cosserat

Na mecânica dos meios contínuos para materiais com microestruturas, a interação entre forças e momentos externos que atuam num corpo é descrita por forças e momentos internos que são absorvidos pelas partículas através de forças internas diferenciais, conforme ilustrado na Figura 1. Nesse caso pode-se afirmar que são duas as grandezas que representam as tensões internas: a primeira representa o caráter clássico do problema e é mostrada na expressão (1-1) e a segunda tensão $\bar{\mu}$ incorpora o novo conceito de grandeza de segunda ordem, tensão de segunda ordem ou uma tensão dupla, indicada na expressão (1-2):

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (1-1)$$

$$\bar{\mu} = \frac{d\vec{M}}{dS} \quad (1-2)$$

onde $\vec{\sigma}$ é a tensão clássica, $\bar{\mu}$ é a tensão dupla, $d\vec{F}$ representa as forças internas diferenciais e $d\vec{M}$ a densidade de momentos não-clássicos.

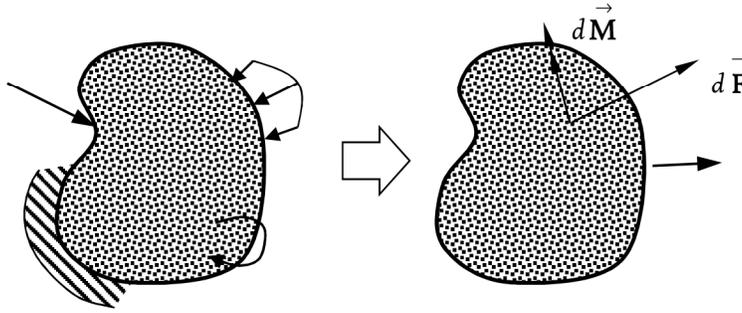


Figura 1. - Sistemas de partículas que formam um sólido submetido a forças externas que são equilibradas por forças internas diferenciais clássicas $d\vec{F}$ e a uma densidade de momentos $d\vec{M}$ não-clássicos.

O equilíbrio entre as forças de superfície \vec{p} e as tensões internas σ_{ik} é dado por:

$$\vec{p} = p_i \vec{i}_i = \sigma_{ik} \eta_i \vec{i}_k \quad (1-3)$$

A tensão dupla μ_{ij} depende do comprimento das partículas, para o caso limite da teoria clássica a tensão dupla tende a zero.

Na teoria da elasticidade generalizada conforme apresentada em Cosserat [5] as equações de equilíbrio na forma integral são apresentados nas expressões (2-3) e (2-4) onde se mostra o cálculo da força dupla R_i e o momento M_i em um domínio Ω e contorno Γ , de acordo com De Arante e Oliveira [10]:

$$M_i = \int_{\Omega} (\Phi_i + e_{ijk} r_k f_j) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mu_{li} + e_{ijk} r_j \sigma_{lk}) \eta_l d\Gamma \quad (1-4)$$

$$R_i = \int_{\Omega} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \eta_j d\Gamma \quad (1-5)$$

onde os índices representam os eixos 1, 2 e 3 no caso tridimensional, Φ_i são as componentes do vetor de densidade de momentos, σ_{ij} e μ_{ij} são os tensores de tensões totais generalizados aplicados em Ω e Γ , e e_{ijk} é o tensor de permutação de Levi Civita.

É possível apresentar a equação de equilíbrio na forma indicial e infinitesimal para um ponto em geral dentro do domínio Ω :

$$\sigma_{ij,k} + f_i = 0 \quad (1-6)$$

$$\mu_{ji,j} + \Phi_i + e_{ijk} \sigma_{ji} = 0 \quad (1-7)$$

1.1.2. Elasticidade Linear das Microestruturas de Mindlin

Mindlin [2] desenvolveu uma teoria linear para microestruturas em 3D para materiais contínuos, introduzindo a ideia de unidade celular. Nesta teoria foram propostas algumas propriedades equivalentes às malhas que compõem os cristais. A unidade celular pode ser interpretada como a molécula de um polímero, o cristal de um policristal ou o grão de um material granular.

O modelo matemático para uma célula é uma versão linear da teoria dos diretores deformáveis de Ericksen e Truesdel [4]. Se as células são rígidas, as equações reduzem-se ao contínuo linear de Cosserat [5].

Mindlin [2] utilizou a teoria de duplo esforço de Toupin [3] para a obtenção de uma generalização eliminando a diferença entre as deformações da unidade celular e o meio que se encontra no entorno do ponto de análise.

1.1.2.1. Cinemática

Os deslocamentos de uma partícula são definidos classicamente pela diferença das coordenadas entre a posição original e final dentro de um macromeio Ω . Mindlin [2] fez uma extensão desse critério no âmbito de observação de um microdomínio Ω' . Assim, tem-se:

$$u_i = x_i - X_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1-8)$$

Supõe-se que dentro do domínio Ω exista um micromeio Ω' dentro do qual é possível definir um microdeslocamento, ilustrado na Figura 2 e dado por:

$$u'_i = x'_i - X'_i = 0 \quad \text{em } \Omega' \quad (1-9)$$

Supõem-se pequenos deslocamentos e obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} & \left| \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right| &\ll 1 & \left| \frac{\partial u'_i}{\partial X'_i} \right| &\ll 1 \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{x}' - \mathbf{X}' \end{aligned} \quad (1-10)$$

Na Figura 2 são ilustrados os sistemas de coordenadas x , x' e x'' utilizados para esquematizar o problema.

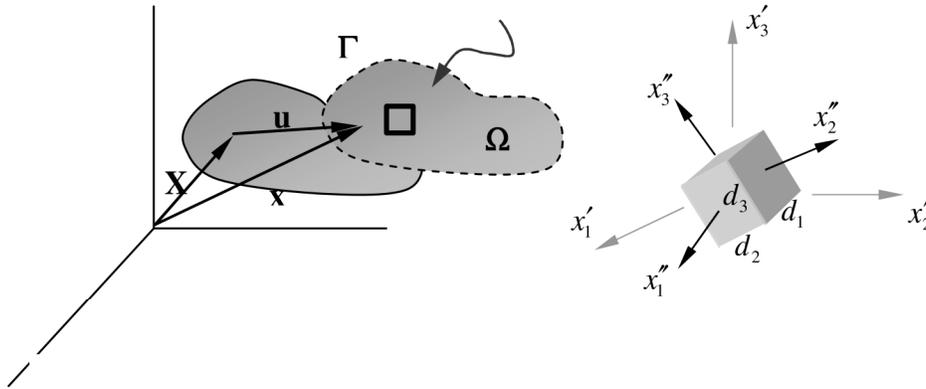


Figura 2. - Esquema do deslocamento no macromeio \mathbf{u} e micromeio \mathbf{u}' .

As expressões (1-1) e (1-2) permitem equivalentemente à elasticidade clássica para pequenos deslocamentos considerar:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_j u_i = u_{i,j}, \quad u_i = u_i(\mathbf{x}, t) \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial X'_j} \approx \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \partial_j u'_i = u'_{i,j}, \quad u'_i = u'_i(\mathbf{x}, t) \quad (1-12)$$

onde t é a variável tempo. Supõem-se que os microdeslocamentos podem ser expressos como uma somatória de produtos de funções de x'_i e funções de x_i . Mindlin [2] considerou apenas um termo linear das series como aproximação do deslocamento no micromeio:

$$u'_i = x'_k \psi_{ki} \quad (1-13)$$

onde $\psi_{kj} = \psi_{kj}(\mathbf{x}, t)$. Considerando (1-12), Mindlin [2] define o gradiente de deslocamento no micromeio como:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \partial_j u'_i = u'_{i,j} = \psi_{ij} \quad (1-14)$$

A expressão (1-13) gera que a microdeformação ψ_{kj} seja homogênea no micromeio Ω' e não-homogênea dentro do macromeio Ω .

Na expressão (1-14) são definidas a parte simétrica e antissimétrica da microdeformação, respectivamente:

$$\psi_{(kj)} = \frac{1}{2}(\psi_{kj} + \psi_{jk}), \quad \psi_{[kj]} = \frac{1}{2}(\psi_{kj} - \psi_{jk}) \quad (1-15)$$

A deformação usual é designada aqui como uma *macrodeformação*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-16)$$

A deformação relativa é expressa por:

$$\gamma_{ij} = u_{i,j} - \psi_{ij} \quad (1-17)$$

Na expressão abaixo apresenta-se o novo conceito de microdeformação, também conhecido como o macrogradiente da microdeformação:

$$\kappa_{ijk} = \psi_{ij,k} \quad (1-18)$$

Os três tensores ε_{ij} , γ_{ij} e $\kappa_{ij,k}$ são independentes da microcoordenada x'_i .

1.1.2.2. Equações de Compatibilidade

As propriedades das equações de compatibilidade são apresentadas pelas seguintes expressões:

$$e_{mik} e_{nlj} \varepsilon_{kl,ij} = 0 \quad (1-19)$$

$$e_{mik} \kappa_{jkl,i} = 0 \quad (1-20)$$

$$\varepsilon_{jk,i} + \omega_{jk,i} - \gamma_{jk,i} = \kappa_{ijk} \quad (1-21)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (1-22)$$

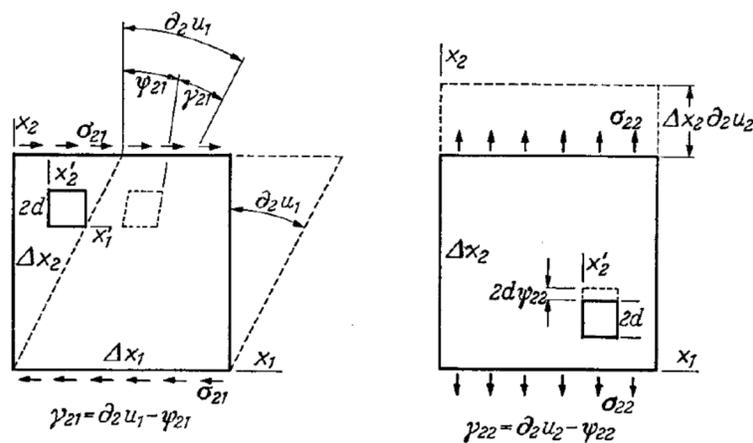


Figura 3.- Representação de dois deslocamentos ilustrativos de segunda ordem identificadas por Mindlin [2]

1.1.2.3. Equações Variacionais de Movimento

A seguir são apresentadas as equações integrais de energia cinética gerada por um sólido global e o sistema de partículas com coordenadas locais do micromeio.

a) Energia Cinética

A energia cinética total para dois sistemas de coordenadas locais da microestrutura x'_i , x''_i , e x'''_i tal como é mostrado por Mindlin [27], ilustradas nas Figuras 2 e 3, é proveniente da soma dos termos vinculados com as funções de deformação interna ψ_{ij} na expressão clássica:

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d_{kl}^2 \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{kj} \right) d\Omega \right] dt \quad (1-23)$$

onde:

$d^2_{kl} = 2d_p d_q (\delta_{p1} \delta_{q1} l_{k1} l_{l1} + \delta_{p2} \delta_{q2} l_{k2} l_{l2} + \delta_{p3} \delta_{q3} l_{k3} l_{l3})$ são as dimensões da microestrutura ao quadrado, ver Figura 2.

$\rho = \rho' + \rho_m$: densidade total do contínuo.

ρ' : densidade do micromeio.

ρ_m : densidade do macromeio.

$2d_i$: comprimentos das unidades celulares.

l_{ij} : cossenos diretores da orientação da unidade celular x''_i com eixos x'_i .

Se x'_i e x''_i são paralelos e a microestrutura tem lados quadrados, então $l_{ij} = \delta_{ij}$

e $d_1 = d_2 = d_3 = d$. Nesse caso a variação da energia cinética simplifica-se após uma integração por partes:

$$\delta K = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \left(\rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{kj} \delta \psi_{kj} \right) d\Omega \right] dt \quad (1-24)$$

b) Energia Potencial

A energia potencial na elasticidade das microestruturas é influenciada pela nova componente da microdeformação κ_{ijk} mostrada na expressão (1-18):

$$U = U(\epsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}) \quad (1-25)$$

Define-se:

$$\tau_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ji}} \text{ Tensor de tensão de Cauchy} \quad (1-26)$$

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}} \text{ Tensor de tensão relativa} \quad (1-27)$$

$$\mu_{jkh} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{jkh}} \text{ Tensão de segunda ordem ou tensão dupla} \quad (1-28)$$

Finalmente a variação da Energia Potencial é definida por:

$$\delta U = \int_{\Omega} (\tau_{ji} \delta \varepsilon_{ji} + \sigma_{ji} \delta \gamma_{ji} + \mu_{jik} \delta \kappa_{jik}) d\Omega \quad (1-29)$$

c) Trabalho das Forças Externas

O trabalho das forças externas difere do caso clássico pelo par de momentos Φ_{ji} e T_{ji} os quais são descritos na seguinte equação:

$$\delta V = \int_{\Omega} (f_i \delta u_i + \Phi_{ji} \delta \psi_{ji}) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_i \delta u_i + T_{ji} \delta \psi_{ji}) d\Gamma \quad (1-30)$$

onde:

Φ_{ji} : força dupla por unidade de volume

T_{ji} : força dupla por unidade de área

A diagonal de Φ_{ji} , assim como a de T_{ji} , são forças duplas que não possuem momento, enquanto as forças restantes são forças duplas contendo momento.

Os tensores $\Phi_{[ji]}$ e $T_{[ji]}$ são respectivamente as somas anti-simétricas da força dupla de massa Φ_{ji} e da tensão dupla T_{ji} , enquanto que $T_{[ji]}$ é o vetor de esforço duplo de Cosserat.

Quando $\psi_{(ji)}=0$ é possível obter as equações do contínuo de Cosserat, resultando em $\sigma_{(ji)}=\tau_{ij}$ e $\mu_{j(ik)}=0$; e os únicos termos diferentes de zero sendo $\mu_{i[jk]}$ e $\sigma_{[ji]}$. O termo $\mu_{i[jk]}$ representa a tensão dupla de Cosserat e $\sigma_{[ji]}$ é considerada como a parcela antissimétrica da tensão assimétrica τ_{ji} .

e) Equações de Equilíbrio Dinâmico.

Mindlin [2] deduz através de equações variacionais de movimento 12 equações de equilíbrio e tensão:

3 equações em Ω

$$\tau_{ji,j} + \sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i ; \quad (1-31)$$

9 equações em Ω

$$\mu_{jik,j} + \sigma_{ik} + \Phi_{ik} = \frac{1}{3} \rho' d_{li}^2 \ddot{\psi}_{lk} \quad (1-32)$$

f) Equações de Condições de Contorno

De forma análoga Mindlin [2] mostra 12 condições de contorno:

$$t_i = \eta_j (\tau_{ji} + \sigma_{ji}), \text{ em } \Gamma \quad (1-33)$$

$$T_{ik} = \eta_j \mu_{jik}, \text{ em } \Gamma \quad (1-34)$$

1.1.2.4. Equações Constitutivas

Nas equações constitutivas de um material isotrópico o número de coeficientes é consideravelmente menor. As equações constitutivas são dadas por:

$$\tau_{pq} = c_{ijpq} \varepsilon_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} \kappa_{ijk} \quad (1-35)$$

$$\sigma_{pq} = g_{ijpq} \varepsilon_{ij} + b_{ijpq} \gamma_{ij} + d_{ijkpq} \kappa_{ijk} \quad (1-36)$$

$$\mu_{pqr} = f_{pqrij} \varepsilon_{ij} + d_{ijpq} \gamma_{ij} + a_{pqrijk} \kappa_{ijk} \quad (1-37)$$

as quais somam 42 variáveis ε_{ij} , γ_{ij} , μ_{ijk} e 45 equações constitutivas. Dos $42 \times 42 = 1764$ coeficientes apenas $1/2 \times 42 \times 43 = 903$ são independentes.

1.1.2.5. Equações de Movimento

Como não existem tensores isotrópicos de posto ímpar então $d_{ijklm} = 0$ e $f_{ijklm} = 0$. Os coeficientes restantes são homogêneos e resultam em funções lineares dos produtos de delta de Kronecker. Se forem feitas essas reduções, os coeficientes reduzem-se a 18: λ , μ , b_1 , b_2 , b_3 , g_1 , g_2 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_8 , a_{10} , a_{11} , a_{13} , a_{14} , a_{15} ; dessa forma as equações constitutivas são dadas por (1-38) e (1-39).

Na teoria da elasticidade gradiente o caso isotrópico é relativamente simples e contém muitas propriedades do material homogêneo:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i = & (\mu + 2g + b_2) u_{i,jj} + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3) u_{j,ij} - (g_1 + b_1) \psi_{jj,i} \\ & - (g_2 + b_2) \psi_{ji,j} - (g_2 + b_3) \psi_{ij,j} + f_i \end{aligned} \quad (1-38)$$

Para o micromeio a equação diferencial de deslocamento é:

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_5) (\delta_{ij} \psi_{kl,kl} + \psi_{kk,ij}) + (a_2 + a_{11}) (\psi_{ki,jk} + \psi_{jk,ik}) \\ & + (a_3 + a_{14}) \psi_{kj,ik} + a_4 \delta_{ij} \psi_{ll,kk} + (a_8 + a_{15}) \psi_{ik,jk} + a_{10} \psi_{ij,kk} + a_{13} \psi_{ji,kk} \\ & g_1 \delta_{ij} u_{k,k} + g_2 (u_{j,i} + u_{i,j}) + b_1 (u_{k,k} - \psi_{kk}) \delta_{ij} + b_2 (u_{j,i} - \psi_{ij}) + \\ & b_3 (u_{i,j} - \psi_{ji}) + \Phi_{ij} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{ij} \end{aligned} \quad (1-39)$$

As componentes da tensão dupla μ_{ijk} da microdeformação são determinadas pelas funções de forma ilustradas na Figura 4 e configuram formas particulares de microdeformações.

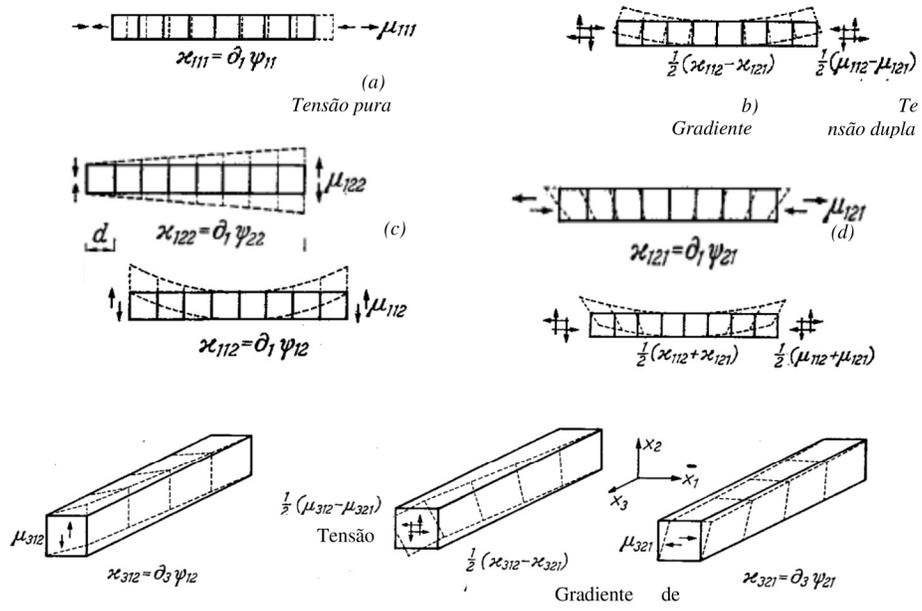


Figura 4. - Configuração de algumas deformações de segunda ordem identificadas por Mindlin para a formulação da elasticidade das microestruturas [2].