

Referências Bibliográficas

- [1] Tsepoura, K.G.; Papargyri, S.; Polyzos, D.; Beskos D.E. Static an dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension. *Archive of Applied Mechanics* 72. Springer Verlag, 2002. p. 483–497
- [2] Mindlin, R. D. Micro-structure in Linear Elasticity, *Arch Rational Mech Anal* 16, 1964. p. 51–78,
- [3] Toupin, R. A. Elastic Materials with couple stresses. *Arch Rational Mech. Anal.* 11, 1962. p. 385–414,
- [4] Ericksen & Trusdell. Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells, *Arch Rational Mech. Anal.* 1, 1958. p. 295–323.
- [5] Cosserat, E. et F. Théorie des Corps Déformables. Paris: A. Hermann & Filss, 1909.
- [6] Aifantis, E. C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture, *Int. J. Engrg. Sci.* 30, 1992. p. 1279–1299.
- [7] Altan, B. S.; Evensen, H. A.; Aifantis, E. C. Longitudinal Vibrations Of A Beam: A Gradient Elasticity Approach. *Mechanics Research Communications*, 1996. Vol. 23, No. 1, p. 35–40.
- [8] Ru, C. Q.; Aifantis, E. C. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity, *Acta Mech.* 101, 1993. p. 59–68.
- [9] Giannakopoulos, A. E.; Amanatidou, E.; Aravas, N. A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle. *International Journal of Solids and Structures* 43, 2006. p. 3875–3894
- [10] De Arante e Oliveira, E. R. Elementos da Teoria da Elasticidade, Instituto Superior Tecnico, Lisboa.
- [11] Vardoulakis, I.; Sulem J. Bifurcation Analysis in Geomechanics. London, Blackie/Chapman and Hall, 1995.
- [12] Prazeres, P. G. Desenvolvimento dos elemento finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro.
- [13] Polyzos, D. et al. A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems Part I: Integral formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, 2003. p. 2845–2873.
- [14] Polyzos, D. et al. A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems Part II: Numerical implementation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, 2003. p. 2845–2873.
- [15] Dumont, N. A. The hybrid boundary element method.In: Brebbia, C. A.; Wendland, W.; Kuhn, G, Editor, *Boundary Elements IX*, v. 1, Mathematical and Computational Aspects, Southampton, Computational Mechanics Publications, 1987. p. 125-138, Springer-Verlag. 3.
- [16] Chaves, R. A. P. O Método Híbrido Simplificado dos elementos de contorno aplicado a problemas dependentes do tempo. Tese de Doutorado – DEC/PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2003. 182 P.
- [17] Dumont, N. A.; Chaves, R. A. P. General time-dependent analysis with the frequency-domain hybrid boundary element method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, n. 10, 2003. p. 431–452.

- [18] Amanatidou, E.; Aravas, N. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191, 2002. p. 1723–1751.
- [19] Fleck, N. A.; Hutchinson, J. W. A Phenomenological Theory for Strain Gradient Effects in Plasticity. *Adv. Appl. Mech.* 33, 1997. p. 295–361.
- [20] Plolyzos, D. et al. Boundary Element analisys of mode I and mixed mode (I and II) crack problems of 2D gradiente elasticity. *Methods Appl. Mech.* 196, 2007. p. 5092–5103
- [21] Tsepoura, K. G.; Plolyzos D. Static and harmonic BEM sollutions of gradient elasticity problems with axisymmetry. *Methods Appl. Mech.* 196, 2007. p. 5092–5103.
- [22] Tsepoura, K. G.; Plolyzos, D. Static and harmonic BEM sollutions of gradient elasticity problems with axisymmetry. *Methods Appl. Mech.* 196, 2007. p. 5092–5103.
- [23] Aifantis, E. C. Update on a class of gradient theories. *Mechanis of Materials.* 35, 2003. p. 259–280.
- [24] Giuggiani, M.; Gigante A. A general Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method. Dipartimento di Costruzioni Meccaniche e Nucleari. Universita degli Studi di Pisa, *J. Appl. Mech. ASME* 57, 1990. p. 906–915.
- [25] Guiggiani, M. Hypersingular boundary integral equations have an additional free term. *Computational Mechanics* 16, 1995. p. 245 – 248.
- [26] Oliveira, A. C. Um modelo de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea. Dissertação de Mestrado DEC/Puc–Rio, 2006.
- [27] Mindlin, R. D.; Eshel N. N. On First Strain Gradient Theories in Linear Elasticity. *Int. J. Solids Structure.* 4, 1968. p. 109–124.
- [28] Papargyri, S. B. et al. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *International Journal of Solids and structures* 40, 2003. p. 385–400.
- [29] Dumont N. A.; A. C. Oliveira. A Dynamic Interaction Model of Railway Track Structural Elements. *Cilamce – XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Belém, 2006. p. 4-6.
- [30] Dumont N. A.; Prazeres P. G. C. Hybrid Dynamic Finite Element Families for the General Analysis of Time-Dependent Problems”, Procs. ICSSD - Third International Conference on Structural Stability and Dynamics, Florida, EUA, 2005. p. 19-22.
- [31] Dumont, N. A. Variationally-Based, Hybrid Boundary Element Methods. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences (CAMES)*, 2003. p. 407-430. Vol 10, ISSN 1232-308X.
- [32] Casal, P. La Theorie du Second Gradient et la Capillarite. *C.R. Acad Sci. A(274)* p. 1571–1574.
- [33] Noronha, M. A. M. Uma Sistemática para a Avaliação de Integrais Impróprias, Singulares e quase Singulares dos Métodos de Elementos de Contorno. – Dissertação de Mestrado DEC/Puc–Rio, 1994.
- [34] Dumont, N. A.; De Souza, R. M. On the Efficient Numerical Evaluation of Singular Integrals: Back to Gauss–Legendre Quadrature”, *PACAM III – Third Panamerican Congress of Applied Mechanics*, São Paulo, 1993. p. 93–96.
- [35] Dumont, N. A.; De Souza, R. M. A Simple Unified Technique for the Evaluation of Quasi-singular Singular and Strongly Singular Integrals. *Boundary Elements XIV*, Vol 1: Fiel Problems and Applications, Eds. C. A. Brebbia, J. Dominguez, F. Paris, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, 1992. p. 619–632, ISBN 1-85166-793-8.

- [36] Dumont, N. A. On the Efficient Numerical Evaluation of Integrals with Complex Singularity Poles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol 13, 1994. p. 155–168.
- [37] Dumont, N. A. A Procedure for the Semi-Analytical Evaluation of Generally Singular Integrals that Occur in the Three-Dimensional Boundary Element Analysis. *Boundary Elements XVII*, Eds. C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald, H. Power, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995. p. 83–90. ISBN 1 85312 324 2.
- [38] Noronha, M. A. M.; Dumont, N. A. A Procedure for the Semi-Analytical Evaluation of Generally Singular Integrals that Occur in the Boundary Element Analysis of Thick Plates. *Computational Mechanics'95*, Eds.: S. N. Atluri, G. Yagawa, T. A. Cruse, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Vol. 2, p. 2812–2817. ISBN 3–540–59114–1.
- [39] Dumont, N. A. Cauchy Principal Values, Finite-Part Integrals and Interval Normalization: Some Basic Considerations. *Computational Mechanics' 95*, Eds.: S. N. Atluri, G. Yagawa, T. A. Cruse, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Vol. 2, p. 2830–2835. ISBN 3–540–59114–1.
- [40] Dumont, N. A.; Noronha, M. A Simple, Accurate Scheme for the Numerical Evaluation of Integrals with Complex Singularity Poles. *Computational Mechanics Nr. 1*, 1998. Vol 22, p. 42–49.
- [41] Mindlin R. D.; Eshel N. N. On first-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 4, 1968. p. 109–124.
- [42] Dumont N. A.; Huamán D. Hybrid finite/boundary element formulation for strain gradient elasticity problems. In E. J. Sapountzakis and M. H. Aliabadi, editors, *BETeq 2009 – International Conference on Boundary Element Techniques*, , Athens, Greece, 2009. 6 P.
- [43] Dumont N. A.; Huaman D. A family of 2D and 3D hybrid finite elements for strain gradient elasticity. In C. Zhang, M. H. A.; Schanz, M.(Eds): *Advances in Boundary Element Techniques XI*, Proceedings of the 11th International Conference, Berlin, Germany. EC, Ltd., 2010. p. 144–153.
- [44] Dumont N. A.; Huamán D. A hybrid finite element implementation of gradient elasticity. In 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics – PACAM XI, Foz do Iguaçu, Brazil, 2010. 6 P.
- [45] Dumont N. A.; Chaves R. A. P. Simplified hybrid boundary element method applied to general time-dependent problems. In S. Valliappan and N. Khalili, editors, *Proceedings of the First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*, Sydney, Australia, 2001. p. 1009–1018.
- [46] Dumont N. A., Huamán D. An Hybrid Finite Element Method for Gradient Elasticity. *ICCES –2010*. International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, Las Vegas, USA, 2010.
- [47] Dumont N. A.; Oliveira M. F. F. An Expedite formulation of the boundary element method. In D. W. Pepper, S. N. Atluri, editors, *Abstracts of ICCE's10 - (International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences) Advances in Computational & Experimental Engineering and Sciences*, Las Vegas, USA, 2010.
- [48] Dumont N. A. From the collocation boundary element method to a meshless formulation. *Mecánica Computacional Vol XXIX*, Buenos Aires, Argentina, 2010. p. 4635–4659.
- [49] Dumont N. A.; Huamán D. On a consistent, mixed variational boundary element formulation for strain gradient elasticity. *Symposium IABEM*, 2013.
- [50] Huamán D. Formulações de Elasticidade Gradiente para Elementos Híbridos de Contorno. Dissertação de Mestrado, DEC/PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.
- [51] Lage E. N. Modelagem de localização de deformações com teoria de contínuo generalizado. Tese de Doutorado. DEC/PUC-Rio, 1997.

- [52] Erigen A. C. Linear theory of Micropolar Elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics.* Vol. 15, p. 909-923.
- [53] Zervos A.; Papanicolopoulos S. A.; Vardoulakis I. Two Finite-Element Discretizations for Gradient Elasticity, 2009. ASCE 0733-9399. 135:3 (203).

Apêndices

(A) Integração numérica

(A.1) Integrando impróprio logarítmico

Como se pode verificar a integração 2D das parcelas compostas por μ_{kjin}^* precisam de uma quadratura tipo Gauss regular mais uma quadratura logarítmica

$$\int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma = GL \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^{*,REG} n_k n_j u_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^{*,LN} n_k n_j u_{in} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^* n_k t_j u'_{in} d\Gamma = GL \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^{*,REG} n_k t_j u'_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^{*,LN} n_k t_j u'_{in} d\Gamma \quad (1)$$

onde

$$\mu_{kjm}^{*,REG} = \mu_{kjm}^* - \mu_{kjm}^{*,LN} \ln(\xi)$$

quando a singularidade se dá no extremo inferior e

$$\mu_{kjm}^{*,REG} = \mu_{kjm}^* - \mu_{kjm}^{*,LN} \ln(1-\xi) \quad (2)$$

quando a singularidade se dá no extremo superior da integração. O diferencial de comprimento no caso 2D é dado por

$$d\Gamma = J d\xi \quad (3)$$

Na seção 7.1.2.4 se descreve em detalhe a transformação em séries da tensão não-clássica com o intuito de identificar as parcelas vinculadas com a integração impropria do tipo $\ln(r)$.

A derivação direcional das equações do MHEC na EG geram tensões não-clássicas denominadas μ_{kjm}^R que incrementam as singularidades da integração a uma forte $O(1/r)$ mais uma fraca logarítmica como é descrito na seção 0 de integrações singulares. Portanto elas também precisam da decomposição em séries para a identificação correspondente das parcelas logarítmicas, as de forte singularidade e as do tipo Gauss regular.

$$\int_{\Gamma} \mu_{kjm}^R n_k n_j u_{in} d\Gamma = GL \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^{R,REG} n_k n_j u_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^{*,LN} n_k n_j u_{in} d\Gamma + pf \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^{R,Sing} n_k n_j u_{in} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^R n_k t_j u'_{in} d\Gamma = GL \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^{R,REG} n_k t_j u'_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^{*,LN} n_k t_j u'_{in} d\Gamma + pf \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^{R,Sing} n_k t_j u'_{in} d\Gamma \quad (4)$$

Elas são tratadas em detalhe na seção 7.1.4.3 onde se mostram os termos da regularização respectiva e os termos vinculados com a singularidade forte.

(A.2) Integrando Singular – Parte Finita

(A.2.1) Conceito de Normalização

A normalização da integração da parte finita tem como finalidade evitar a distorção dos resultados quando é aplicada uma mudança de escala ou dito de uma forma algébrica, quando é feito uma troca de variável de integração. O exemplo clássico é da integração $\int_0^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) \neq \int_0^1 \frac{1}{\xi} d\xi = \ln(1) = 0$, ($x=2\xi$) . A continuação apresentam os diferentes métodos de normalização para singularidade nos extremos inferior e superior de uma integral de forte singularidade $O(1/r)$.

(A.2.2) Normalização da parte finita, singularidade no extremo inferior $1/x$,

Considere-se a avaliação da PF da seguinte integral singular que é descomposta numa integração por partes como é mostrado a continuação,

$$\int_0^{x_0} \frac{1}{x} g(x) dx = \int_0^{x_0} \partial(\ln(x)g(x)) / \partial x dx - \int_0^{x_0} \ln(x) \partial g(x) / \partial x dx \quad (5)$$

onde x pode ser representado por uma variável paramétrica não necessariamente de forma linear de tal jeito que pode ser expresso por uma serie

$$x(\xi) = x(0) + \xi x'(0) + O(\xi^2) \quad (6)$$

onde por ser singular em $\xi = 0$, então $x(0)=0$ e portanto

$$x(\xi) = \xi x'(0) \quad (7)$$

Seguidamente pode-se avaliar na parte infinita a integral em questão e utilizar a identidade $\partial_x g dx = \partial_\xi g d\xi$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} \frac{1}{x} g(x) dx &= \ln(x_0)g(x_0) - \int_0^{x_0} \ln(x) \partial g(x) / \partial x dx \\ &= \ln(x_0)g(x_0) - \int_0^{x_0} \ln(x) \partial g(x) / \partial \xi d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

a qual pode integrar-se novamente por partes

$$\int_0^{x_0} \frac{1}{x} g(x) dx = \ln(x_0)g(x_0) - \int_0^1 \partial(\ln(x)g(x)) / \partial \xi d\xi + \int_0^1 \frac{1}{x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \quad (9)$$

onde pode-se utilizar a expressão de x em series para avaliar a primeira integral do rhs da equação

$$\begin{aligned}
pf \int_0^{x_o} \frac{1}{x} g(x) dx &= \ln(x_o)g(x_o) - (\ln(x_o)g(x_o) - \ln(\partial x / \partial \xi)g(x)|_{\xi=0}) + pf \int_0^1 \frac{1}{x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \\
&= \ln|\partial x / \partial \xi| g(x)|_{\xi=0} + pf \int_0^1 \frac{1}{x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi
\end{aligned} \tag{10}$$

(A.2.3) Normalização para problemas MEC 1/r – singularidade em $\xi=0$

Para o presente trabalho precisa-se trabalhar com uma expressão singular do tipo

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} f d\Gamma \tag{11}$$

mas à qual pode-se aplicar as identidades seguintes

$$d\Gamma = J d\xi = J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\xi} \right) d\xi = J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} dr \tag{12}$$

Portanto obter-se a equação

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} f d\Gamma = \int_0^{r_o} \frac{1}{r} f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} dr \tag{13}$$

onde é possível reconhecer uma função $g = f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1}$ tal que $f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} = f$ para $r = o$, já que

$$J_{\xi=o} = \left(\frac{dr}{d\xi} \right)_{\xi=o} \tag{14}$$

e portanto g é uma função que permite usar a identidade de normalização da seção anterior

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{1}{r} f d\Gamma &= \left\{ \ln|\partial r / \partial \xi| f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} \right\}_{\xi=o} + pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dr}{d\xi} d\xi \\
&= \left\{ \ln|\partial r / \partial \xi| f \right\}_{\xi=o} + pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f J d\xi
\end{aligned} \tag{15}$$

e portanto é possível escrever a expressão final da normalização

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{1}{r} f d\Gamma &= \ln(J_o) f_o + pf \int_0^1 \frac{1}{r} f J d\xi \\
\text{onde } J_o &= J(\xi=o), \quad f_o = f(\xi=o)
\end{aligned} \tag{16}$$

(A.2.4) Normalização para singularidade no extremo superior. Caso 1

Pode-se aplicar a mesma lógica feita para a singularidade no extremo inferior numa integral onde a singularidade encontra-se no extremo superior como a apresentada a continuação onde procede-se imediatamente à integração por partes

$$\begin{aligned}
pf \int_0^{x_o} \frac{1}{x_o-x} g(x) dx &= pf \int_0^{x_o} \partial(\ln(x_o-x)g(x)) / \partial x dx - pf \int_0^{x_o} \ln(x_o-x) \partial g(x) / \partial x dx
\end{aligned} \tag{17}$$

Se o primeiro integral do lado direito é avaliado na parte finita então obtém-se

$$pf \int_0^{x_0} \frac{1}{x_0 - x} g(x) dx = -\ln(x_0)g(0) - pf \int_0^{x_0} \ln(x_0 - x) \partial g(x) / \partial \xi d\xi \quad (18)$$

onde se aplicar-se novamente integração por partes na integral em função ξ obtém-se

$$\begin{aligned} pf \int_0^{x_0} \frac{1}{x_0 - x} g(x) dx &= -\ln(x_0)g(0) - pf \int_0^1 \partial(\ln(x_0 - x)g(x)) / \partial \xi d\xi + pf \int_0^1 \frac{1}{x_0 - x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \\ &= -\ln(x_0)g(0) - (\ln(x_0 - x)g(x)) \Big|_0^1 + pf \int_0^1 \frac{1}{x_0 - x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \end{aligned} \quad (19)$$

Aqui se pode aplicar a expressão em séries de $x_0 - x$ no ponto

$$\xi=1, x(1)=x_0$$

$$x - x_0 = (x - x_0) \Big|_{\xi=1} + (\xi - 1) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi=1} + (\xi - 1)^2 / 2 \frac{d^2 x}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1} + O(\xi^3) \quad (20)$$

então obtém-se

$$\begin{aligned} pf \int_0^{x_0} \frac{1}{x_0 - x} g(x) dx &= -\ln(x_0)g(0) - \left(pf \left(\ln(x_0 - x)g(x) \Big|_{\xi=1} \right) - \ln(x_0 - x)g(x) \Big|_{\xi=0} \right) \\ &\quad + pf \int_0^1 \frac{1}{x_0 - x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \\ &= -\ln(x_0)g(0) - \left(\ln \left| \partial x / \partial \xi \right| g(x) \Big|_{\xi=1} - \ln(x_0)g(0) \right) + pf \int_0^1 \frac{1}{x_0 - x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \end{aligned} \quad (21)$$

fincando finalmente a normalização em questão

$$pf \int_0^{x_0} \frac{1}{x_0 - x} g(x) dx = -\ln \left| \partial x / \partial \xi \right| g(x) \Big|_{\xi=1} + pf \int_0^1 \frac{1}{x_0 - x} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \quad (22)$$

(A.2.5) Normalização para singularidade no extremo superior. Caso 2

Outra forma de trabalhar pode ser começando pela expressão seguinte integrada por partes

$$pf \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x} g(x) dx = pf \int_{x_0}^{\infty} \partial(\ln(x)g(x)) / \partial x dx - pf \int_{x_0}^{\infty} \ln(x) \partial g(x) / \partial x dx \quad (23)$$

e considerar obviamente que

$$x = \bar{x}(\xi)(\xi - 1) = \bar{x}(\xi - 1) \quad (24)$$

E portanto que $x(0) = \bar{x}(0) = x_0$, $x(1) = 0$; neste caso x é representado por uma série no ponto de singularidade $\xi=1$ do seguinte jeito:

$$x = x \Big|_{\xi=1} + (\xi - 1) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = (\xi - 1) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \quad (25)$$

e então a integral em questão fica depois de integrar por partes em termos de ξ

$$\begin{aligned} pf \int_{x_0}^{\frac{1}{x}} g(x) dx &= -\ln(x_0)g(x_0) - \left(pf \left(\ln(x)g(x) \Big|_{\xi=1} \right) - \ln(x)g(x) \Big|_{\xi=0} \right) + pf \int_0^{\frac{1}{x}} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \\ &= -\ln(x_0)g(x_0) - \left(\ln \left| \partial x / \partial \xi \right| g(x) \Big|_{\xi=1} - \ln(x_0)g(x_0) \right) + pf \int_0^{\frac{1}{x}} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \end{aligned} \quad (26)$$

obtendo desta forma o resultado análogo ao caso anterior para uma singularidade no extremo superior da integral

$$pf \int_{x_0}^{\frac{1}{x}} g(x) dx = -\ln \left| \partial x / \partial \xi \right| g(x) \Big|_{\xi=1} + pf \int_0^{\frac{1}{x}} g(x) \partial x / \partial \xi d\xi \quad (27)$$

(A.2.6) Normalização para problemas MEC 1/r – singularidade em $\xi=1$

Com o resultado obtido aplicado ao problema de elementos de contorno se obtém então

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f d\Gamma &= \int_{r_0}^{\frac{1}{r}} f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} dr \\ &= - \left\{ \ln \left| \partial r / \partial \xi \right| f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} \right\}_{\xi=1} + pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dr}{d\xi} d\xi \\ &= \left\{ \ln \left| \partial r / \partial \xi \right| f \right\}_{\xi=1} + pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f J d\xi \end{aligned} \quad (28)$$

ou também

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} f d\Gamma = \ln(J_1) f_1 + pf \int_0^{\frac{1}{r}} f J d\xi \quad (29)$$

onde $J_1 = J(\xi=1)$, $f_1 = f(\xi=1)$

Nota:

Note-se que neste caso é satisfeita a identidade

$$J \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-1} \Big|_{\xi=1} = -1 \quad (30)$$

Efetivamente, o comprimento de r pode ser representado por $r = \bar{r}(\xi-1)$ de tal jeito que

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{d\bar{r}}{d\xi} (\xi-1) + \bar{r} \quad (31)$$

e portanto

$$\frac{dr}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = \bar{r} \Big|_{\xi=1} \quad (32)$$

Mas, por outro lado

$$\begin{aligned}
x &= \bar{x}(\xi - 1) \rightarrow dx/d\xi = d\bar{x}/d\xi (\xi - 1) + \bar{x} \rightarrow dx/d\xi|_{\xi=1} = \bar{x}|_{\xi=1} \\
y &= \bar{y}(\xi - 1) \rightarrow dy/d\xi = d\bar{y}/d\xi (\xi - 1) + \bar{y} \rightarrow dy/d\xi|_{\xi=1} = \bar{y}|_{\xi=1} \\
\bar{r} &= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \operatorname{sgn}(\xi - 1) = -\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \\
J|_{\xi=1} &= \sqrt{(dx/d\xi|_{\xi=1})^2 + (dy/d\xi|_{\xi=1})^2} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}|_{\xi=1} = -r|_{\xi=1}
\end{aligned} \tag{33}$$

e portanto fica comprovada a expressão da nota em questão

$$J|_{\xi=1} = -\bar{r}|_{\xi=1} = -\frac{dr}{d\xi}|_{\xi=1} \tag{34}$$

(A.2.7) Normalização da parte finita, singularidade de ordem $1/x^m$

Nesta forma é feita uma integração por partes até reduzir a singularidade $1/x^m$ a $1/x$. Para tal considere-se a seguinte notação

$$\begin{aligned}
x &= \bar{x}(\xi), \quad x(\xi = \xi_0 = 0) = 0 \\
g|_{\xi=\xi_0} &= g|_{x=x_0} = g_0 \\
g|_{\xi=1} &= g|_{x=x_1} = g_1 \\
\partial^m g(x(\xi))/\partial\xi^m &= \hat{g}^{(m)} \Rightarrow \partial^m g(x(\xi))/\partial\xi^m|_{\xi=\xi_0} = \hat{g}_0^{(m)} \\
\partial^m g(x)/\partial x^m &= g^{(m)} \Rightarrow \partial^m g(x)/\partial x^m|_{\xi=\xi_0} = g_0^{(m)}
\end{aligned}$$

então a integração por parte sequencial e questão fica

$$\begin{aligned}
pf \int_0^{x_1} \frac{1}{x^m} g(x) dx &= -pf \left[\frac{g}{(m-1)x^{m-1}} \right]_0^{x_1} - pf \left[\frac{g'}{(m-1)(m-2)x^{m-2}} \right]_0^{x_1} - pf \left[\frac{g''}{(m-1)..(m-3)x^{m-3}} \right]_0^{x_1} - \dots \\
&\quad - pf \left[\frac{g^{(m-2)}}{(m-1)!x} \right]_0^{x_1} + pf \int_0^{x_1} \frac{1}{(m-1)!} \frac{g^{(m-1)}}{x} dx \\
&= - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k-1)! g_1^{(k-1)}}{(m-1)! x_1^{m-k}} + pf \int_0^{x_1} \frac{1}{(m-1)!} \frac{g^{(m-1)}}{x} dx
\end{aligned} \tag{35}$$

Mas pela fórmula de normalização para singularidade $1/x$ aplicada á segunda parcela do lado direito se tem

$$\begin{aligned}
pf \int_0^{x_1} \frac{1}{x^m} g(x) dx &= - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k-1)! g_1^{(k-1)}}{(m-1)! x_1^{m-k}} \\
&\quad + \frac{1}{(m-1)!} \ln \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| g^{(m-1)} \Big|_{\xi=0} + pf \int_0^1 \frac{1}{(m-1)!} \frac{g^{(m-1)}}{x^m} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi
\end{aligned} \tag{36}$$

Mas se a terceira parcela do lado direito é integrada por partes em relação a ξ até incrementar a singularidade de $1/x$ até $1/x^m$ então

$$\begin{aligned}
pf \int_0^{x_1} \frac{1}{x^m} g(x) dx &= - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k-1)! g_1^{(k-1)}}{(m-1)! x_1^{m-k}} + \frac{1}{(m-1)!} \ln \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| g^{(m-1)} \Big|_{\xi=0} \\
&\quad + \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{1}{x} g^{(m-2)} + \frac{1}{x^2} g^{(m-3)} + \frac{1 \times 2}{x^3} g^{(m-4)} + \dots \frac{(m-2)!}{x^{m-1}} g \right) \Big|_{\xi=1} \\
&\quad + \frac{(m-1)!}{(m-1)!} pf \int_0^1 \frac{g}{x^m} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \\
&= - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k-1)! g_1^{(k-1)}}{(m-1)! x_1^{m-k}} + \frac{1}{(m-1)!} \ln \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| g^{(m-1)} \Big|_{\xi=0} \\
&\quad + \frac{1}{(m-1)!} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(k-1)! g_1^{(m-1-k)}}{x_1^k} \right) + pf \int_0^1 \frac{g}{x^m} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi
\end{aligned} \tag{37}$$

e portanto

$$pf \int_0^{x_1} \frac{1}{x^m} g(x) dx = \frac{1}{(m-1)!} \ln \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| g^{(m-1)} \Big|_{\xi=0} + pf \int_0^1 \frac{g}{x^m} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \tag{38}$$

Igualmente, para a singularidade no extremo superior $\xi=1$

$$pf \int_0^{x_1} \frac{1}{x^m} g(x) dx = - \frac{1}{(m-1)!} \ln \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| g^{(m-1)} \Big|_{\xi=1} + pf \int_0^1 \frac{g}{x^m} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \tag{39}$$

(A.2.8) Normalização para problemas MEC $1/r^m$

Para $m=2$

$$\begin{aligned}
pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma &= \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(f \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} \right) \Big|_{\xi=0} + pf \int_0^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi \\
&= \ln(J_0) \frac{f'_0}{J_0} + pf \int_0^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi
\end{aligned} \tag{40}$$

(A.3) Avaliação numérica da parte finita no MHEC

(A.3.1) Singularidade $1/r$

Parte-se da identidade normalizada para singularidade no extremo inferior à qual é acrescentada e restada $pf \int_0^1 f d\xi / \xi d\xi = 0$ de tal jeito de eliminar a singularidade dentro da parte finita e poder integrá-la diretamente através da quadratura regular de Gauss.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{1}{r} f d\Gamma &= \ln(J_o) f_o + pf \int_o^1 \frac{1}{r} f J d\xi \\
&= \ln(J_o) f_o + pf \int_o^1 \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{r} f J - \left(\frac{1}{r} f J \right) \Big|_{\xi=0} \right) d\xi \\
&= \ln(J_o) f_o + GL \int_o^1 \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{r} f J - f_o \right) d\xi \\
&= GL \int_o^1 \frac{1}{r} f J d\xi + f_o \left(\ln(J_o) - \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k} \right)
\end{aligned} \tag{41}$$

$$fp \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f d\Gamma = GL \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f J d\xi + f_o \left(\ln(J_o) - \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\xi_i} \right) \tag{42}$$

O mesmo procedimento pode-se aplicar ao caso de singularidade no extremo superior considerando antes

$$\bar{r}_1 = \operatorname{sgn}(\xi - 1) \sqrt{\bar{x}_1 + \bar{y}_1} = r'_1 = -J_1 \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
fp \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f d\Gamma &= - \left(\ln \left| \frac{dr}{d\xi} \right| \frac{f J}{r} \right)_{\xi=1} + pf \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f J d\xi \\
&= \ln(J_1) f_1 + pf \int_o^1 \frac{1}{\xi-1} \left(\frac{1}{r} f J - \left(\frac{1}{r} f J \right)_{\xi=1} \right) d\xi \\
&= GL \int_o^1 \frac{1}{r} f J d\xi + f_1 \left(\ln(J_1) + \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k - 1} \right)
\end{aligned} \tag{44}$$

ou também se

$$GL \int_o^1 \frac{1}{\xi} d\xi = \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k} = I_o^{/\xi} \tag{45}$$

$$GL \int_o^1 \frac{1}{\xi-1} d\xi = \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k - 1} = I_1^{/\xi} \tag{46}$$

$$I_o^{/\xi} = -I_1^{/\xi} = I^{/\xi} \tag{47}$$

Para singularidade no extremo inferior $\xi=0$

$$fp \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f d\Gamma = GL \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f J d\xi + f_o \left(\ln(J_o) - I^{/\xi} \right) \tag{48}$$

Para uma singularidade no extremo superior $\xi=1$

$$fp \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f d\Gamma = GL \int_{\Gamma_{el}} \frac{1}{r} f J d\xi + f_1 \left(\ln(J_1) - I^{/\xi} \right) \tag{49}$$

(A.3.2) Singularidade $1/r^2$

Considerações prévias:

$$\text{se } \partial(\) / \partial \xi = (\)', \partial^m(\) / \partial \xi^m = (\)^{(m)}, \delta = \xi - \xi_o \text{ e } (\)_{\xi=\xi_o} = (\)_o \text{ então}$$

$$\begin{array}{llll}
x = \bar{x}\delta & x' = \bar{x}'\delta + \bar{x} & x'' = \bar{x}''\delta + 2\bar{x}' & x^{(n+1)} = \bar{x}^{(n+1)}\delta + (n+1)\bar{x}^{(n)} \\
y = \bar{y}\delta & y' = \bar{y}'\delta + \bar{y} & y'' = \bar{y}''\delta + 2\bar{y}' & y^{(n+1)} = \bar{y}^{(n+1)}\delta + (n+1)\bar{y}^{(n)} \\
r = \bar{r}\delta & r' = \bar{r}'\delta + \bar{r} & r'' = \bar{r}''\delta + 2\bar{r}' & r^{(n+1)} = \bar{r}^{(n+1)}\delta + (n+1)\bar{r}^{(n)}
\end{array} \tag{50}$$

e portanto

$$\begin{array}{llll}
x_o = 0 & x'_o = \bar{x}_o & x''_o = 2\bar{x}'_o & x^{(n+1)}_o = (n+1)\bar{x}^{(n)}_o \\
y_o = 0 & y'_o = \bar{y}_o & y''_o = 2\bar{y}'_o & y^{(n+1)}_o = (n+1)\bar{y}^{(n)}_o \\
r_o = 0 & r'_o = \bar{r}_o & r''_o = 2\bar{r}'_o & r^{(n+1)}_o = (n+1)\bar{r}^{(n)}_o
\end{array} \quad (51)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
J &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \rightarrow J_o = \sqrt{x'^2_o + y'^2_o} \\
&\bar{r} = \operatorname{sgn}(\xi - \xi_o) \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \rightarrow \bar{r}_o = \operatorname{sgn}(\xi - \xi_o) \sqrt{\bar{x}_o^2 + \bar{y}_o^2}
\end{aligned} \quad \rightarrow \operatorname{sgn}(\delta) J_o = \bar{r}_o = r'_o \quad (12-1)$$

e também

$$\begin{aligned}
J' &= (x'x'' + y'y'')/J \rightarrow J'_o = (x'_ox''_o + y'_oy''_o)/J_o \\
&\bar{r}' = (\bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}')/\bar{r} \rightarrow \bar{r}'_o = (\bar{x}_o\bar{x}'_o + \bar{y}_o\bar{y}'_o)/\bar{r}_o
\end{aligned} \quad \rightarrow \operatorname{sgn}(\delta) J'_o = 2\bar{r}'_o = r''_o \quad (12-2)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} \left(fJ \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (fJ r'^{-1}) = \frac{\partial}{\partial \xi} (fJ r'^{-1}) \\
&= fJ \frac{1}{r'} + fJ' \frac{1}{r'} - fJ r'' \frac{1}{r'^2}
\end{aligned} \quad (52)$$

Considerando (12-2) e (12-1)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(fJ \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} \right) \Big|_{\xi=0} &= f'_o J_o \frac{1}{r'_o} + f_o J'_o \frac{1}{r_o^2} - f_o J_o r''_o \frac{1}{r_o'^3} \\
&= \frac{f'_o}{J_o} + f_o J'_o \frac{1}{J_o^2} - f_o r''_o \frac{1}{J_o^2}
\end{aligned} \quad (53)$$

finalmente se obtém

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(fJ \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} \right) \Big|_{r=0} = \frac{1}{r'_o} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(fJ \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} \right) \Big|_{\xi=0} = \frac{f'_o}{J_o} \quad (54)$$

podendo-se assim confirmar a normalização (jeito 1) das equações de normalização propostas.

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma = \frac{f'_o}{J_o} - \frac{f'_o}{J_o} + pf \int_o^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi = pf \int_o^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi \quad (55)$$

Agora é possível continuar com a avaliação numérica restando e somando

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma &= pf \int_o^1 \left(\frac{1}{r^2} f J - \frac{1}{(\xi - \xi_o)^2} \left(\frac{f_o J_o}{\bar{r}_o^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{fJ}{\bar{r}^2} \right) \Big|_{\xi=\xi_o} (\xi - \xi_o) \right) \right) d\xi \\
&\quad + pf \int_o^1 \left(\frac{1}{(\xi - \xi_o)^2} \frac{f_o}{J_o} + \frac{1}{(\xi - \xi_o)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{fJ}{\bar{r}^2} \right) \Big|_{\xi=\xi_o} \right) d\xi
\end{aligned} \quad (56)$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{fJ}{r^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (fJ \bar{r}^{-2}) \\ &= fJ \frac{1}{\bar{r}^2} + fJ' \frac{1}{\bar{r}^2} - fJ \frac{2\bar{r}'}{\bar{r}^3} \end{aligned} \quad (57)$$

Por (12-1) e (12-2)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{fJ}{r^2} \right)_{\xi=\xi_o} = \frac{f'_o}{J_o} \quad (58)$$

então

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma &= pf \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} fJ - \frac{1}{(\xi - \xi_o)^2} \left(\frac{f_o J_o}{\bar{r}_o^2} + \frac{f'_o}{J_o} (\xi - \xi_o) \right) \right) d\xi \\ &\quad + pf \int_0^1 \left(\frac{1}{(\xi - \xi_o)^2} \frac{f_o}{J_o} + \frac{1}{(\xi - \xi_o)} \frac{f'_o}{J_o} \right) d\xi \\ &= GL \int_0^1 \frac{1}{r^2} fJ d\xi - GL \int_0^1 \left(\frac{1}{(\xi - \xi_o)^2} \frac{f_o}{J_o} + \frac{1}{(\xi - \xi_o)} \frac{f'_o}{J_o} \right) d\xi \\ &\quad + pf \int_0^1 \left(\frac{1}{(\xi - \xi_o)^2} \frac{f_o}{J_o} + \frac{1}{(\xi - \xi_o)} \frac{f'_o}{J_o} \right) d\xi \end{aligned} \quad (59)$$

que finalmente resulta na expressão da avaliação numérica da integral singular no extremo $\xi = \xi_o$

$$\begin{aligned} pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma &= GL \int_0^1 \frac{1}{r^2} fJ d\xi + \frac{f_o}{J_o} \left(-1 - \operatorname{sgn}(\xi - \xi_o) \frac{C_o}{J_o^2} - \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{(\xi_k - \xi_o)^2} \right) \\ &\quad + \frac{f'_o}{J_o} \left(\ln(J_o) - \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k - \xi_o} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

ou também se pode utilizar a seguinte notação

$$GL \int_0^1 \frac{1}{\xi^2} d\xi = \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k^2} = I_o'^{\xi^2} \quad (61)$$

$$GL \int_0^1 \frac{1}{(\xi - 1)^2} d\xi = \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{(\xi_k - 1)^2} = I_1'^{\xi^2} \quad (62)$$

$$I_1'^{\xi^2} = I_o'^{\xi^2} = I'^{\xi^2} \quad (63)$$

$$GL \int_0^1 \frac{1}{\xi} d\xi = \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k} = I_o'^{\xi} \quad (64)$$

$$GL \int_0^1 \frac{1}{\xi - 1} d\xi = \sum_{k=1}^{ng} \frac{h_k}{\xi_k - 1} = I_1'^{\xi} \quad (65)$$

$$I_o'^{\xi} = -I_1'^{\xi} = I'^{\xi} \quad (66)$$

A equação obtida está de acordo com Guiggiani e Polyzos quem consideram integração semi-analítica sem normalização

A parte finita com singularidade no extremo $\xi_o = 0$

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma = GL \int_o^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi + \frac{f'_o}{J_o} (\ln(J_o) - I'^{\xi}) + \frac{f_o}{J_o} \left(-1 - \frac{J'_o}{2J_o} - I'^{\xi^2} \right) \quad (67)$$

e com singularidade no extremo $\xi_o=1$

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma = GL \int_o^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi + \frac{f'_1}{J_1} (-\ln(J_1) + I'^{\xi}) + \frac{f_1}{J_1} \left(-1 + \frac{J'_1}{2J_1} - I'^{\xi^2} \right) \quad (68)$$

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma = GL \int_o^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi + \frac{f'_1}{J_1} (+I'^{\xi}) + \frac{f_1}{J_1} (-1 - I'^{\xi^2}) \quad (69)$$

De acordo aos critérios de normalização e parte finita de acordo a Dumont e Huamán a parte finita com singularidade no extremo $\xi_o=0$

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma = GL \int_o^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi + \frac{f'_o}{J_o} (+\ln(J_o) - I'^{\xi}) + \frac{f_o}{J_o} (-1 - I'^{\xi^2}) \quad (70)$$

e com singularidade no extremo $\xi_o=1$

$$pf \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f d\Gamma = GL \int_o^1 \frac{1}{r^2} f J d\xi + \frac{f'_1}{J_1} (-\ln(J_1) + I'^{\xi}) + \frac{f_1}{J_1} (-1 - I'^{\xi^2}) \quad (71)$$

Para efeitos de cálculo numérico pode-se usar

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \quad \rightarrow f'|_{\xi=0} = \frac{1}{2} \left(x''_o \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=x'_o} + y''_o \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=y'_o} \right) = f'_o$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=0} = \text{sgn}(\delta) \frac{f'_o}{J_o}$$

(A.4) Avaliação numérica da parte descontínua da Matriz H

A integração 2D das parcelas compostas por μ_{kjin}^R e σ_{kjin}^R precisam dos conceitos de parte finita, cujos requerimentos já foram revisados na seção 0, e da parte descontínua. O desenvolvimento em series de μ_{kjin}^R permite descompô-lo numa parcela regular ($)^{R, REG}$, outra logarítmica ($)^{R, LN}$, e finalmente uma integral singular ($)^{R, SNG}$ que é descomposta numa parte finita $pf()$ e outra parte descontínua $pd()$. σ_{kjin}^* e σ_{kjin}^R possuem singularidades $1/r$ e $1/r^2$ respectivamente as quais abrangem todo o integrando em cada caso.

A decomposição das integrais se mostra a seguir

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma &= pf \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + pd \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma \\
\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j u_{in} d\Gamma &= pf \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j u_{in} d\Gamma + pd \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j u_{in} d\Gamma \\
\int_{\Gamma} \mu_{kjm}^R n_k n_j u_{in} d\Gamma &= GL \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^{R,REG} n_k n_j u_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^{R,LN} n_k n_j u_{in} d\Gamma \\
&\quad + pf \int_{\Gamma} \mu_{jim}^{R,SNG} n_k n_j u_{in} d\Gamma + pd \int_{\Gamma} \mu_{jim}^{R,SNG} n_k n_j u_{in} d\Gamma \\
\int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^R n_k t_j u'_{in} d\Gamma &= GL \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^{R,REG} n_k t_j u'_{in} d\Gamma + QLN \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kjm}^{R,LN} n_k t_j u'_{in} d\Gamma \\
&\quad + pf \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{jim}^{R,SNG} n_k t_j u'_{in} d\Gamma + pd \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{jim}^{R,SNG} n_k t_j u'_{in} d\Gamma
\end{aligned} \tag{72}$$

onde as partes descontínuas, considerando o sentido da integração mostrado na Figura 52, têm as seguintes características:

$$\begin{aligned}
pd \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^A d\Gamma = \int_{\theta^-}^{\theta^+} \frac{1}{\epsilon} f_{mn}^A \epsilon d\theta \\
pd \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^R n_j u_{in} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{AR} d\Gamma = \int_{\theta^-}^{\theta^+} \frac{1}{\epsilon^2} f_{mn}^{AR} \epsilon d\theta \\
pd \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{jim}^{BR,SNG} n_k t_j u'_{in} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} f_{mn}^{BR} d\Gamma = \int_{\theta^-}^{\theta^+} \frac{1}{\epsilon^2} f_{mn}^{BR} \epsilon d\theta \\
pd \int_{\Gamma} \mu_{jim}^{CR,SNG} n_k n_j u_{in} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r} f_{mn}^{CR} d\Gamma = \int_{\theta^-}^{\theta^+} \frac{1}{\epsilon} f_{mn}^{CR} \epsilon d\theta
\end{aligned} \tag{73}$$

Genericamente se pode afirmar que nos casos de singularidade $1/r$ e $1/r^2$ se precisa da análise de parte descontínua; no último caso se precisa de um tratamento mais refinado já que há uma indeterminação de forma contrária que o caso da parte finita tipo $1/r$ a qual é finita. Embora a presente formulação tenha este tipo de singularidades não se precisará nos todos os casos de parte descontínua devido a natureza de algumas integrais de precisar só parte finita, tal como foi tratado na seção 5.2.

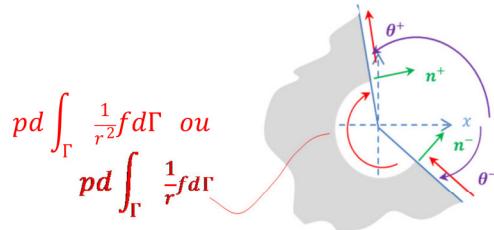


Figura 52. Exemplo de integração da parte descontínua

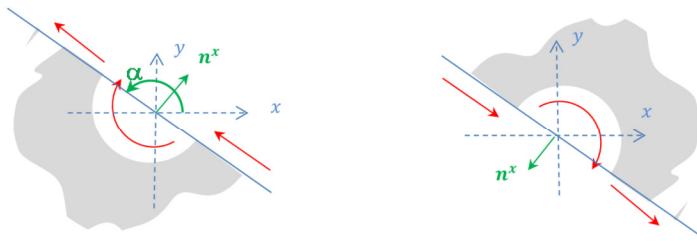


Figura 53. Integração da parte descontínua numa superfície suave de inclinação α

(A.4.1) Parte descontínua com singularidade $1/r$

Como foi mencionado, a integral e o limite respectivo resulta neste caso de um valor finito e do jeito

$$H_{mn}^{X,Disc} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta^-}^{\theta^+} \frac{1}{\epsilon} f_{mn}^X \epsilon d\theta = \int_{\theta^-}^{\theta^+} f_{mn}^X d\theta \quad (74)$$

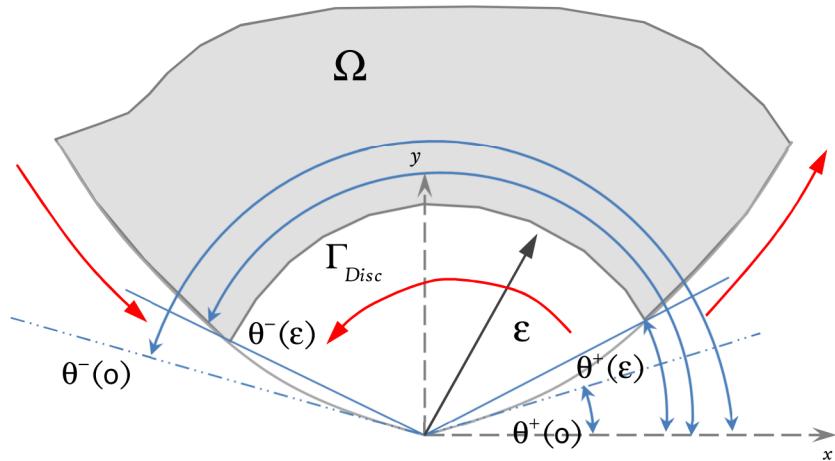
(A.4.2) Singularidade $1/r^2$

Os casos de parte descontínua com hípersingularidade $1/r^2$ podem tratar-se segundo o trabalho desenvolvido por Guiggiani [25]. Aparentemente deveria acontecer com as matrizes H^{AR} e H^{BR} que contém no contorno de parte descontínua o denominador quadrático, mas como se mostrou na seção 5.2 a integração das duas matrizes requerem só de integração de parte finita.

Só como parte da pesquisa geral se mostra a seguir o jeito de calcular a parte descontínua com hípersingularidade quadrática

$$H_{mn}^{X,Disc} = pd \int_{\theta^-}^{\theta^+} \frac{1}{\epsilon^2} f_{mn}^X \epsilon d\theta = pd \int_{\theta^-}^{\theta^+} \frac{1}{\epsilon} f_{mn}^X d\theta \quad (75)$$

Como o objectivo é a avaliação no limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ então é possível trabalhar com séries e conceito de geometria diferencial



$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^-(\varepsilon) = \theta^-(o) - \frac{\kappa^-(o)}{2}\varepsilon \\ \theta^+(\varepsilon) = \theta^+(o) + \frac{\kappa^+(o)}{2}\varepsilon \\ \kappa = \frac{-x_1''x_2' + x_1'x_2''}{J^3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad pd \int_{\theta^- - \frac{1}{\varepsilon}}^{\theta^+} f_{mn}^X d\theta = \frac{f_{mn}^X(\theta_o^+) \kappa^+(\theta_o^+) + f_{mn}^X(\theta_o^-) \kappa^-(\theta_o^-)}{2}$$

Figura 54. Integração da parte descontínua numa superfície não suave com singularidade quadrática ($1/r^2$)

Portanto a parte descontínua é dada pela parte finita

$$pd \int_{\theta^-}^{\theta^+} f_{mn}^X d\theta = \frac{f_{mn}^X(\theta_o^+) \kappa^+(\theta_o^+) + f_{mn}^X(\theta_o^-) \kappa^-(\theta_o^-)}{2} \quad (76)$$

(B) Algoritmo de montagem das Matrizes H e U* na EG

A continuação apresenta-se a sequência de sentencias que estruturam o algoritmo para a montagem da matriz H e U, para tal efeito mostra-se na figura embaixo as considerações geométricas para identificar as grandezas e os parâmetros vinculados com elas. O ponto X refere-se ao ponto fonte onde é possível considerar a aplicação de uma clássica \mathbf{P}^* e não-clássica \mathbf{R}^* vinculados respectivamente com sistemas interno identificados com p_m^* e r_ℓ^* . O ponto campo está identificado com Y onde são medidas grandezas devidas às forças aplicadas em X .

Definiu-se a o tensor da solução fundamental como

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [Y(r,v,g)\delta_{im} - X(r,g)r_i r_m] \quad (77)$$

E em função dela define-se o seguintes parâmetros:

O deslocamento de segunda ordem

$$q_{im}^* = u_{im,j}^* n_j \quad (78)$$

O tensor de tensões de Cauchy

$$\tau_{jim}^* = 2\mu\varepsilon_{jim}^* + \lambda u_{km,k}^* \delta_{ji} \quad (79)$$

O tensor da tensão total

$$\sigma_{jim}^* = \tau_{jim}^* - g^2 \tau_{jim,kk}^* \quad (80)$$

O tensor de tensões não-clássica

$$\mu_{kjm}^* = g^2 \tau_{jim,k}^* \quad (81)$$

A força de superfície clássica

$$P_i = \sigma_{jim}^* n_j p_m^* \quad (82)$$

A força de superfície de não-clássica

$$R_i = \mu_{kjm}^* n_k n_j p_m^* \quad (83)$$

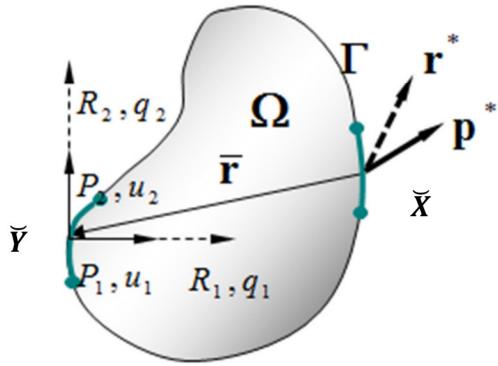


Figura 55. Esquema das considerações geométricas da estrutura a serem utilizadas no programa para o cálculo da matriz H e U.

As duas equações integrais que descrevem o método híbrido são

$$\left[\begin{array}{l} \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* n_j u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{J^2} \mu_{kijm}^* n_k t_j u_{in}' d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma \end{array} \right] \left\{ p_m^* \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* n_j u_{in} + \frac{1}{J^2} \mu_{kji}^* n_k t_j u_{in}') d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mu_{kji}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} P_i u_{in} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} R_i u_{in} d\Gamma \end{array} \right\} = \mathbf{O}$$

$$H_{nm}^T p_m^* = p_n^G - p_n^p \text{ ou } H^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p}^G - \mathbf{p}^p \quad (84)$$

e

$$\left[\begin{array}{l} \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{ir}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{ir,j}^* d\Gamma \end{array} \right] \left\{ p_r^* \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i^p d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{i,j}^p d\Gamma \\ - \left[\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j u_{in}' d\Gamma \right] \left\{ d_n \right\} - \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_j n_k u_{in} d\Gamma \end{array} \right\} \left\{ d_n \right\} = \mathbf{O}$$

$$F_{mr}^* p_r^* = H_{mn} d_n^G - b_m \text{ ou } \mathbf{Fp}^* = \mathbf{Hd}^G - \mathbf{b} \quad (85)$$

(B.1) Montagem da Matriz U Considerações Teóricas

A expressão que vai ser utilizada no método expedito através da simplificação da matriz U está baseada na expressão

$$\begin{bmatrix} u_i \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{im}^*)^{Y-X} & (u_{\ell i}^R)^{X-Y} \\ (q_{im,j}^*)^{Y-X} & (q_{\ell i}^*)^{X-Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m^* \\ R_{\ell}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{im}^*)^{Y-X} & (n_k u_{\ell i,k}^*)^{X-Y} \\ (n_j u_{im,j}^*)^{Y-X} & (n_j \partial_j)^Y (n_k u_{\ell i,k}^*)^{X-Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m^* \\ R_{\ell}^* \end{bmatrix} \quad (86)$$

Chame-se as coordenadas locais

$$x_i^Y = Y_i - X_i = x_i \quad (87)$$

$$x_i^X = X_i - Y_i \quad (88)$$

Onde **Y** corresponde ao ponto campo e **X** ao ponto fonte, então $\partial x_i^Y = -\partial x_i^X$

de tal jeito que

$$u_{im,j}^* = (u_{im,j}^*)^{Y-X} = \partial u_{im}^* / \partial x_j^Y = \partial u_{im}^* / \partial x_j \quad (89)$$

e isso da lugar a que

$$u_{\ell i}^R = (u_{\ell i}^R)^{X-Y} = n_k^X \partial u_{\ell i}^* / \partial x_k^X = -n_k^X \partial u_{\ell i}^* / \partial x_j^Y = -n_k^X \partial u_{\ell i}^* / \partial x_j \quad (90)$$

E por outro lado

$$q_{\ell i}^R = n_p^Y \partial u_{\ell i}^R / \partial x_p^Y = n_p^Y n_k^X \partial^2 u_{\ell i}^* / \partial x_k^X \partial x_p^Y = -n_k^X n_p^Y \partial^2 (u_{\ell i}^*) / \partial x_k^Y \partial x_p^Y = -n_k^X n_k^Y u_{\ell i, kp}^* \quad (91)$$

Que finalmente fica expressa como

$$q_{\ell i}^R = -n_k^X n_k^Y u_{\ell i, kp}^* \quad (92)$$

A matriz \mathbf{U}^* é dada portanto por

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^* & \mathbf{u}^R \\ \mathbf{q}^* & \mathbf{q}^R \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (u_{im}^*)^{Y-X} & (n_k u_{\ell i, k}^*)^{X-Y} \\ (n_j u_{im, j}^*)^{Y-X} (n_j \partial_j)^Y (n_k u_{\ell i, k}^*)^{X-Y} \end{bmatrix} \quad (93)$$

(B.2) Extensão da matriz H

A extensão da matriz H que inclui campos de deslocamento provenientes de forças não-clássicas é dada por

$$\underline{\mathbf{H}} = p f \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \sigma_{jm}^* n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_j n_k u_{iq} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \sigma_{jm}^R n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_j n_k u_{iq} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (94)$$

A qual pode representar-se como a composição matricial

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B & \mathbf{H}^C \\ \mathbf{H}^{AR} + \mathbf{H}^{BR} & \mathbf{H}^{CR} \end{bmatrix} \quad (95)$$

(B.3) Parâmetros

A diferença do caso clássico onde o loop vinculado como o ponto fonte vincula só o ponto geométrico no caso da elasticidade gradiente é necessário considerar em que elemento de contorno encontra-se o ponto em questão devido a presença da normal do ponto fonte nas tensões de segunda ordem. A continuação definem-se as variáveis principais. Utilizar-se a tipografia Courier para identificar todos os termos tal como é desenvolvido de forma didática no programa Maple.

```

muc      : módulo de corte
g        : constante constitutiva não-clássica da energia de deformação
superficial
nu       : módulo de Poisson
oe       : ordem do elemento, (1 se linear, 2 se quadrático, 3 se cúbico)
nn       : número de pontos nodais da estrutura
ne       : número de elementos do modelo estrutural (=nn/oe)
M:       : Número de ponto fonte ={1..nn}
xn[k]    : vetor das abscissas dos pontos de discretização da estrutura
k={1..nn}
yn[k]    : vetor das coordenadas dos pontos de discretização da estrutura
k={1..nn}
ie       : contador do elemento vinculado aos pontos campo (={1..ne})
ns       : contador do número de sub elemento de integração ={1..oe}
ig[j]    : é o vetor de incidência nodal do elemento ie vinculado aos pontos
campo
j={1.. oe+1}
l        : contador de nó local vinculado a ie ={1..oe+1}
xi       : variável paramétrica de interpolação nodal usada para a integração
linear
ng       : número de pontos de Gauss para integração numérica
xg[k]    : vetor correspondente às coordenadas paramétricas de integração
gaussiana regular
wg[k]    : pesos das coordenadas paramétricas de integração gaussiana regular
nl       : número de pontos de integração numérica com integrando logarítmicos
xl[k]    : vetor correspondente às coordenadas paramétricas de integração
logaritmica
wl[k]    : pesos das coordenadas paramétricas de integração logarítmica
Nf(ns,oe,xi): função de interpolação nodal num sub elemento ns, ordem oe.
N[1]     : vetor vinculado às funções de interpolação nodal função de xi =
Nf(ns,oe,xi)
xie     : abscissa do elemento ie função de xi
yie     : coordenada do elemento ie função de xi
n       : vetor normal no ponto de integração [xie, yie]
tn       : vetor tangencial no ponto de integração [xie, yie]
ieM     : contador do elemento vinculado ao ponto campo (={1..ne})
igM[jM]  : é o vetor de incidência nodal do elemento ieM vinculado aos pontos
campo jM={1..oe+1}
lM      : contador de nó local vinculado ={1..oe+1}
nx      : vetor normal no ponto fonte
n       : vetor normal no ponto campo
ndo     : número de partições para integração de singularidade ln(xi) do
procedure lnproc( )
facAmp   : coeficiente de amplificação de comprimento das partições da
integração de singularidade ln(xi) do procedure lnproc( )
Us[i,m]   : tensor 2x2 solução fundamental  $(\bar{u}_{im}^*)^{Y-X}$ 
UsR[i,1]   : tensor 2x2  $(n_k \bar{u}_{\ell i,k}^*)^{X-Y} = u_{\ell i}^R$ 
qs[i,m]    : tensor 2x2  $(n_j \bar{u}_{im,j}^*)^{Y-X}$ 
qsR[i,1]   : tensor 2x2  $(n_j \partial_j)^Y (n_k \bar{u}_{\ell i,k}^*)^{X-Y} = u_{\ell i,k}^R n_k$ 
sA[i,m]   : força de superfície clássica  $\sigma_{jim}^* n_j$  função de (x,y,n,nu,mu)

```

sB[i,m] : força de superfície clássica devida à parcela não-clássica
 $\frac{1}{J^2} \mu_{kijm}^* \eta_k t_j$ função de (x,y,n,nu, mu)

sC[i,m] : força de superfície não-clássica $\frac{1}{J^2} \mu_{kijm}^* \eta_k n_j$ função de (x,y,n,nu, mu)

sAR[i,m] : força de superfície clássica devido à parcela NC $\sigma_{jim}^R n_j$ função de (x,y,n,nu, mu)

sBR[i,m] : força de superfície clássica devida à parcela não-clássica
 $\frac{1}{J^2} \mu_{kijm}^R \eta_k t_j$ função de (x,y,n,nu, mu)

sCR[i,m] : força de superfície não-clássica $\frac{1}{J^2} \mu_{kijm}^R \eta_k n_j$ função de (x,y,n,nu, mu)

sAi[i,m] : integrando **sA[i,m]*N[1]*J** em função de (xi)
sBi[i,m] : integrando **sB[i,m]*dN[1]*J** em função de (xi)
sCi[i,m] : integrando **sC[i,m]*N[1]*J** em função de (xi)
sARI[i,m] : integrando **sAR[i,m]*N[1]*J** em função de (xi)
sBRI[i,m] : integrando **sBR[i,m]*dN[1]*J** em função de (xi)
sCRi[i,m] : integrando **sCR[i,m]*N[1]*J** em função de (xi)

sB_REGi[i,m] : integrando parcela regular **sBi[i,m]** em função de (xi)
sB_LNi[i,m] : integrando parcela logarítmica de **sBi[i,m]** em função de (xi)
sC_REGi[i,m] : integrando parcela regular **sCi[i,m]** em função de (xi)
sC_LNi[i,m] : integrando parcela logarítmica de **sCi[i,m]** em função de (xi)
sBR_REGi[i,m] : integrando parcela regular **sBRI[i,m]** em função de (xi)
sBR_LNi[i,m] : integrando parcela logarítmica de **sBRI[i,m]** em função de (xi)
sCR_REGi[i,m] : integrando parcela regular **sCRi[i,m]** em função de (xi)
sCR_LNi[i,m] : integrando parcela logarítmica de **sCRi[i,m]** em função de (xi)

hA[i,m] : integração de **sAi*N[1]*J** por Gauss regular em coordenadas locais 2x2
hB[i,m] : integração de **sBi** por Gauss regular e consideração logarítmica 2x2
hC[i,m] : integração de **sCi** por Gauss regular e consideração logarítmica 2x2
hAR[i,m] : integração de **sARI** por Gauss regular 2x2
hBR[i,m] : integração de **sBRI** por Gauss regular e consideração logarítmica 2x2
hCR[i,m] : integração de **sCRi** por Gauss regular e consideração logarítmica 2x2

hA_disc[k][i,m] : parcela descontínua da matriz **hA** com ponto fonte **k** em coordenadas locais 2x2
hA_pf2[i,m] : parcela da parte finita da matriz **hA** em coordenadas locais 2x2 no ponto **ig[1]**

HA : sub matriz de **H** em coordenadas globais $\int_{\Gamma} \sigma_{jin}^* n_j u_{im} d\Gamma$ da incidência nodal de **hA**, **hA_pf2** e **hA_disc**

HB : sub matriz de **H** em coordenadas globais $\int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma$ da incidência nodal de **hB**

HC : sub matriz de **H** em coordenadas globais $\int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_j n_k u_{iq} d\Gamma$ da incidência nodal de **hC**

HAR : sub matriz de **H** em coordenadas globais $\int_{\Gamma} \sigma_{jin}^R n_j u_{im} d\Gamma$ da incidência nodal de **hAR**

HBR : sub matriz de **H** em coordenadas globais $\int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R t_j n_k u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma$ da incidência nodal de **hBR**

HCR : sub matriz de **H** em coordenadas globais $\int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_j n_k u_{iq} d\Gamma$ da incidência nodal de **hCR**

xx, yX : coordenadas dos pontos nodais fonte
xy, yY : coordenadas dos pontos nodais campo

Notas:
sA, sB, ..., sCR são calculados algebricamente em função de **x, y, nu, mu**, fora de loops

sB, sC, sAR, sCR são decompostos em duas parcelas de acordo à singularidade da função de BesselK, elas são decompostas em uma parcela regular (que são integradas pela quadratura de Gauss) e uma parcela que contém logaritmo neperiano, de tal jeito que

f=f_pol+f_LN*ln(r/g).

Mas como **ln(r/g)** pode ser expresso como $\ln(rb*xi/g)=\ln(rb/g)+\ln(xi)$ onde rb é sempre diferente de zero para sub intervalos de integração de [0..1], então é possível escrever

f=f_pol + f_LN*ln(rb/g)+ f_LN*ln(xi)=f_REG+f_LN*ln(xi)

Onde **f_REG** pode ser integrada pela quadratura de Gauss regular e a última através da quadratura logarítmica. **f_REG** é calculado segundo a localização da singularidade; para indeterminação no extremo inferior, $xi=0$, **f_REG** é dado por

f_REG0:=f-f_LN(xi);

e para indeterminação no extremo superior, $xi=1$, por

f_REG1:=f-f_LN(1-xi);

Também têm-se o seguinte caso similar ao anterior nos termos **sBR, SCR**, os quais tem a estrutura algébrica seguinte:

f= f_SING/r +f_REG +f_REG+f_LN*ln(xi)

sAr é um integrando de singularidade $O(1/r^2)$.

(B.4) Cálculos e considerações preliminares para a elaboração do Algoritmo

Prévia determinação de **ng** avaliam-se as abcissas e pesos de integração gaussiana regular **xg[k]** e **wg[k]** respectivamente e analogamente as **n1** abcissas e pesos de integração logarítmica **xl[k]** e **wl[k]**.

Define-se a tabela das funções de interpolação nodal para diferente valores de **oe={1, 2, 3}** respectivamente

```
TN := [[1-xi, xi], [(1-xi)*(a-xi)/a, xi*(1-xi)/(a*(1-a)), xi*(a-xi)/(a-1)],
[1-11*xi*(1/2)+9*xi^2-9*xi^3*(1/2), -45*xi^2*(1/2)+9*xi+27*xi^3*(1/2),
-27*xi^3*(1/2)+18*xi^2-9*xi*(1/2), xi-9*xi^2*(1/2)+9*xi^3*(1/2)]];
```

Define-se uma tabela de transformação paramétrica de tal jeito de fazer a integração numérica em sub elementos de numeração **ns={1..oe+1}** e cada um para um intervalo **xi=[0..1]**

```
Txi := [[xi], [a*xi, a+(1-a)*xi], [(1/3)*xi, (xi+1)*(1/3), (xi+2)*(1/3)]];
```

E define-se a função de interpolação Nf tendo como parâmetros a ordem do elemento, os números de sub elementos e a coordena a utilizar

```
Nf := proc (oe, ns, xi) -> convert(subs(xi = Tx1[oe][ns], [seq(TN[oe][j], j = 1 .. oe+1)]), Vector) end proc;
```

Antes dos loops da montagem da matriz H são calculados os integrandos de **HA, HB, HC, HAR, HBR, HCR** os quais são respectivamente **sA, sB, sC, sAR, sBR, sCR** em função de **x, y, nu, um, g, J.**

Seguidamente são calculados os parâmetros nodais correspondentes às características geométricas do contorno, isto é, os vetores normais antes e depois de cada ponto **n_i[k]** e **n_f[k]**, os ângulos que formam **t_i[k]** e **t_f[k]** e a parcela matricial descontínua 2x2 **hA_disc[k]**, sendo **k** o ponto nodal correspondente á singularidade em questão. Também são calculados os vetores tangentes localizados nas coordenadas de segunda ordem.

Também são calculados fora da rotina de montagem os valores nodais correspondentes à diagonal da matriz \mathbf{U}^* que no caso da elasticidade gradiente possui valores clássicos finitos quando o raio é nulo.

(B.5) Considerações para a numeração dos graus de liberdade

(B.1.1) Graus de liberdade totais: $gdl = gdlC + gdlNC$

A seguir mostram-se os gdl clássicos e não-clássicos, as incidências nodais e relações com a numeração de cada elemento.

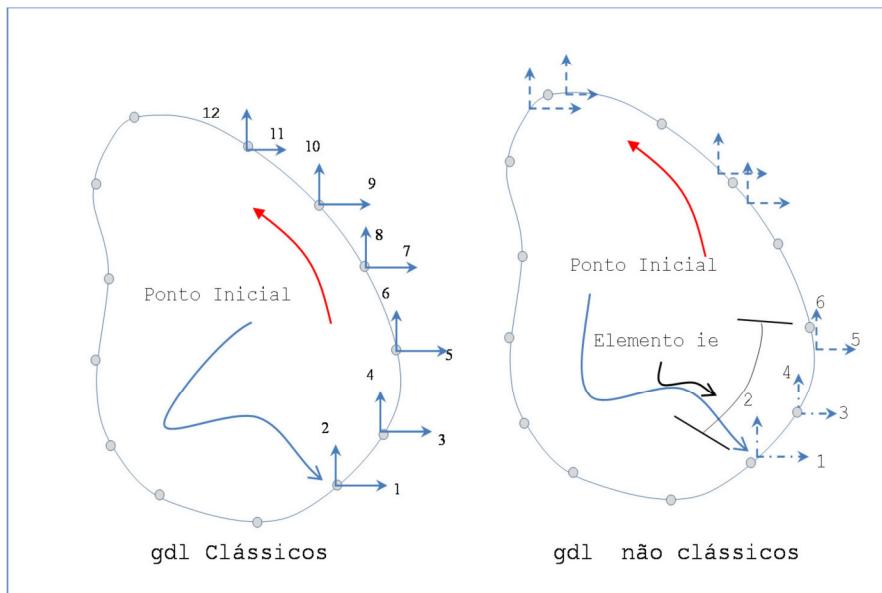


Figura 56. Regras de numeração de nós, elementos e gdl clássicos e não-clássicos.

1. Número global de ponto nodal $k = \{1..nn\}$
2. Número global do elemento $ie = \{1..ne\}$
3. Número interno de ponto $l = \{1..oe+1\}$ num elemento.
4. Número de graus de liberdade clássico $gdlc$
5. Número de graus de liberdade Não-clássico $gdlq$
6. Número de coordenada global generalizada $kd=\{1..gdl\}$,
7. $d[kd]$ vetor de deslocamento generalizado com gdl representado pelo subscrito kd
8. $q[kd]$ vetor de deslocamento generalizado com gdl representado pelo subscrito kd
9. Vetor local de deslocamento clássico no ponto k : $[d[kdx], d[kdy]]$
10. Vector local de deslocamento não-clássico no ponto k do elemento ie : $[q[kqx], q[qqy]]$

- | | |
|--|--|
| (i). $ne := nn/oe ;$
(ii). $gdlc := 2*nn ;$
(iii). $gdlq := 2*(oe+1)*ne ;$
(iv). $glt := gdlc+gdlq ;$
(v). $k := oe*ie-oe+1 \text{ ou } k=ig[l] ;$ | (vi). $kdx := 2*k-1 ;$
(vii). $kdy := 2*k ;$
(viii). $kd := kdx \text{ ou } kdy$
(ix). $a := (oe+1)*ie-(oe+1)+1 ;$
(x). $kqx := 2*a-1 ;$
(xi). $qqy := 2*a ;$ |
|--|--|

Nota:

Existem 4 gdlNC nos pontos que compartilham elementos: 2 antes e 2 depois

(B.2) Graus de liberdade não-clássicos por elemento (oe)

Os graus de liberdade não-clássicos por elemento se mostram esquematicamente no gráfico seguinte, embora seja numericamente equivalente aos graus de liberdade clássicos locais, de forma global diferem porque o nó comum entre elementos têm quatro graus de liberdade, dois gdl em cada lado do ponto.

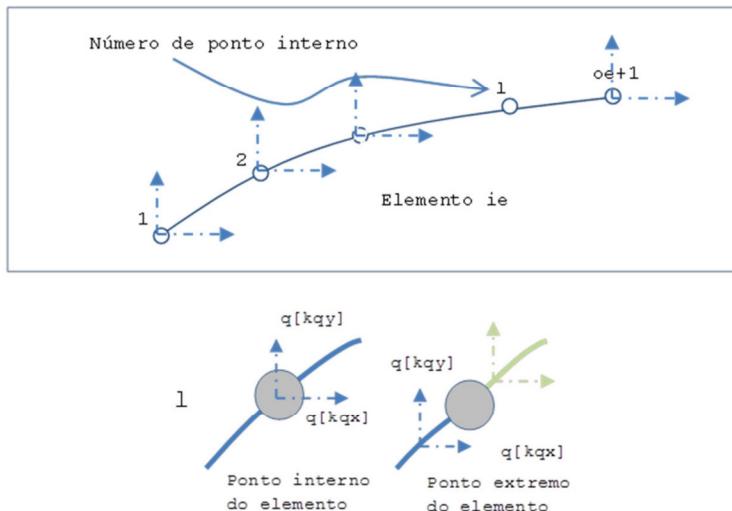


Figura 57. Identificação dos gdl não-clássicos num elementos de integração

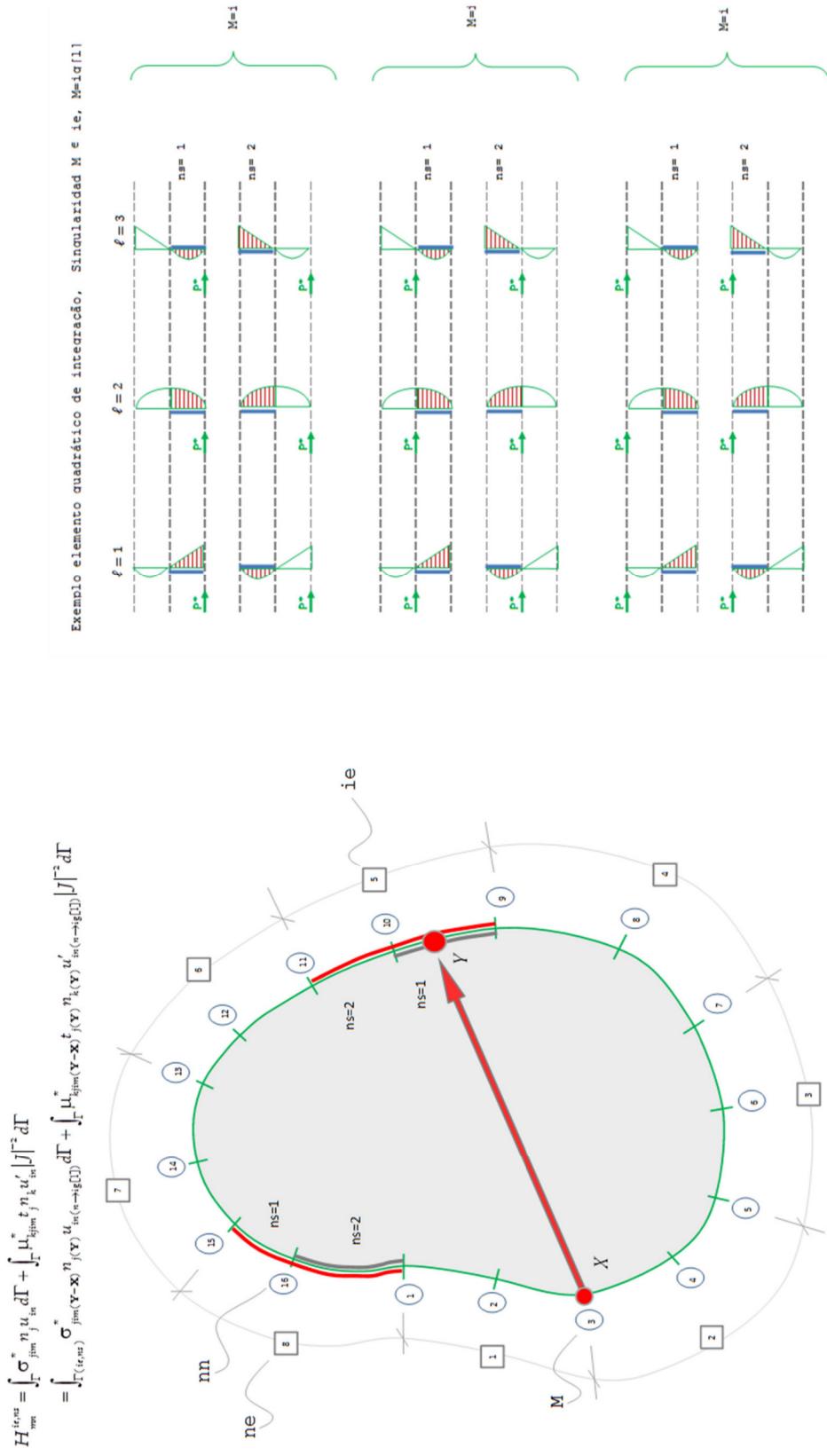


Figura 58. Identificação dos parâmetros de programação: número de elemento (ie), de nó (M), de sub elemento de integração (ns). Singularidade quando M é ie

(B.6) Algoritmo da Montagem da Matriz H

A estrutura básica do programa de montagem é dada por

```

Loop 1 Para cada elemento ie=1.. ne
    Loop 1.1 Para cada subelemento de integração ns=1..oe
        Loop 1.1.1 Calcula-se N de tal jeito que cada subelemento de integração seja de para xi=[0..1]
            Calcula-se xie, yie, n, tn, J, ig todas em função xi
            Calcula-se xb, yb, rb[0], rb[1] todas em função xi para os casos de singularidade
        Loop 1.1.1.1 Para ieM=1..ne
            Calcula-se o vetor de indencia nodal igM do elemento ie
                Loop 1.1.1.1.1 Para lM=1..oe+1
                    Calcula-se o vetor normal de cada ponto fonte nx no nó lM e as coordenadas do ponto
                    fonte xx:=xn[lM], yX:=yn[lM]
                    Se calcula on integrando, função de xi, das matrizes 2x2: sAi,
                    sBi, sCi, sARi, sBRi, sCRi, sB_REGi, sB_LNi, sC_REGi, sC_LNi,
                    sBR_REGi, sBR_LNi, sCR_REGi, sCR_LNi.
                Loop 1.1.1.1.1.1 Para l=1..oe+1 calcula-se o vetor normal de cada ponto fonte ny no
                    nó lM e as coordenadas do ponto fonte xY:=xn[lM], yY:=yn[lM]
                    Calculo da matriz H: calcula-se para r:=sqrt( (xie-xX)^2+(yie-yX)^2 )
                    através da integração de Gauss as seguintes expressões
                    Se igM[lM] = ig[ns] ou igM[lM] = ig[ns+1] se calcula a integração
                    através de critérias de singularidade
                    hA = ∫ sA dΓ → O(1/r)          hAR = ∫ sAR dΓ → O(1/r^2)
                    hB = ∫ sB dΓ → O(ln(r))      hBR = ∫ sBR dΓ → O(1/r, ln(r))
                    hC = ∫ sC dΓ → O(ln(r))      hCR = ∫ sCR dΓ → O(1/r, ln(r))
                    Primeiro se calcula por Gauss regular todos os integrandos.
                    Para a singularidade ln(xi) se usa o procedure lnpoc:
                    int_f = lnpoc(f, f_REGi, f_LNi, ndo, facAmp) para hB, hC,
                    hBR, hCR.
                    Para a singularidade 1/(xi-xio) se calcula a segunda parcela da parte finita (a
                    primeira está incluída na integração de Gauss), por exemplo para a integração da
                    matriz 2x2 hA
                    SA_pf2 :=Map(2,2, (i,j)-> subs(xi=xio, xb=xb0, yb=yb0,
                    nu=nuo, g=go, muc=muo), f_SA * N[1]*J):
                    hA_pf2 :=Matrix(2,2, (i,j)-> evalf( sA_pf2[i,j] *(csgn(xi-
                    xio)*(ln(J(xio))-shg))):
                    Se ig[ns] <>ig[lM] ou ig[ns+1] <> ig[lM] então se calcula a integração
                    por Gauss regular as seguintes grandezas
                    hA = ∫ sA dΓ          hB = ∫ sB dΓ          hC = ∫ sC dΓ
                    hAR = ∫ sAR dΓ      hBR = ∫ sBR dΓ      hCR = ∫ sCR dΓ
                    Fim condicional
                    É feita a correspondente incidência nodal considerando as parcelas descontínuas
                    hA → HA, hB → HB, hC → HC,
                    hAR → HAR, hBR → HBR, hCR → HCR
    
```

```

Calculo da matriz U:
se ig[1] < > igM[M] então calcula-se os valores dos tensores 2x2 das
seguintes grandezas
usNL → (Us) para x=xY-xX, y=yY-yX
usRNL → (UsR) para x=xX-xY, y=yX-yY
qsNL → (qs) para x=xY-xX, y=yY-yX
qsRNL → (qsR) para x=xX-xY, y=yX-yY
se ig[1] = igM[M] então calcula-se os valores finitos das diagonais quando r
→ 0
É feita a correspondente incidência nodal com as matrizes globais
usNL → usG, usRNL → usRG, qsNL → qsG, qsRNL → qsRG
    Fim dos loops l, lM, ieM
Fim dos loops ns, ie
    
```

As integrações com singularidades são tratadas de acordo ao mostrado em detalhe na seções 0 e 7 onde se mostra como determinar a parte finita e descontínua segundo o tipo, $1/r$ ou $1/r^2$.

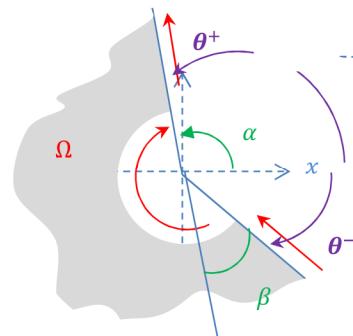


Figura 59. Integração da parcela descontínua quando acontecer a singularidade $1/r$

(C) Tabela de MECs na EG

It .	Método	Elastocidade Clássica		Equação	H.D = G.T	Elastocidade Gradiente		
		Parâmetros	Equação			Parâmetros		
1	BEM Boundary Element Method	MEC Método de Elementos de Contorno	$H \cdot d = G \cdot t$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} I + \tilde{H}^A & H^C \\ \tilde{H}^{AR} & \frac{1}{2} I + H^{CR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^A & G^B \\ G^{AR} & G^{BR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$ (Polyzos & Tsopouros)	$\tilde{H}^A = \int_{\Gamma} \tilde{p}_m u_n d\Gamma$ $\tilde{p}_m^* = \sigma_{jm}^* n_j - \mu_{kjm}^* n_k - \mu_{kjim}^* n_i + (D_p n_p) \mu_{kjim}^* n_j n_k + (D_j n_k) \mu_{ijm}^*$ $G^A = \int_{\Gamma} u_m^* n_j u_n d\Gamma$, $G^B = \int_{\Gamma} u_{mj}^* n_j u_{in} d\Gamma$	$\tilde{H}^A = \int_{\Gamma} \tilde{p}_m^* u_n d\Gamma$ $\tilde{p}_m^* = \sigma_{jm}^* n_j - \mu_{kjm}^* n_k - \mu_{kjim}^* n_i + (D_p n_p) \mu_{kjim}^* n_j n_k + (D_j n_k) \mu_{ijm}^*$ $G^A = \int_{\Gamma} u_m^* n_j u_n d\Gamma$		
2	HBEM/HF EM Hybrid Boundary /Finite Element Method	MHEC/M HEF Método de Elementos Finitos de Contorno	$H \cdot d = F \cdot p^*$ $H^T \cdot p^* = P$	$\begin{bmatrix} C^* + H^A + H^B \\ H^{AR} + H^{BR} + C^{*R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^A & F^B \\ F^{AR} & F^{BR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^* \\ R^* \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} C^* + H^A + H^B \\ H^{AR} + H^{BR} + C^{*R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^* \\ R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ R^* \end{bmatrix}$ (Dumont & Huamán)	$H = \underline{H} + \overline{H}$ $\underline{H} = \underline{H}^A + \underline{H}^B = \begin{bmatrix} H^A + H^B \\ H^{AR} + H^{BR} \\ H^{CR} \end{bmatrix}$ $\overline{H} = \begin{bmatrix} C^* & O \\ +C^* & C^R \end{bmatrix}$	$\tilde{H}^A = \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}_{jm}^* n_j u_m d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k u_{in} d\Gamma$ $\underline{H} = pf \int_{\Gamma} \sigma_{jm}^* n_j u_m d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k u_{in} d\Gamma$ $\overline{H} = \int_{\Gamma} \sigma_{jm}^* f_j n_k u_m' d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* f_j n_k u_{in}' d\Gamma$	$\tilde{H}^A = \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}_{jm}^* n_j u_m d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k u_{in} d\Gamma$ $\underline{H} = pf \int_{\Gamma} \sigma_{jm}^* n_j u_m d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k u_{in} d\Gamma$ $\overline{H} = \int_{\Gamma} \sigma_{jm}^* f_j n_k u_m' d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* f_j n_k u_{in}' d\Gamma$	
3	SHBEM Simplified Hybrid Boundary Element Method	MHECS Método de Elementos de Contorno Simplificado	$H^T \cdot P^* = P$ $U^* \cdot P^* = D$	$\begin{bmatrix} C^* + H^A + H^B \\ H^{AR} + H^{BR} + C^{*R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ R^* \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U^{**} & U^{RR} \\ U^{*R} & U^{RR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix}$ (Dumont & Huamán)	$F = \underline{F} + \overline{F}$ $\underline{F} = pf \int_{\Gamma} \sigma_{jm}^* n_j u_m d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k u_{in} d\Gamma$ $\overline{F} = \begin{bmatrix} F^A & F^B \\ F^{AR} & F^{BR} \end{bmatrix}$	$\tilde{H}^T \cdot P^* = P$ $\tilde{U}^* \cdot P^* = D$	$\tilde{H}^T \cdot P^* = P$ $\tilde{U}^* \cdot P^* = D$	
4	EBEM Expedit Boundary Element Method	MEEC Método Expedito de Elementos de Contorno	$\tilde{H} \cdot d = U^{*T} \cdot P$	$\begin{bmatrix} C^* + H^A + H^B \\ H^{AR} + H^{BR} + C^{*R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{*R} & U^{RR} \\ U^{R*} & U^{RR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix}$ (Dumont & Huamán [baseado em Polyzos e Tsopouros])	$\tilde{H} \cdot D = \tilde{U}^* \cdot P$	$L = \int_{\Gamma} u_{ij} u_{is} d\Gamma$ Fórmula idêntica para $L^{**}, L^{*R}, L^{R*}, L^{RR}$ só que elas são matrizes de diferentes ordens dependentes do gdl clássicos e não-clássicos.	$\tilde{U}^{**} = u_{imj}^* \Big _{i \rightarrow gdl(n)} \cdot \tilde{U}^{*R} = u_{imj}^* \Big _{i \rightarrow gdl(n)}$ $U^{R*} = -u_{imj}^* \Big _{i \rightarrow gdl(n)} \cdot U^{RR} = -u_{imj}^* \Big _{i \rightarrow gdl(n)}$	
			$H = pf(\underline{H}), \underline{H} = pd(\overline{H})$	$H^{AR} = \frac{\partial \underline{H}^A}{\partial \eta}, F^{BR} = \frac{\partial \overline{H}^B}{\partial \eta}, \sigma_{jm}^R = \frac{\partial \sigma_{jm}^*}{\partial \eta}, \mu_{kjm}^R = \frac{\partial \mu_{kjm}^*}{\partial \eta}$ η : vetor normal no ponto fonte				