

## 9 Elemento de viga na EG

A análise da flexão para materiais de elasticidade gradiente considerando a hipótese de Euler Bernoulli foi desenvolvida em Papargyri–Beskou et al [28]; a isto se acrescentou o estudo de flambagem que foi resolvido analiticamente na elasticidade gradiente mediante duas constantes constitutivas: (1) a constante de deformação volumétrica  $g$  e (2) a constante de energia de deformação superficial  $\ell$ . As equações que regem o equilíbrio na flexão e no problema de flambagem são obtidas utilizando princípios variacionais e as hipóteses básicas de Euler Bernoulli. Finalmente são obtidas as condições de contorno clássicas e não-clássicas mediante a análise variacional usando a definição de energia de deformação e o método de resíduos ponderados. O problema de flexão de vigas foi estudado por teorias não-clássicas com o intuito de explicar resultados experimentais que não puderam ser explicados pela elasticidade clássica em estados de tensão-deformação no regime não linear, Papargyri–Beskou et al [28].

Do mesmo modo ao caso de tensão axial, se mostra neste capítulo uma influência irregular do parâmetro constitutivo não-clássico  $\ell$  na solução de problemas com uma configuração física e geométrica simétrica. Apresentam-se exemplos ilustrativos que mostram ditas particularidades e a necessidade de limitar a elasticidade gradiente a só uma constante constitutiva não-clássica tal como é utilizada por Aifantis[6]–[8].

Outra observação que se pode fazer à formulação de vigas de Papargyri – Beskou está relacionada com a hipótese da seção plana de Bernoulli depois da deformação; considerando que o tamanho das partículas é relevante em relação ao comprimento da viga pode ser factível que esta hipótese contenha uma imprecisão não tolerável através da evidência experimental que não é encontrada na pesquisa bibliográfica.

### 9.1. Solução do problema de viga EG

Suponha-se uma viga submetida a um carregamento  $q(x)$ , um sistema de coordenadas  $x$  ao longo da viga e os eixos restantes localizados como são ilustrados na Figura 28(a).

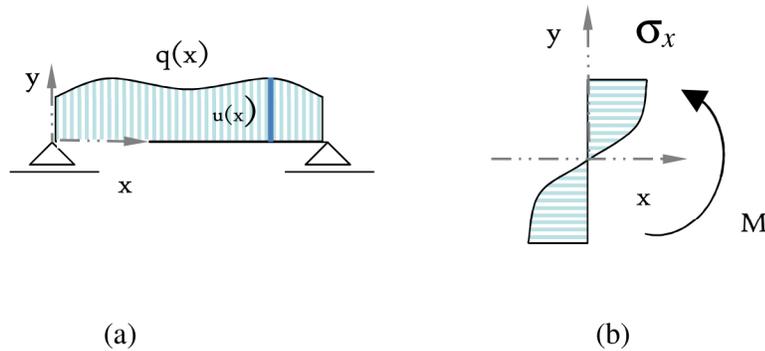


Figura 28. – Sistema de coordenadas, carregamento e distribuição das tensões de uma viga na elasticidade gradiente.

No trabalho desenvolvido por Papargyri–Beskou et al [28], se usa a teoria simples de elasticidade gradiente proposta por Vardoulakis e Sulem [11]. Nessa teoria se misturam os conceitos gerais da teoria de Mindlin [2] com o conceito dos efeitos da energia de deformação superficial de Casal [32], portanto são utilizadas 4 constantes constitutivas (2 clássicas,  $\ell$  e  $g^2$  e 2 não-clássicas  $\nu$  e  $\mu$ ).

As equações de Vardoulakis e Sulem [11] da tensão de Cauchy, a tensão dupla e a tensão total são definidas respectivamente como:

$$\tau_x = E\varepsilon_x + \ell E\varepsilon'_x \quad (9-1)$$

$$\mu_x = \ell E\varepsilon_x + g^2 E\varepsilon'_x \quad (9-2)$$

$$\sigma_x = \tau_x - \frac{d\mu_x}{dx} = E\left(\varepsilon_x - g^2 \frac{d^2\varepsilon_x}{dx^2}\right) = E(\varepsilon_x - g^2\varepsilon''_x) \quad (9-3)$$

onde

$\varepsilon_x$  : deformação axial da viga a flexão.

$\ell$ : constante da energia de deformação superficial.

$g$ : constante de energia de deformação volumétrica.

$E$  : módulo de Young

As condições de equilíbrio da seção transversal ilustradas na Figura 28(b) são obtidas mediante as relações clássicas:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (9-4)$$

$$\int_A \sigma_x y dA = -M \quad (9-5)$$

Para a obtenção da equação de deslocamentos se estabelece a relação clássica entre momento fletor e força cortante dada por:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (9-6)$$

e pela hipótese de Euler Bernoulli:

$$\epsilon_x = k y \quad (9-7)$$

identificando  $k$  como a curvatura na direção  $x$ . Consequentemente as equações de equilíbrio são:

$$E \left( k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2} \right) \int_A y dA = 0 \quad (9-8)$$

$$E \left( k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2} \right) \int_A y^2 dA = -M \quad (9-9)$$

Se for utilizada a hipótese de Euler Bernoulli, tem-se:

$$k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (9-10)$$

$$k = -\frac{d^2 u}{dx^2} \quad (9-11)$$

então, obtém-se a equação diferencial de deslocamentos transversais na flexão de uma barra de elasticidade gradiente como:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = EI \left( u^{IV} - g^2 u^{VI} \right) = -q(x) \quad (9-12)$$

que é equivalente a:

$$EI \left( u^{IV} - g^2 u^{VI} \right) + q(x) = 0 \quad (9-13)$$

e cuja solução homogênea está representada pela equação:

$$u_h = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 + c_5 g^4 \sinh(x/g) + c_6 \cosh(x/g) \quad (9-14)$$

## 9.2. Condições de Contorno em vigas EG

As condições de contorno estão compreendidas pelas clássicas

$$\begin{aligned} V(0) &= V_1 \\ V(L) &= V_2 \end{aligned} \quad \text{onde } V = EI \left( u''' - g^2 u^V \right) \quad (9-15)$$

e/ou

$$\begin{aligned} M(0) &= M_1 \\ M(L) &= M_2 \end{aligned} \quad \text{onde } M = EI \left( u'' - g^2 u^{IV} \right) \quad (9-16)$$

e/ou

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1 & u'(0) &= u'_1 & \text{e/ou} \\ u(L) &= u_2 & u'(L) &= u'_2 \end{aligned} \quad (9-17)$$

e as condições de contorno não-clássicas

$$\begin{aligned} m(0) &= m_1 \text{ e/ou} \\ m(L) &= m_2 \end{aligned} \quad \text{onde } m = EI(lu'' + g^2 u''') \quad (9-18)$$

e/ou

$$\begin{aligned} u''(0) &= u_1'' \text{ e/ou} \\ u''(L) &= u_2'' \end{aligned} \quad (9-19)$$

### 9.3. Matriz de Rigidez de uma viga EG

A igual que no caso do problema de tensão axial é possível também aqui aplicar o método híbrido para a determinação da matriz de rigidez apenas acrescentando um grau de liberdade não-clássico em cada extremo da viga tal como se mostra na Figura 29(a).

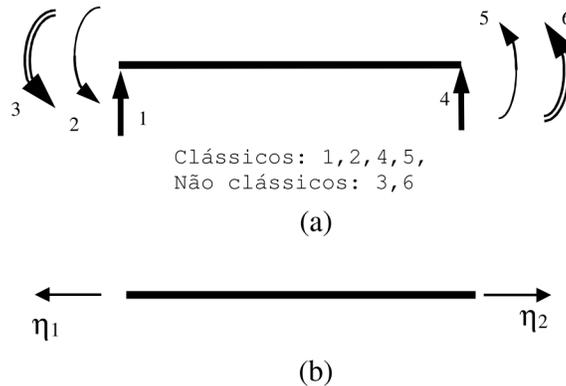


Figura 29. (a) Representação do sistema de coordenadas de uma viga na elasticidade gradiente; (b) cossenos diretores no contorno da viga.

O sistema de deslocamentos internos pode ser escrito do mesmo modo que o caso de tensão axial na forma de um produto matricial

$$\mathbf{d}(x) = \begin{bmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* & u_5^* & u_6^* \\ u_1'^* & u_2'^* & u_3'^* & u_4'^* & u_5'^* & u_6'^* \\ u_1''^* & u_2''^* & u_3''^* & u_4''^* & u_5''^* & u_6''^* \end{bmatrix} \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^{*'} \\ \mathbf{u}^{*''} \end{bmatrix} \mathbf{p}^* \quad (9-20)$$

sendo  $\mathbf{u}^* = \langle g^4 e^{-x/g} \quad g^4 e^{-x/g} \quad x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \rangle$  o vetor que representa a solução do problema a través de um sistema interno de forças  $\mathbf{p}^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*, p_6^*]^T$  de tal forma que  $u(x) = \mathbf{u}^* \mathbf{p}^*$ .

A seguir o sistema de forças internas

$$\mathbf{N}^* = \begin{Bmatrix} V \\ M \\ m \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - g^2 \frac{\partial^5}{\partial x^5} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \\ g^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \mathbf{u}^* \quad (9-21)$$

e a matriz  $\mathbf{U}^*$  que resulta

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^*|_{x=0} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x}|_{x=0} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial x^2}|_{x=0} \\ \mathbf{u}^*|_{x=L} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x}|_{x=L} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial x^2}|_{x=L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^4 & g^4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ g^3 & -g^3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g^2 & g^2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ g^4 e^{L/g} & g^4 e^{-L/g} & L^3 & L^2 & L & 1 \\ g^3 e^{L/g} & -g^3 e^{-L/g} & 3L^2 & 2L & 1 & 0 \\ g^2 e^{L/g} & -g^2 e^{-L/g} & 6L & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-22)$$

Igualmente se pode avaliar  $\mathbf{N}^*$  no contorno

$$\mathbf{N}^*|_{x=0} = \mathbf{N}_1^* = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ g^3 & -g^3 & 6g^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-23)$$

$$\mathbf{N}^*|_{x=L} = \mathbf{N}_2^* = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6L & 2 & 0 & 0 \\ g^3 e^{L/g} & -g^3 e^{-L/g} & 6g^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-24)$$

e também é necessário a definição de um sistema de matrizes vinculados com o cossenos diretores em cada extremo

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-25)$$

e também as matrizes de transformação do sistema interno ao sistema global nodal

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-26)$$

de tal forma de escrever a matriz de transformação cinemática

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}_1^{*T} \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^{*T} \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \quad (9-27)$$

a qual fica

$$\mathbf{H} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & g^3 & 0 & 0 & g^3 e^{L/g} \\ 0 & 0 & -g^3 & 0 & 0 & -g^3 e^{-L/g} \\ 6 & 0 & 6g^2 & 6 & 6 & 6g^2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-28)$$

Agora é possível calcular a matriz de rigidez através da expressão obtida do método híbrido simplificado formulado por Dumont e Chaves [45]

$$\mathbf{K}_{[6 \times 6]} = \mathbf{H}^T \mathbf{U}^{*-1} \quad (9-29)$$

Matriz simétrica cujos termos da diagonal superior são:

$$\begin{aligned} K_{11} &= 12(2C - 2 - S/\bar{g})/\Delta \\ K_{22} &= 4L^2(3C - 3S\bar{g} - S/\bar{g})/\Delta \\ K_{33} &= L^4(4S\bar{g} - C - 24(S - C\bar{g} + \bar{g})\bar{g}^3 + 12\bar{g}^2)/\Delta \\ K_{44} &= K_{11}, \quad K_{55} = K_{22}, \quad K_{66} = K_{33} \\ K_{12} &= K_{11}L/2, \\ K_{13} &= 6L^2(4(1-C)\bar{g}^2 + 4S\bar{g} - 1 - C)/\Delta \\ K_{14} &= -K_{11}, \quad K_{15} = K_{11}L/2, \quad K_{16} = -K_{13} \\ K_{23} &= 2L^3(12(1-C)\bar{g}^2 + 9S\bar{g} - 1 - 2C)/\Delta \\ K_{24} &= -K_{13}, \quad K_{25} = K_{13}L - K_{23}, \quad K_{26} = K_{23} - K_{13}L \\ K_{34} &= -K_{13}, \quad K_{35} = K_{13}L - K_{23} \\ K_{36} &= L^4(4(1-C)\bar{g}^2 + 4S\bar{g} - 1 - C)/\Delta \\ K_{45} &= -K_{11}L/2, \quad K_{46} = K_{13}, \\ K_{55} &= K_{22}, \quad K_{56} = -K_{13}, \\ K_{66} &= K_{33}, \end{aligned} \quad (9-30)$$

onde

$$\Delta = L^3(8C + 24\bar{g}(C\bar{g} - S - \bar{g}) - S/\bar{g} + 4)/EI \quad (9-31)$$

$$\bar{g} = g/L, \quad C = \cosh(g/L), \quad S = \sinh(g/L) \quad (9-32)$$

É possível conferir que quando  $g \rightarrow 0$  a matriz  $\mathbf{K}$  tende à conhecida matriz de rigidez de uma viga clássica:

$$\lim_{g \rightarrow 0} \mathbf{K} = \mathbf{K}_{CLASICO} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-33)$$

A Figura 30 mostra a sensibilidade da matriz de rigidez ao parâmetro constitutivo  $g$  e como ela incrementa a rigidez dos termos a medida que  $g$  cresce. Se é feita uma condensação dos gdl não-clássicos vinculados com as variáveis cinemáticas  $\mathbf{u}''$  e os momentos duplos  $\mathbf{o}$  de segunda ordem,  $m$  então o gráfico fica como se mostra na Figura 30.

Sensibilidade de matriz de rigidez de uma viga EG ao parâmetro  $g$

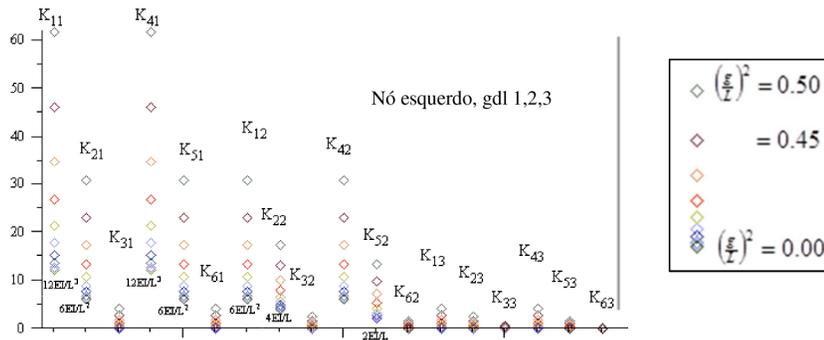


Figura 30. Sensibilidade ao parâmetro  $g$  dos termos da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  [6x6] de uma viga EG, a medida que  $g$  tende a zero os termos tendem aos valores de matriz clássica, valores inferiores do gráfico.

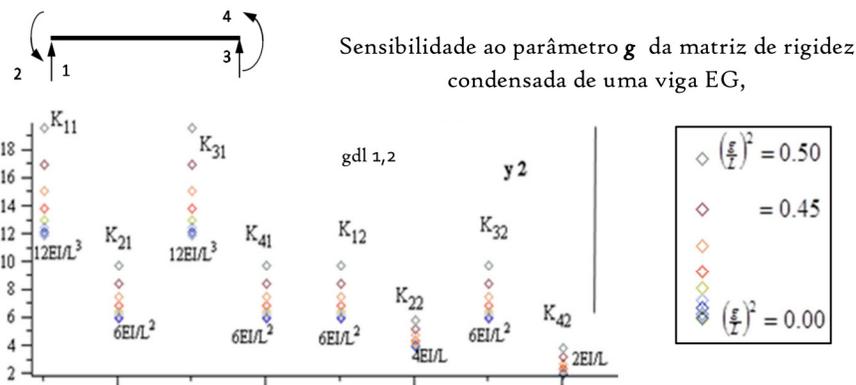


Figura 31. Sensibilidade de menor intensidade ao parâmetro  $g$  dos termos da matriz de rigidez condensada  $\mathbf{K}$  [4x4] de uma viga EG, a medida que  $g$  tende a zero os termos tendem aos valores de matriz clássica, valores inferiores do gráfico.



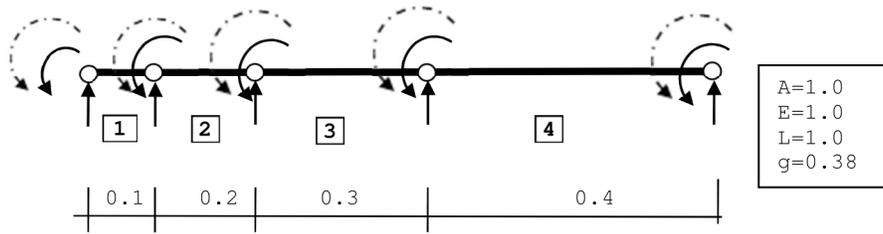


Figura 33. Sistema de 4 EF-EG tipo viga com 15 gdl, 10 clássicos e 5 não-clássicos, 3 gdl em cada nó.

Erro[K]	# Elementos	Casas Decimais		
		10	20	30
$\sqrt{\frac{\sum(k_{ij}^I - k_{ij}^A)^2}{\sum(k_{ij}^A)^2}}$	2	0.070505355	0.68129x10 <sup>-11</sup>	0.11956 x10 <sup>-20</sup>
	4	0.033524267	0.344617x10 <sup>-12</sup>	0.330399x10 <sup>-21</sup>

Tabela 2. Erro da discretização de elementos finitos tipo viga EG comparados com a matriz analítica de comprimento L=1. Mostra-se a necessidade de trabalhar com grande número de casas decimais pelos erros numéricos.

### 9.5. Exemplos ilustrativos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de problemas tipo viga considerando as duas constantes constitutivas não-clássicas utilizadas por Tsepoura et al [1] e Papargyri-Beskou [28],  $g$  e  $\ell$ , apenas para mostrar as inconveniências do segundo parâmetro na respostas de deslocamentos e forças internas. Se  $\ell=0$  então os resultados viram automaticamente à elasticidade gradiente resultando fisicamente consistente como foi no caso de elementos de treliça.

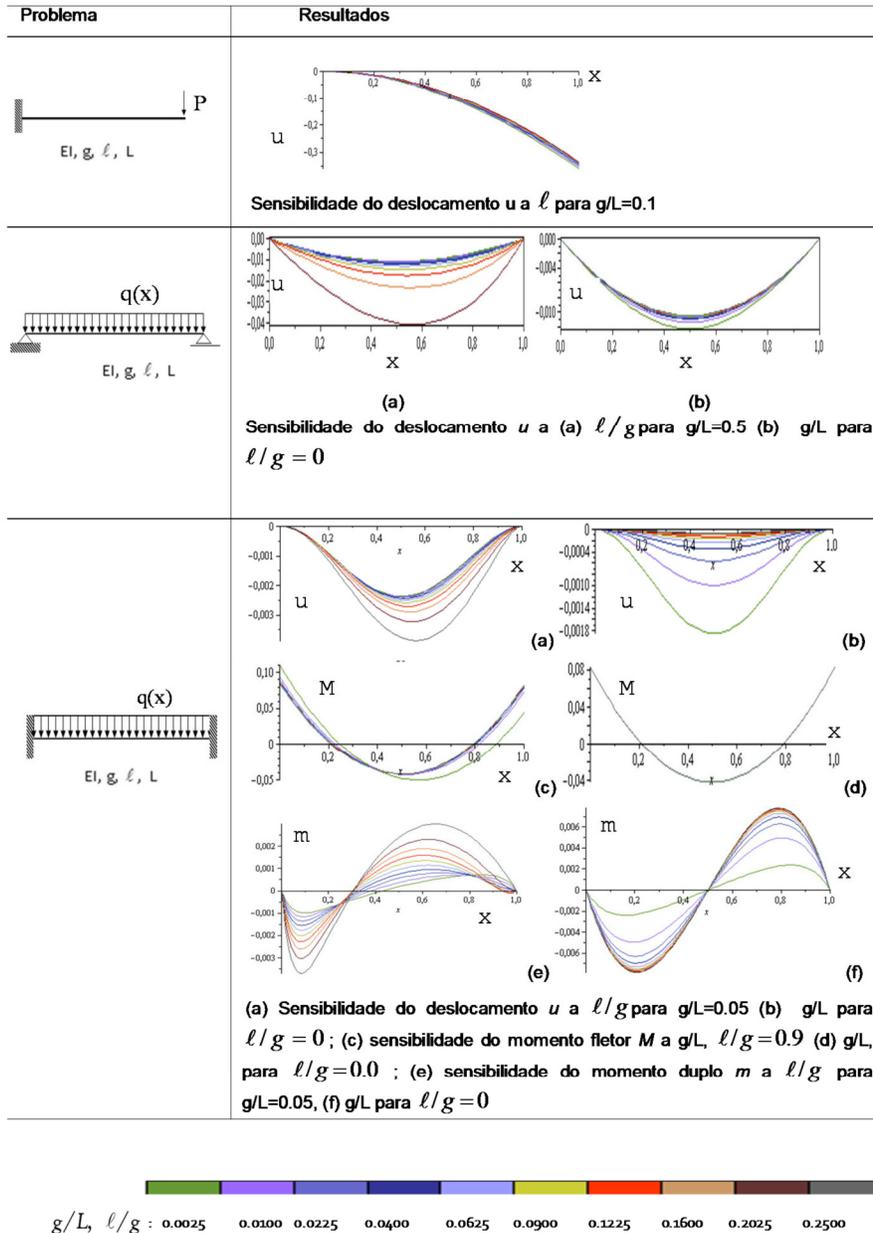


Figura 34. Exemplos de problemas de viga da EG com diferentes condições de contorno (EI=1, L=1)