

Victor Hugo Blanco Durán

**Influência de agentes intransigentes em um
modelo de formação de opiniões**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da PUC-Rio

Orientador : Prof. Celia Beatriz Anteneodo de Porto
Co-Orientador: Prof. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino

Rio de Janeiro
Agosto de 2013



Victor Hugo Blanco Duran

**Influência de agentes intransigentes
em um modelo de formação de opiniões**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Celia Beatriz Anteneodo de Porto

Orientadora

Departamento de Física – PUC-Rio

Prof. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino

Co-Orientador

Departamento de Física – PUC-Rio

Prof. Welles Antonio Martinez Morgado

Departamento de Física – PUC-Rio

Prof. Silvio Manuel Duarte Queirós

CBPF

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 1^o de agosto de 2013.

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Victor Hugo Blanco Durán

Graduou-se em Física na Universidad Mayor de San Andrés em 2010.

Ficha Catalográfica

Blanco Durán, Victor Hugo

Influência de agentes intransigentes em um modelo de formação de opiniões / Victor Hugo Blanco Durán; orientador: Celia Beatriz Anteneodo de Porto; co-orientador: Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Física, 2013.

v., 50 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Física) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física.

Inclui referências bibliográficas.

1. Física – Tese. 2. Modelo de opiniões. 3. agentes intransigentes. I. Anteneodo de Porto, Celia Beatriz. II. Crokidakis Peregrino, Nuno Miguel Melo. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Neste tempo de mestrado, só posso pensar na paciência, dedicação, procura de soluções, inteligência e muitas outras qualidades as quais não poderia numerar aqui que tem uma pessoa em particular, pessoa incrível que me deu outra perspectiva que não conhecia nas pessoas. Sua criatividade não é superada por ninguém, quando cheguei ao Rio de Janeiro nunca pensei encontrar pessoas com essas qualidades, a minha imaginação não me permitia nem pelo menos ter a idéia da sua existência. Se há alguém neste planeta que tem toda minha admiração é a professora Celia Anteneodo, ela faz coisas que considerava impossíveis dentro do meu fechado mundo, suportou minhas grandes faltas. A única coisa que posso fazer é tentar fazer algo que não mereço e é terminar o escrito desta dissertação

Ao meu co-orientador Nuno Crokidakis que com paciência tratou de me explicar conceitos que são difíceis para um estudante como eu, também ele me mostrou o que representa a jornada forte tanto como Celia, motivações e como uma pessoa com caracter tem que enfrentar os problemas, também ele ajudou muito me guiando sobre a apresentação deste trabalho.

A ambos, Celia e Nuno, são incríveis suas motivações para alcançar seus objetivos.

Ao professor Welles Morgado, a pessoa que com seu exemplo me ensinou didaticamente todos os conceitos que ele pretendia expressar.

Realmente tenho muita sorte de conhecer pessoas como eles.

À minha família, meus pais que sempre me apoiaram em tudo e que deram espaço para meu caminho escolhido, também meu obrigado grande para minha irmã que sozinha soube enfrentar a vida de pós-graduação e investiu muito de seu tempo na sua família.

Sem qualquer destas pessoas em especial os professores não teria sido possível qualquer passo que eu dei.

Para todas as pessoas que encontrei em meu caminho, amigos companheiros de estudo, pessoas que forte ou fracamente colaboraram com seu grão de areia, de quem aprendi sempre uma bonita e útil lição.

Por fim, agradeço ao CNPq por ter financiado minha bolsa de mestrado.

Resumo

Blanco Durán, Victor Hugo; Anteneodo de Porto, Celia Beatriz; Crokidakis Peregrino, Nuno Miguel Melo. **Influência de agentes intransigentes em um modelo de formação de opiniões**. Rio de Janeiro, 2013. 50p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Os modelos matemáticos de formação de opiniões vêm sendo estudados pelos físicos principalmente desde os anos 80 e atualmente fazem parte do novo ramo conhecido como Sociofísica. Esta área de pesquisa recente utiliza ferramentas e conceitos da física estatística e computacional. Os modelos deste tipo têm dado bons resultados para descrever certos aspectos do comportamento social e político, como a formação de opiniões, adoção de novas tecnologias ou atitudes extremas, que apresentam uma fenomenologia, a exemplo das transições ordem-desordem, análoga a alguns sistemas físicos. Dentro desse cenário, enquadra-se a presente dissertação, em que estudamos um modelo de formação de opiniões que pode ser associado a qualquer debate público com três opções (sim, não, indecisos). Consideramos uma população de indivíduos (ou agentes) totalmente conectados, que podem estar em três estados diferentes. As interações ocorrem aos pares e são competitivas, sendo negativas com probabilidade p ou positivas com probabilidade $1 - p$. Esta distribuição bimodal das interações produz um comportamento semelhante ao que resulta da introdução de contrários (no sentido de Galam) na população. Além disso, considera-se que uma certa fração d dos indivíduos são intransigentes ou obstinados, usualmente chamados de inflexíveis em dinâmica de opiniões, que conservam suas opiniões. Estudamos o impacto da concorrência entre contrários e inflexíveis sobre a opinião global, por meio de simulações computacionais. Os nossos resultados mostram que a presença de inflexíveis afeta o comportamento crítico da população só se tal desordem é “temperada” (em inglês *quenched*), ou seja, se os intransigentes não alteram as suas convicções com o tempo. Por outro lado, na versão “recozida” (em inglês *annealed*) do modelo, em que os inflexíveis são escolhidos em cada intervalo de tempo (isto é, a inflexibilidade é ocasional), a transição de fase de não-equilíbrio que ocorre na ausência de inflexíveis permanece inalterada. Discutimos também a relevância do modelo para os sistemas sociais reais.

Palavras-chave

Modelo de opiniões ; agentes intransigentes.

Abstract

Blanco Durán, Victor Hugo; Anteneodo de Porto, Celia Beatriz (advisor); Crokidakis Peregrino, Nuno Miguel Melo. **Influence of stubborn agents in a model of opinion formation**. Rio de Janeiro, 2013. 50p. MSc. Dissertation — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Mathematical models of opinion formation have been studied by physicists mainly since the 80's and are now part of the new branch known as Sociophysics. This recent area of research borrows tools and concepts from statistical physics. Models of this kind are providing good results to describe certain aspects of the social and political behavior, such as the formation of opinions, adoption of new technologies or extreme attitudes, that present a phenomenology, e.g., order-disorder transitions, analogous to some physical systems. Within this scenario, fits this thesis. We study a model of opinions that can be associated to any public debate with three options (yes, no, undecided). We consider a fully connected population of individuals (or agents), which can be in three different states. Interactions occur by pairs and are competitive, being negative with probability p or positive with probability $1 - p$. This bimodal distribution of interactions produces a behavior similar to that resulting from the introduction of contrarians (in the sense of Galam) in the population. Furthermore, we consider that a certain fraction d of individuals are intransigent or stubborn, usually called inflexibles in opinion dynamics. These individuals keep their opinions unchanged. By means of computer simulations, we study the impact of competition between contrarians and inflexibles on the formation of the majority opinion. Our results show that the presence of inflexibles affects the critical behavior of the population only if such condition is “quenched”, that is, if the intransigents not change their beliefs with time. On the other hand, in the “annealed” version of the model, where the inflexibles are chosen at each time interval (that is, stubbornness is occasional), the non-equilibrium phase transition which occurs in the absence of inflexibles is not affected. We also discuss the relevance of the model to real social systems.

Keywords

Opinion models ; Stubbon agents.

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Motivação e contexto sociofísico	11
2	Transições de fase	13
2.1	Modelo de Ising	14
2.2	Expoentes críticos	15
2.3	Teoria de escala	17
2.4	Universalidade	18
3	Modelos de opinião	20
3.1	Modelo de Sznajd	22
3.2	Modelo BCS	23
3.3	Outros modelos	23
4	Métodos	24
4.1	Determinação dos valores críticos	26
5	Resultados	29
5.1	O modelo	29
5.2	Análise do comportamento crítico	31
5.3	Cálculo de campo médio	43
6	Conclusões e perspectivas	46

Lista de figuras

Figura 2.1	Parâmetro de ordem (indicado pela linha tracejada azul), para um fluido (a) e para um ferromagneto (b), como função da temperatura. $\rho_L - \rho_g$ corresponde à diferença de densidades no líquido e no gás; m à magnetização.	13
Figura 2.2	Curvas de coexistência para diferentes fluidos. Extraído de (26). Neste caso a diferença de densidade entre o líquido e o gás é $\rho_L - \rho_G \sim \rho_c(1 - T/T_c)^\beta$.	18
Figura 3.1	Representação esquemática do modelo de Sznadj em 2D.	22
Figura 4.1	Cumulante de Binder U (a), média do parâmetro de ordem O (b) e medida das flutuações χ (c) como função de p para diferentes tamanhos do sistema indicados na figura. O gráfico inserido é uma amplificação em torno do cruzamento.	25
Figura 4.2	Gráficos da Fig. 4.1 reescalados usando os expoentes críticos indicados. Observa-se o colapso das curvas reescaladas.	28
Figura 5.1	Média do parâmetro de ordem O como função de p para valores típicos da fração d de agentes inflexíveis, para a versão recozida do modelo (símbolos cheios e vazios, respectivamente). As intensidades das interações aos pares $\{\mu_{ij}\}$ são recozidas (a) e temperadas (b), para os esquemas de atualização síncrono e assíncrono. Para comparação, também apresentamos o resultado do modelo em ausência de agentes inflexíveis (12) (linha cheia). O tamanho da população é $N = 1000$. Os valores médios foram calculados sobre 100 simulações.	32
Figura 5.2	Parâmetro de ordem O como função de p , para valores típicos da fração d de agentes inflexíveis, para a versão temperada do modelo. Para comparação, também apresentamos o resultado do modelo em ausência de agentes inflexíveis ($d = 0$) (12). As interações de pares $\{\mu_{ij}\}$ e o esquema de atualização são recozidas e síncrono (a) temperadas e assíncrono (b), respectivamente. O tamanho da população é $N = 1000$. Os valores médios foram calculados sobre 100 simulações.	34
Figura 5.3	Cumulante de Binder (a), parâmetro de ordem (b) e susceptibilidade (c), para a versão temperada do modelo com $d = 0,2$ e diferentes tamanhos N (gráficos principais). Os gráficos reescalados correspondentes são apresentados nos quadros inseridos. Os dados correspondem a variáveis aleatórias $\{\mu_{ij}\}$ temperadas e atualização assíncrona. O melhor colapso dos dados é obtido para $p_c \approx 0,196$, $\beta \approx 0,5$, $\gamma \approx 1,0$ e $1/\nu \approx 0,5$.	35

- Figura 5.4 Diagrama de fases do modelo no plano p como função de d , para a versão temperada do modelo. Apresentamos os resultados para acoplamentos $\{\mu_{ij}\}$ temperados e recozidos e para esquemas de atualização síncrono e assíncrono. A linha tracejada representa a descrição fenomenológica da fronteira crítica, dada pela Eq. (5-8). 37
- Figura 5.5 Resultados para o caso em que os inflexíveis são escolhidos dentre os agentes com opinião $o = 0$. (a) Parâmetro de ordem como função de p para valores típicos de d , com $N = 1000$. O gráfico inserido mostra o valor máximo do parâmetro de ordem (que ocorre para $p = 0$) para cada valor de d . Dados ajustados com a função $O(p = 0) = 1 - d/3$. (b) Cumulante de Binder para $d = 1, 0$ e diferentes tamanhos N , mostrando a intersecção em $p_c \approx 0,25$. Em ambos os casos as interações $\{\mu_{ij}\}$ são variáveis aleatórias temperadas, e realizamos atualizações assíncronas. 39
- Figura 5.6 Resultados para o caso em que os inflexíveis são escolhidos dentre os agentes com opinião $o = +1$, para $d = 0,3$. Parâmetro de ordem (a) e susceptibilidade (b) como funções de p , para diferentes valores de N . Note que não existe dependência dos resultados com o tamanho do sistema. Em ambos os casos as interações $\{\mu_{ij}\}$ são variáveis aleatórias temperadas, e realizamos atualizações assíncronas. 40
- Figura 5.7 Cumulante de Binder para o caso em que os inflexíveis são escolhidos dentre os agentes com opinião $o = +1$, para diferentes tamanhos N . (a) $d = 0,3$ e (b) $d = 0,6$. Note a ausência do cruzamento das curvas. Em ambos os casos as interações $\{\mu_{ij}\}$ são variáveis aleatórias temperadas, e as atualizações assíncronas. 42

Lista de tabelas

Tabela 2.1	Valores dos expoentes críticos para alguns modelos magnéticos. Extraídos da referência (23).	16
Tabela 2.2	Expoentes críticos para alguns sistemas. Extraídos da referência (23).	19
Tabela 5.1	Todas as possíveis combinações com as respectivas probabilidades de ocorrência, onde f_k é a probabilidade estacionária de que um agente esteja no estado k . Para o caso em que a inflexibilidade não é levada em conta.	43

1

Introdução

A dissertação está organizada como segue. No restante do presente capítulo serão comentadas as principais motivações do trabalho assim como o contexto sociofísico em que se inserem. No Cap. 2 revisamos as principais noções sobre transições de fase e fenômenos críticos relevantes para a interpretação dos resultados de nosso trabalho. Uma revisão sobre os modelos sobre formação de opiniões na literatura é feita no Cap. 3. No Cap. 4 ilustramos as principais técnicas de análise utilizadas na dissertação. No Cap. 5 definimos as regras microscópicas que governam a dinâmica do nosso modelo e apresentamos os resultados originais do trabalho. Finalmente, as nossas conclusões e perspectivas futuras de trabalho são discutidas no Cap. 6.

1.1

Motivação e contexto sociofísico

O modelo de Ising tem uma longa história de sucessos em capturar a física essencial dos sistemas complexos, em particular dos sistemas sociais (1). Especialmente a partir dos anos 80, foram sendo propostos vários modelos de opinião, baseados em caracterizar cada indivíduo simplesmente mediante uma variável binária (± 1), que representa se sua atitude ou opinião com relação a um determinado assunto é positiva ou negativa, favorável ou não (2).

Um dos primeiros artigos em que o modelo de Ising é considerado para descrever um sistema social foi elaborado por Galam (3). O acoplamento spin-spin do Hamiltoniano tipo Ising representa a interação entre dois agentes, enquanto a influência de um campo magnético externo agindo sobre um sistema físico pode ser visto em analogia com os efeitos da propaganda. Além disso, é possível introduzir campos locais que modelem as preferências pessoais com relação a certa orientação ou opinião.

Dependendo da intensidade desses campos locais ou individuais, a população (que às vezes denominaremos o sistema) pode chegar a um consenso completo sobre uma das duas opiniões possíveis $+1$ ou -1 , ou em outros casos a um estado em que ambas as opiniões podem coexistir.

Nas últimas três décadas têm sido propostos muitos outros modelos de opinião em que os possíveis estados de cada indivíduo são representados mediante variáveis de Ising tipo spin (2, 4). Dentre eles, destaca-se o modelo do votante (ou eleitor) (5, 6), os modelos da regra da maioria (7, 8, 9, 10) e o modelo de Sznajd (11).

Com a finalidade de tornar os modelos mais realistas, foram sendo incluídos agentes com características especiais. Os chamados **contrários** são agentes que têm sempre uma opinião contrária à da maioria dos agentes em torno deles (7, 8). A inclusão de tais agentes geralmente afeta a fenomenologia do modelo, e as suas consequências no processo de formação de opiniões foi estudada em uma série de trabalhos (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18).

Um outro tipo de agentes especiais na dinâmica opiniões são os indivíduos que tendem a conservar suas opiniões, normalmente chamados **inflexíveis** (19, 20, 21, 22). A inclusão deste ingrediente é um elemento realista que, a priori, parece interessante pesquisar. Este é o principal objetivo da presente dissertação.

2

Transições de fase

Uma transição de fase pode ser visualizada como uma mudança brusca nas propriedades do sistema. Termodinamicamente, uma transição de fase está associada a uma singularidade na energia livre (ou em algum outro potencial termodinâmico) ou em alguma das suas sucessivas derivadas.

No diagrama de fases de uma substância, por exemplo a água, as curvas delimitam as regiões de estabilidade de cada fase. Atravessando essas curvas, existe uma descontinuidade em alguma propriedade da substância, como a densidade ρ no caso de um fluido, ou a magnetização m no caso de um ferromagneto. A Fig. 2.1 ilustra esses saltos que podem ser associados a um

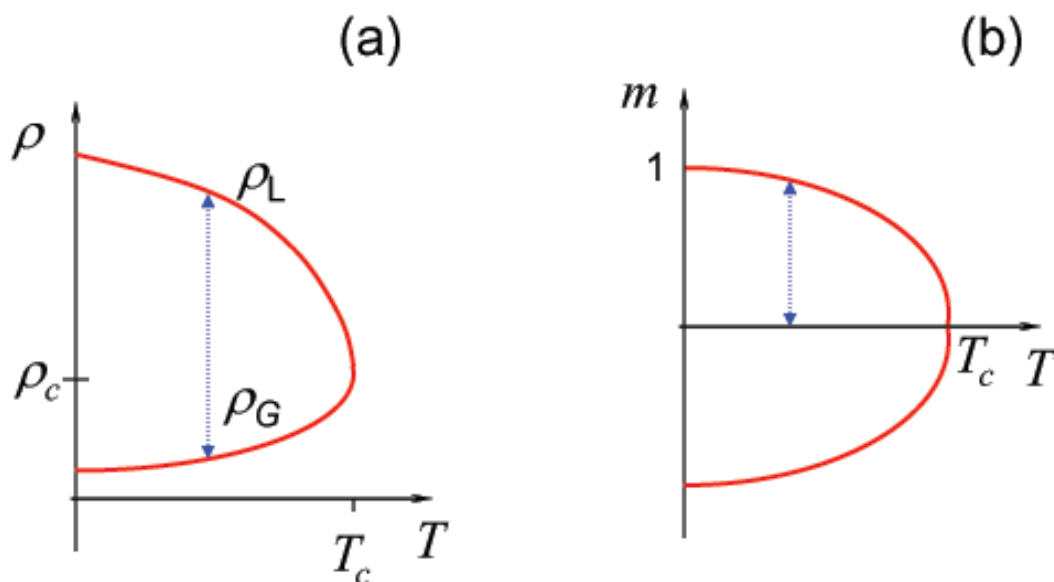


Figura 2.1: Parâmetro de ordem (indicado pela linha tracejada azul), para um fluido (a) e para um ferromagneto (b), como função da temperatura. $\rho_L - \rho_g$ corresponde à diferença de densidades no líquido e no gás; m à magnetização.

parâmetro de ordem. Além de um dado ponto, o parâmetro de ordem se anula, esse ponto define o **ponto crítico** da transição.

A primeira forma de classificação das transições de fase foi devida à Ehrenfest.

Consideremos as primeiras derivadas de um potencial termodinâmico, a exemplo de: (i) a magnetização, (a menos de um sinal) primeira derivada da energia livre $F(T, H)$ com relação ao campo H , (ii) o volume, primeira derivada da energia livre $G(T, p)$ com relação à pressão, ou (iii) a entropia, (a menos de um sinal) primeira derivada com relação à temperatura.

Segundo essa classificação, se uma ou mais das primeiras derivadas apresenta uma descontinuidade finita, diz-se que a transição de fase é de primeira ordem.

Se as primeiras derivadas são contínuas mas são as segundas derivadas (por exemplo, o calor específico ou a susceptibilidade) que variam descontinuamente (ou divergem), então a transição é de segunda ordem. Entretanto outras derivadas de ordem superior podem apresentar descontinuidades. Assim estas transições são também denominadas contínuas (23).

Exemplos de transições de fase podem ser encontrados não somente em sistemas físicos mas também em outros sistemas complexos. Processos como espalhamento de epidemias e rumores apresentam uma fenomenologia crítica similar à dos sistemas físicos. Daí que os modelos simples usados para a Física da matéria condensada adaptados a problemas sociofísicos possam ser úteis.

2.1

Modelo de Ising

O sistema mais famoso como referência para o estudo de fenômenos críticos é o modelo de Ising (24). Este modelo pode ser definido mediante o Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j ,$$

onde $\sigma_i = \pm 1$ representa o estado (de spin) do sítio i , originalmente localizado numa rede regular, $J > 0$ o acoplamento, que favorece o alinhamento paralelo, e a soma é computada sobre pares de vizinhos (originalmente só primeiros vizinhos). Na fase ordenada, os spins têm uma direção de alinhamento preferencial; já na fase desordenada, essas direções são praticamente aleatórias. Variando-se a temperatura, podemos passar de uma fase para outra. A temperatura à qual isso acontece é denominada *temperatura crítica* que define um

ponto crítico do sistema.

A grandeza física que nos permite ter uma descrição adequada, como parâmetro de ordem é a **magnetização** por spin

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (2-1)$$

É a média das orientações dos spins. Se $m = 0$ quer dizer que estamos em uma fase desordenada ou o sistema não tem direção preferencial, por outro lado, quanto maior é seu valor mais ordenado está o sistema.

O modelo de Ising foi resolvido exatamente para a rede quadrada, apresentando uma transição contínua a campo nulo a uma temperatura crítica $T_c > 0$.

A partir desse modelo, diversas variantes têm surgido, redefinindo-se as interações (a exemplo do modelo de Heisenberg), o número de estados possíveis (modelos de spin 1, de Potts, etc.) ou a topologia da rede (25).

2.2

Expoentes críticos

No exemplo do sistema magnético, um ferromagneto ideal tem uma magnetização m espontânea não nula, que para uma temperatura T próxima do ponto crítico T_c se comporta como

$$m \sim |T - T_c|^\beta, \quad (2-2)$$

onde β é um expoente crítico, que pode diferir acima e abaixo da transição. Essa relação indica que, perto de um ponto crítico, o comportamento do parâmetro de ordem é do tipo lei de potencia. Isto também é válido para outras grandezas, como o calor específico C e a susceptibilidade magnética χ ,

$$\begin{aligned} C &\sim |T - T_c|^{-\alpha}, \\ \chi &\sim |T - T_c|^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2-3)$$

Estas são grandezas macroscópicas da matéria, que caracterizam o sistema no caso do magnetismo.

No nível microscópico, podemos definir uma função de correlação

$$c(r) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \quad (2-4)$$

que permite analisar como o estado σ_i do sítio na posição r_i correlaciona-se com o estado σ_j de um sítio que está a uma distância $r = r_i - r_j$. Fora da

região crítica, quando $r \rightarrow \infty$, $c(r)$ tende para zero exponencialmente, ou seja

$$c(r) \sim e^{-r/\xi}, \quad (2-5)$$

onde ξ é o comprimento de correlação do sistema. Para temperaturas perto de T_c aparecem correlações de longo alcance. Desta forma, temos um decaimento do tipo lei de potência,

$$c(r) \sim \frac{1}{r^{d-2-\eta}}, \quad (2-6)$$

onde d é a dimensão do sistema e η é o expoente crítico associado à função de correlação. Este comportamento indica que, fora da criticalidade, um sistema composto de muitos corpos apresenta correlações entre seus constituintes que são limitadas pelo comprimento ξ . Entretanto, quando $T \rightarrow T_c$, o comprimento de correlação diverge como:

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad (2-7)$$

levando portanto à perda de um comprimento característico (finito) e originando uma lei de potência, que não possui um comprimento típico associado. Em outras palavras, o sistema é invariante para transformações de escala no ponto crítico.

Portanto, uma característica importante das transições de fase, e mais geralmente de fenômenos críticos (a exemplo da percolação, da turbulência ou o limiar do caos), é o surgimento de leis de potência (25). Desta maneira pode-se analisar um sistema só com o conjunto dos expoentes dessas leis de potência. Na Tabela 2.1, ilustramos alguns valores conhecidos para os expoentes de modelos emblemáticos.

Grandeza física	Exp.	Ising $d = 2$	Ising $d = 3$	Ising C.M.	Heisenberg
Calor específico	α	0(log)	0,104	0 (descont.)	-0,12
Parâmetro de ordem	β	1/8	0,325	1/2	0,33
Susceptibilidade	γ	7/4	1,234	1	1,33
Comprimento de correlação	ν	1	0,625	1/2	0,7
Função de correlação	η	1/4	0,026	0	0,067

Tabela 2.1: Valores dos expoentes críticos para alguns modelos magnéticos. Extraídos da referência (23).

Estes expoentes não são independentes entre si, mas existem relações que devem cumprir. A partir de considerações termodinâmicas, primeiro foram demonstradas algumas desigualdades entre expoentes críticos. Mostrou-se que: $\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2$. Entretanto, mais tarde, foi possível mostrar que na verdade

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (2-8)$$

conhecida como **relação de Rushbrooke**.

2.3

Teoria de escala

A modo de ilustração, consideremos a densidade de energia livre de um ferromagneto f , na região crítica, como função da temperatura T e do campo magnético h . A hipótese de escala propõe que

$$f(T, h) = t^{2-\alpha} \Phi\left(\frac{h}{t^\Delta}\right), \quad (2-9)$$

onde t é a temperatura reduzida definida como $t = (T - T_c)/T_c$, a função Φ é a chamada **função de escala** (tal que $\Phi(x) \rightarrow \text{constante}$, quando $x \rightarrow \infty$), e o expoente Δ é chamado de expoente da **descontinuidade** (“gap” em inglês). Examinemos o impacto da hipótese de escala, para o calor específico

$$C = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}. \quad (2-10)$$

Perto da transição

$$C \sim \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (2-11)$$

Substituindo (2-9) em (2-11), temos

$$C \sim \Phi(0)t^{-\alpha}, \quad (2-12)$$

onde consideramos que $h = 0$ porque estamos interessados no comportamento de C a campo nulo nas proximidades da transição. Com isso obtemos a divergência do calor específico com o expoente correspondente α , que foi a razão para a escolha de Φ .

Se derivamos f em relação a h podemos obter a magnetização

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = -t^{2-\alpha-\Delta} \Phi'\left(\frac{h}{t^\Delta}\right). \quad (2-13)$$

Novamente, tomando $h \rightarrow 0$ obtemos a magnetização espontânea a campo nulo para $T \rightarrow T_c$ ($t \rightarrow 0$). Assim,

$$m \sim \Phi'(0)t^{2-\alpha-\Delta} \sim t^\beta. \quad (2-14)$$

Então, concluímos que

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta. \quad (2-15)$$

Derivando (2-9) em relação de h , e logo em seguida tomando $h = 0$, obtemos a susceptibilidade a campo nulo

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h}\bigg|_{h=0} = t^{2-\alpha-2\Delta} \Phi''(0) \sim t^{-\gamma} \quad (2-16)$$

de onde

$$\gamma = 2 \Delta + \alpha - 2. \quad (2-17)$$

Note que eliminando a variável desconhecida Δ de (2-15) e (2-17), obtemos a relação de Rushbrooke mencionada acima

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2. \quad (2-18)$$

2.4 Universalidade

Os expoentes mencionados acima permitem descrever a fenomenologia das transições de fase. Entretanto eles são interessantes não somente por isso mas principalmente porque permitem agrupar os sistemas em classes de *universalidade*.

À diferença do ponto crítico, que depende dos detalhes das interações, os expoentes críticos são independentes de muitos detalhes microscópicos do sistema.

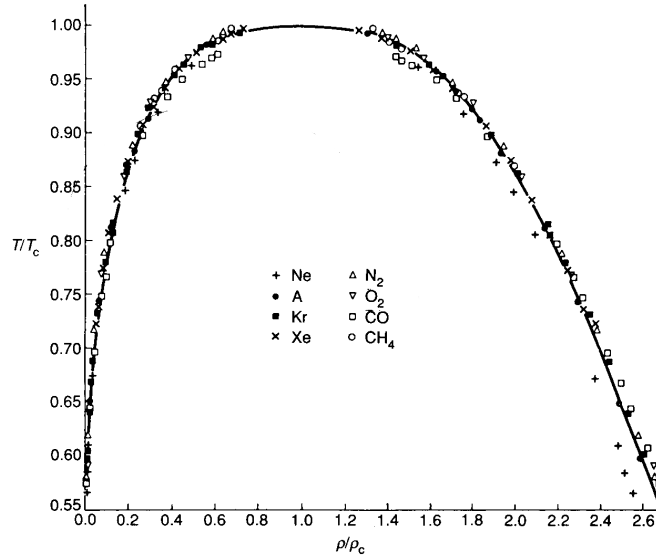


Figura 2.2: Curvas de coexistência para diferentes fluidos. Extraído de (26). Neste caso a diferença de densidade entre o líquido e o gás é $\rho_L - \rho_G \sim \rho_c(1 - T/T_c)^\beta$.

Eles dependem basicamente da dimensão do espaço (fator dominante), simetrias do parâmetro de ordem e do alcance das interações. Cabe mencionar que a **desordem** pode afetar a universalidade.

Uma evidência da universalidade é o famoso diagrama de Guggenheim mostrado na Fig. 2.2 em que as curvas de coexistência de diversos fluidos como função de T/T_c e a densidade reduzida ρ/ρ_c coincidem em uma única curva, podendo, portanto serem descritas pelo mesmo expoente $\beta = 1/3$ (23).

Também, compare os valores dos expoentes do modelo de Heisenberg com os de Ising na Tabela 2.1, assim como também os diferentes sistemas na Tabela 2.2.

Grandeza física	Exp.	Fe/Ni $d = 3$	He _{III}	fluidos binários
Calor específico	α	-0,03/0,04	-0,01	0,11
Parâmetro de ordem	β	0,37/0,36	0,34	0,32
Susceptibilidade	γ	1,33	1,33	1,3
Comprimento de correlação	ν	0,69/0,64	0,67	0,6
Função de correlação	η	0,07/0,04	0,02	0,02

Tabela 2.2: Expoentes críticos para alguns sistemas. Extraídos da referência (23).

3

Modelos de opinião

Os modelos de formação de opiniões partem da observação de que cada indivíduo (ou agente) em uma sociedade possui uma posição sobre cada assunto que pode mudar principalmente a partir da interação com outros indivíduos, seja direta ou indiretamente.

Assim o processo de formação de opiniões pode ser modelado considerando-se regras simples que governam as interações entre indivíduos ou grupos de indivíduos, sob a ação de algum campo externo, que representa a propaganda e outras informações ou conhecimentos.

Considera-se usualmente que as atitudes (ou estados) dos indivíduos com relação a certo assunto existem em um número limitado tal que podem ser representadas por uma variável numérica (opinião o) que pode adotar uns poucos valores, discretos. Por exemplo, é comum considerar que o estado é descrito por uma variável binária que pode ter os valores $o = +1$ ou $o = -1$, indicando a afinidade ou rejeição por certa posição (opinião favorável ou desfavorável). Existem também versões em que a variável que descreve o estado de um indivíduo pode adotar valores dentro de um espectro contínuo ($0 \leq o_i \leq 1$) (1, 27), representando os diferentes tons de cinza entre as posições extremas.

A dinâmica evolui a partir de uma distribuição aleatória de opiniões dentro da população, normalmente até que algum parâmetro de ordem do sistema (tipo a opinião média) atinge um estado estacionário.

Gostaria de salientar que em todos os casos é possível introduzir ingredientes adicionais em que os indivíduos não são caracterizados somente pelo seu estado, mas podem ter atributos peculiares, como memória, obstinação, formação reativa, etc., cada um dos quais pode ser quantificado mediante um parâmetro específico. Assim, podemos ter uma população heterogênea, em que cada agente se comporta de acordo com seu conjunto individual de valores dos atributos. Este tipo de modelos, usualmente tratados computacionalmente, os chamados *modelos baseados em agentes*. Dependendo da complexidade do modelo, o tratamento analítico pode ser impraticável, com o qual as simulações

computacionais tornam-se necessárias. Neste trabalho consideraremos este tipo de modelos focando numa atitude particular que é a obstinação ou intransigência.

Essa heterogeneidade introduz desordem no sistema, que é uma característica realista e pode levar a mudanças na fenomenologia de formação de opiniões, com relação aos modelos mais simples, assim como ocorre com a introdução de desordem nos sistemas magnéticos e outros sistemas físicos. Corresponderia a uma desordem por sítios, já que cada agente pode ser associado a um sítio ou vértice da rede de conexões que permite as interações.

Mas, desordem também pode estar presente nas interações. No caso das interações que modelam a construção de opiniões, essas podem ser positivas ou negativas, refletindo o fato de que alguns indivíduos carismáticos e convincentes podem “contagiar” suas opiniões, enquanto outros agentes podem ter um influência oposta ou negativa.

Toda desordem pode ser caracterizada estatisticamente pela distribuição de valores de cada parâmetro dentro da população, podendo ser consideradas diferentes distribuições de probabilidade, para valores discretos ou contínuos dos parâmetros. Adicionalmente, a desordem pode ser temperada (congelada ou invariante no tempo) indicando persistência dos atributos característicos de cada indivíduo, ou recozidas (flutuantes no tempo), representando sua variabilidade devido à influência de fatores externos e/ou internos. Consideraremos os dois tipos de desordem.

Por outro lado, apesar de que os modelos iniciais foram definidos sobre redes regulares ou completamente conexas (campo médio), também têm sido estudados sobre redes complexas, mais próximas das redes que conectam os indivíduos no mundo real. Nós consideraremos o caso completamente conexo, em que cada indivíduo pode interagir com qualquer outro.

Com relação às regras que governam a dinâmica, descreveremos nas seções seguintes principalmente dois modelos paradigmáticos de formação de opiniões: o modelo conhecido como modelo de Sznajd (11) e o modelo BCS (de Biswas, Chatterjee e Sen) (12). Esses são modelos de estados discretos.

Finalmente, diferentes tipos de atualização das variáveis, mediante das regras particulares que definem cada modelo, podem ser consideradas: (i) Paralela, em que em cada passo de tempo o novo valor do estado de cada indivíduo é calculado mas somente é atualizado o conjunto simultaneamente com os novos valores. (ii) Sequencial, em que as atualizações são feitas a cada sorteio dos indivíduos, sem aguardar a que todos os novos valores do conjunto sejam computados. Cada uma dessas atualizações pode ser mais ou menos

apropriada dependendo da situação particular sendo modelada. No presente trabalho consideraremos os dois tipos de atualizações.

3.1

Modelo de Sznajd

Neste modelo, a opinião o_i de um indivíduo i ($i = 1, \dots, N$) é uma variável binária ($o_i = \pm 1$, como nos sistemas magnéticos de spin $1/2$). Originalmente o modelo foi definido sobre numa rede regular 1D (11), mas em seguida foi estendido a 2D (28). Em cada instante de tempo, dois indivíduos conectados são escolhidos ao acaso e se compartilham uma mesma opinião, e somente nesse caso, contagiam essa opinião aos seus vizinhos (ver ilustração do caso 2D na Fig. 3.1).

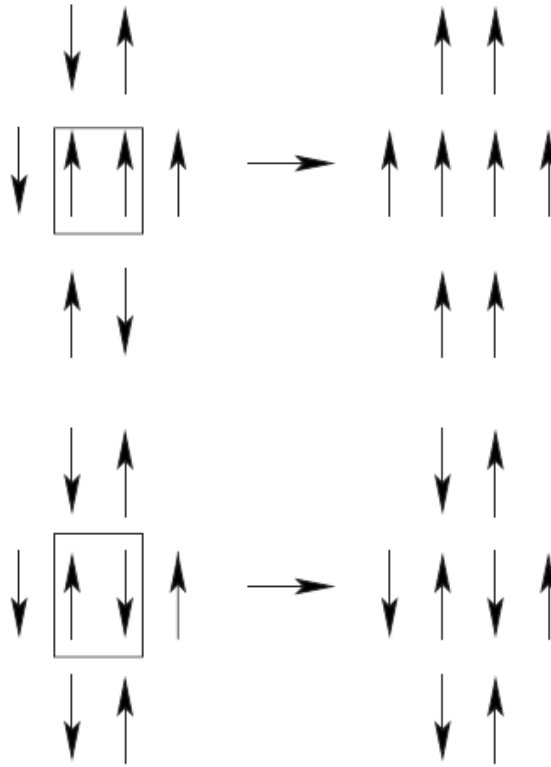


Figura 3.1: Representação esquemática do modelo de Sznajd em 2D.

O modelo de Sznajd sobre qualquer rede regular de qualquer dimensão, com atualização sequencial aleatória, sempre termina em consenso, inclusive quando são permitidas mais de duas opiniões (1).

Este modelo e suas variantes começaram a ser estudados nos últimos anos em redes complexas, sendo observada uma transição entre uma fase de

consenso e outra em que coexistem opiniões, em redes de mundo pequeno e livres de escala (2).

3.2

Modelo BCS

Neste modelo (12), a opinião o_i pode tomar três valores (± 1 ou 0) como nos modelos magnéticos de spin 1. Os indivíduos interagem aos pares, podendo a influência μ_{ij} de j sobre i ser tanto positiva (com probabilidade $1 - p$) quanto negativa (com probabilidade p), ou seja p mede a desordem no sistema, introduzida pela fração de interações negativas (antiferromagnéticas num sistema magnético). A dinâmica segue a regra

$$o_i(t+1) = o_i(t) + \mu_{ij} o_j(t). \quad (3-1)$$

Este modelo apresenta uma transição ordem-desordem para o valor crítico $p_c = 1/4$, com expoentes de campo médio. Será discutido em mais detalhes no Cap. 4.

3.3

Outros modelos

Cabe mencionar o chamado modelo do votante (29). Neste modelo cada agente pode ser encontrado em um de dois estados (variável binária $s = \pm 1$). Em cada instante um agente i e um de seus vizinhos j são selecionados, logo o indivíduo i é contagiado pelo estado de j , ou seja $s_i = s_j$. De modo que cada agente tende a imitar os outros, existindo assim uma pressão da maioria. Este modelo coincide com a dinâmica de Glauber a temperatura nula, produzindo padrões espaciais com interfaces rugosas.

Alternativamente, em variantes de estado contínuo, cada indivíduo pode mudar para uma opinião que é uma média da opinião dos vizinhos.

Um outro modelo relacionado é o da regra da maioria (7). Também com estados binários, uma fração p dos indivíduos tem opinião $+1$, e a restante -1 . No caso completamente conexo, a cada iteração, um grupo de r agentes (r pode mudar a cada passo) é escolhido ao acaso, e todos adotam a mesma opinião da maioria dentro do grupo.

Uma extensão do modelo da maioria foi dado pela inclusão de indivíduos, denominados **contrários**, que tendem a ter a opinião contrária à da maioria (8).

4 Métodos

Neste capítulo descreverei e ilustrarei a técnica utilizada para a determinação dos pontos críticos e dos expoentes críticos a partir dos dados de simulações numéricas. Como ilustração utilizarei o modelo paradigmático BCS, definido pela Eq. (3-1), por sua proximidade com o que nos propomos neste trabalho.

Como feito usualmente no tratamento das transições de fase de equilíbrio nos modelos tipo Ising, analisaremos o parâmetro de ordem e os seus momentos de ordem superior.

Definimos o parâmetro de ordem como

$$O = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N o_i \right|, \quad (4-1)$$

que representa a opinião média em valor absoluto. Observe que O desempenha o papel do módulo da “magnetização por spin” em sistemas magnéticos. Consideramos o valor médio do parâmetro de ordem $\langle O \rangle$, onde $\langle \dots \rangle$ denota média sobre configurações.

Para além disso, também consideramos as flutuações χ do parâmetro de ordem (ou “susceptibilidade”)

$$\chi = N (\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2) \quad (4-2)$$

e o cumulante de Binder de quarta ordem U , definido como

$$U = 1 - \frac{\langle O^4 \rangle}{3 \langle O^2 \rangle^2}. \quad (4-3)$$

Computaremos estas grandezas para diferentes tamanhos do sistema e efetuaremos uma análise de tamanho finito.

As Figs. 4.1 (a)-(c) mostram, respectivamente, o comportamento do cumulante de Binder U , da média do parâmetro de ordem $\langle O \rangle$ e da medida das flutuações χ , como funções do índice de desordem p , que mede a fração de interações negativas. Isso para diferentes tamanhos do sistema, indicados nas

figuras.

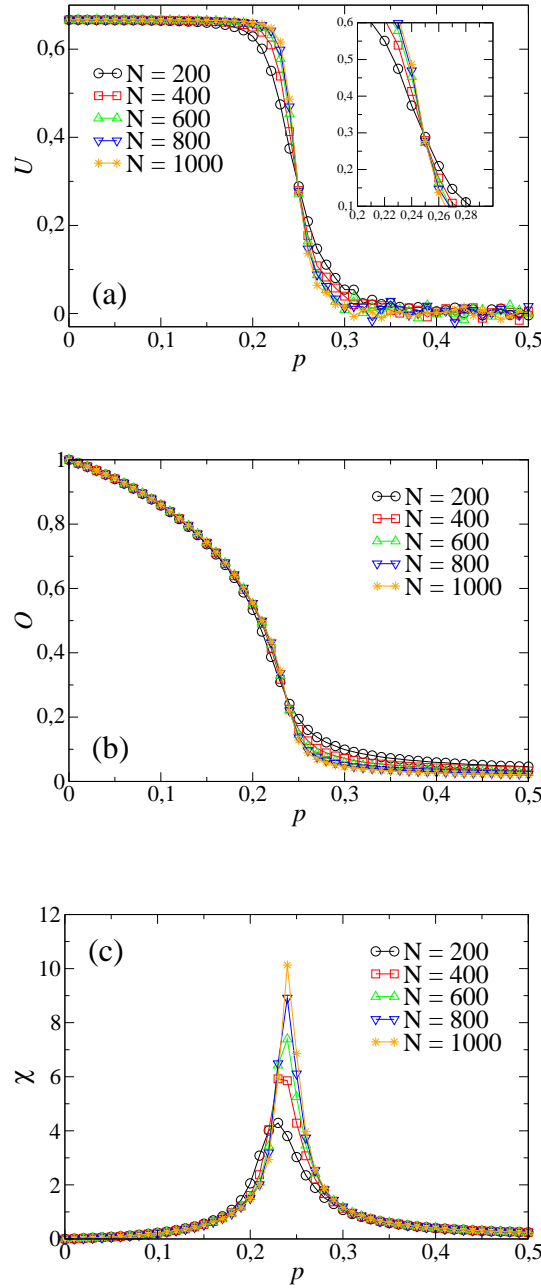


Figura 4.1: Cumulante de Binder U (a), média do parâmetro de ordem O (b) e medida das flutuações χ (c) como função de p para diferentes tamanhos do sistema indicados na figura. O gráfico inserido é uma amplificação em torno do cruzamento.

Observamos um comportamento sigmoidal de U (Fig. 4.1(a)), que deve variar entre 0 e $2/3$. Apresenta um ponto de inflexão em que a inclinação cresce em valor absoluto com N , de tal modo que as diferentes curvas se cruzam num

único ponto.

O parâmetro de ordem apresenta um comportamento contínuo, coincidindo para baixos valores de p e tendendo para zero com N para p acima de aproximadamente $1/4$. Isto é uma indicação de que a transição é contínua (Fig. 4.1(b)).

Finalmente as flutuações medidas por χ apresentam um máximo, que se torna mais pronunciado com o aumento do tamanho N (Fig. 4.1(c)). Isto é consistente com a divergência de χ no limite termodinâmico.

4.1

Determinação dos valores críticos

A teoria de *escala de tamanho finito* prevê que o parâmetro de ordem m depende da temperatura T e do tamanho linear do sistema L e que os momentos de ordem k de m são funções homogêneas dos argumentos, ou seja,

$$\langle m^k \rangle = L^{-k\beta/\nu} f_k(tL^{1/\nu}), \quad (4-4)$$

onde as f_k são funções de escala e t a temperatura reduzida definida acima. No nosso caso em vez da temperatura temos o grau de desordem p , logo em vez de t consideramos $\epsilon \equiv (p - p_c)/p_c$, uma medida da distância relativa ao ponto crítico. Além disso, consideraremos $O = \langle m \rangle$. As funções de escala devem satisfazer os comportamentos assintóticos apropriados para recuperar a lei de potência correspondente no ponto crítico no limite termodinâmico.

Vamos supor que a teoria de escala de tamanho finito também vale para o modelo cinético BCS. Consideraremos $L \rightarrow N$, a dimensão do espaço é irrelevante para o caso de alcance infinito.

Primeiramente devemos determinar o ponto crítico p_c . Para isso analisaremos o cumulante de Binder, para o qual, de acordo com a Eq. (4-4) surge a lei de escala (30)

$$U = 1 - f(\epsilon N^{1/\nu}), \quad (4-5)$$

onde f é uma função de escala. Portanto, representando U como função de $\epsilon N^{1/\nu}$, as curvas para diferentes N deveriam coincidir num ponto que é o ponto crítico, onde U independe de N . Ou seja para $p = p_c$, temos $\epsilon = 0$ e $U = 1 - f(0)$ para todo N .

Assim, a partir da Fig. 4.1(a) determinamos $p_c = 0,25 \pm 0,002$. Note que também poderíamos ter usado o segundo cumulante normalizado (adimensional).

O conhecimento de p_c , permite-nos escalar os gráficos apropriadamente, mediante o uso da variável ϵ , especialmente na vizinhança do ponto crítico que é onde valem as relações de escala e para N suficientemente grande.

Começamos variando ν e observamos que para $\nu = 2,0 \pm 0,05$ ocorre o colapso das curvas de U vs $\epsilon N^{1/\nu}$, como previsto pela lei de escala (ver Fig. 4.2(a)). O valor de ν aparentemente não é o da classe de universalidade de campo médio, entretanto, ao fazer $N = L$, consideramos $d = 1$, em vez da dimensão efetiva $d = 4$, que daria $\nu_e = 1/2$ que é o valor de campo médio. Com efeito, para $d = 4$ a relação usual $2\beta + \gamma = \nu_e d = \nu$ é satisfeita.

Uma vez calculado ν , variamos β , observando o colapso das curvas do parâmetro de ordem. A lei de escala indica que $O = N^{-\beta/\nu} f_1(\epsilon N^{1/\nu})$, portanto representamos $ON^{\beta/\nu}$ vs $\epsilon N^{1/\nu}$ e efetivamente observamos um colapso para $\beta = 0,5 \pm 0,02$ (ver Fig. 4.2(b)). Este é o valor típico de campo médio para o expoente com que o parâmetro de ordem se anula além da transição, na fase desordenada.

Finalmente, para o segundo momento devemos ter $\chi = N^{1-2\beta/\nu} \tilde{f}(\epsilon N^{1/\nu}) = N^{\gamma/\nu} \tilde{f}(\epsilon N^{1/\nu})$, onde \tilde{f} é uma função de escala. Portanto representamos $\chi N^{-\gamma/\nu}$ vs $\epsilon N^{1/\nu}$ observando o colapso das curvas para $\gamma = 1,0 \pm 0,05$ (ver Fig. 4.2(c)). Notando que o máximo de χ deve escalar com o tamanho como $N^{\gamma/\nu}$, também poderíamos extrair o valor de γ representando o valor máximo como função de N . O valor de γ obtido é o típico de campo médio para as flutuações do parâmetro de ordem.

Uma forma alternativa de achar ν é levando em conta que o máximo de χ não corresponde ao ponto crítico para N finito, mas é localizado em $p_c(N)$. Supondo que $\xi(p_c(N) - p_c) \sim N$ e como $\xi \sim |\epsilon|^{-\nu}$, então temos $p_c(N) - p_c \sim N^{1/\nu}$, donde poderíamos determinar ν .

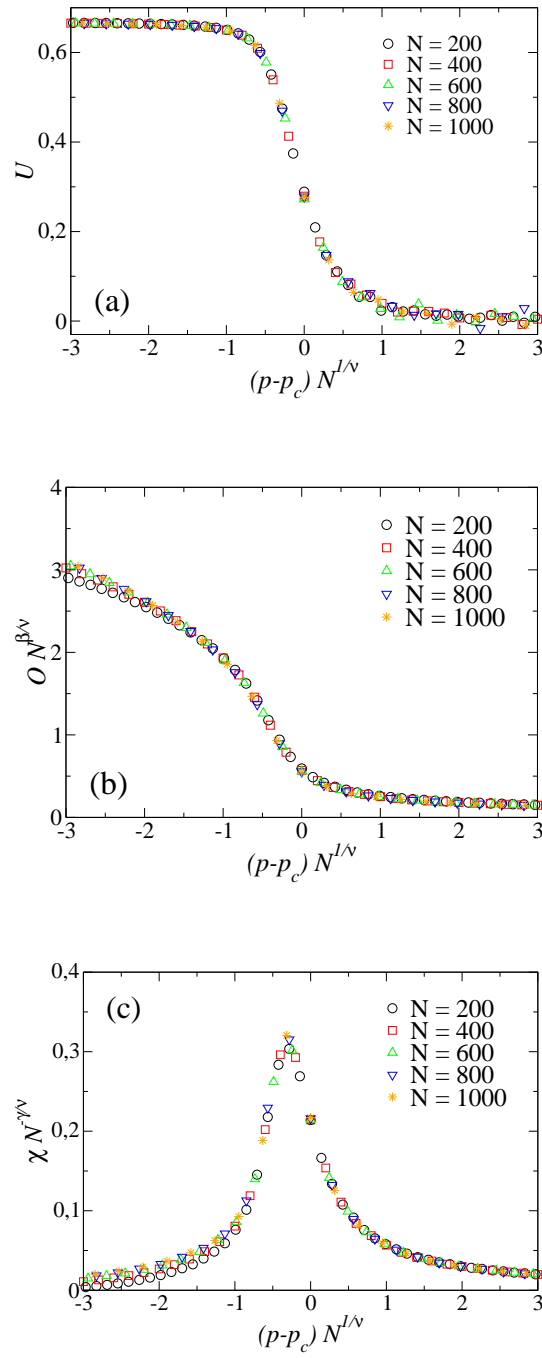


Figura 4.2: Gráficos da Fig. 4.1 reescalados usando os expoentes críticos indicados. Observa-se o colapso das curvas reescaladas.

5 Resultados

5.1 O modelo

Nosso modelo é baseado em modelos de opinião cinéticos (12, 31). A população de N agentes é definida em um grafo totalmente conectado, ou seja, vamos considerar que cada agente pode interagir com todos os outros, o que define uma abordagem tipo de campo médio. Cada indivíduo i ($i = 1, 2, \dots, N$) possui uma das três opiniões possíveis em cada instante de tempo t . Esse estado é representado por $o_i(t) = 1, -1$ ou 0 .

Podemos associar esse cenário a qualquer debate público polarizado, por exemplo, um processo eleitoral com dois candidatos diferentes A e B, ou um referendun (por SIM ou NÃO) onde cada agente (ou eleitor) vota seja pelo candidato A (ou pelo SIM, com opinião $o = +1$), seja pelo candidato B (ou pelo NÃO, com $o = -1$) ou fica indeciso (com $o = 0$).

Além disso, existe uma densidade ou fração d de agentes intransigentes ou obstinados, que não mudam suas opiniões, os aqui chamados inflexíveis.

As trocas de opinião ocorrem pela interação entre os dois membros de um determinado par de agentes i e j , de modo tal que j influenciará i .

As regras que governam a dinâmica são as seguintes:

1. Escolhemos um par aleatório de agentes (i, j) ;
2. Se i é um agente inflexível, nada ocorre, porque ele/ela não pode ser persuadido a mudar de opinião;
3. Por outro lado, se i não é um agente inflexível, sua opinião no próximo passo de tempo $t + 1$ será atualizada de acordo com

$$o_i(t + 1) = Sgn[o_i(t) + \mu_{ij}o_j(t)], \quad (5-1)$$

onde a função Sgn é a função sinal, que vale zero se o argumento é nulo e onde os acoplamentos $\{\mu_{ij}\}$ são dados pela distribuição de probabilidades bimodal discreta

$$F(\mu_{ij}) = p \delta(\mu_{ij} + 1) + (1 - p) \delta(\mu_{ij} - 1). \quad (5-2)$$

Este processo é repetido N vezes, o que define um passo de tempo nas simulações de Monte Carlo.

Note que a interação entre pares pode ser negativa (com probabilidade p) ou positiva (com probabilidade $1-p$), tal que p representa a fração de interações negativas (12). Em outras palavras, nós incluímos uma desordem no sistema, e vamos considerar que as variáveis aleatórias estocásticas μ_{ij} podem ser de dois tipos diferentes:

1. do tipo “temperadas” (do inglês *quenched*), ou seja, uma vez escolhidas, as $\{\mu_{ij}\}$ permanecem fixas no tempo.
2. do tipo “recozidas” (do inglês *annealed*), ou seja, as $\{\mu_{ij}\}$ mudam com o tempo, sendo no nosso caso atualizadas a cada unidade de tempo (N iterações das regras).

A influência de um indivíduo sobre um outro não é recíproca neste modelo, nem simétrica (isto é, não necessariamente $\mu_{ij} = \mu_{ji}$).

A inclusão de inflexíveis na população pode também ser vista como a introdução de um segundo tipo de desordem no sistema. Neste caso, assim como no das interações, a desordem também pode ser temperada ou recozida. No caso recozido, uma fração fixa d da população é escolhida aleatoriamente para esses indivíduos serem inflexíveis em cada etapa de tempo. Entretanto, um indivíduo que é sorteado como um inflexível em um intervalo de tempo pode atuar como sendo flexível no seguinte. No entanto, do ponto de vista social, pode ser mais realista considerar uma versão temperada dessa atitude. Neste caso, uma fração d da população é selecionada aleatoriamente como sendo inflexíveis no início da simulação, e esse grupo é mantido durante toda a dinâmica.

Na ausência de inflexíveis (12), ocorre uma transição de fase de não equilíbrio, do tipo ordem-desordem, numa fração crítica $p_c = 1/4$. Para $p < p_c$ uma das opiniões, seja 1 ou -1 , domina o sistema, com o estado de consenso absoluto ocorrendo apenas para $p = 0$. Por outro lado, para $p \geq p_c$, o sistema está em uma fase “paramagnética” caracterizada pela coexistência dos três tipos de atitude. Observa-se que nessa fase desordenada, a fração correspondente a cada opinião é $1/3$. Além disso, anteriormente foi discutido (12, 13) que as interações negativas produzem um efeito semelhante ao da introdução dos contrários de Galam (8) na população, uma vez que o principal efeito do parâmetro p é o de induzir agentes interagentes com a mesma opinião

a mudar para o estado de indecisos (opinião 0). Neste sentido, o modelo que estudamos neste trabalho pode ser visto como uma concorrência entre contrários e inflexíveis.

5.2

Análise do comportamento crítico

Analizamos o comportamento crítico do sistema em analogia ao feito usualmente no tratamento dos modelos de spin tipo Ising, segundo foi descrito na secção 4.1.

Nas simulações, foram considerados dois tipos de esquemas de atualização, o síncrono (ou paralelo) e o assíncrono (ou sequencial), e dois tipos de acoplamentos aleatórios $\{\mu_{ij}\}$, temperados e recozidos. Além disso, o sistema é preparado inicialmente num estado completamente desordenado, ou seja, as simulações começam com uma fração igual de cada opinião (1/3 para cada um). Nas seguintes subsecções, vamos analisar separadamente as versões temperada e recozida do modelo, no que diz respeito aos agentes inflexíveis.

5.2.1

Versão recozida (da inflexibilidade)

Neste caso, uma fração d da população é escolhida aleatoriamente para esses agentes serem inflexíveis em cada passo de tempo. Na fig. 5.1 exibimos resultados das simulações do modelo para valores típicos de d . Estes resultados são para os casos de acoplamentos $\{\mu_{ij}\}$ recozidos [Fig. 5.1(a)] e temperados [Fig. 5.1(b)], com atualizações síncronas e assíncronas. Para comparação, nós também apresentamos nas Figs. 5.1(a) e (b) os resultados do modelo sem inflexíveis (12) (com linha contínua), para o qual a natureza das interações μ_{ij} entre pares não afeta o comportamento das quantidades de interesse, definidas nas Eqs. (4-1), (4-2) e (4-3).

Observamos que a presença de inflexíveis do tipo recozido não afeta o comportamento do modelo, ou seja, o sistema exibe uma transição de fase de não equilíbrio em um ponto crítico $p_c = 1/4$ (12). De acordo com as referências (12, 13), podemos prever esse resultado analiticamente (ver Seção 5.3). Na verdade, os cálculos analíticos para a versão recozida do modelo levam às mesmas equações obtidas na ausência de inflexíveis (12). Estes resultados podem ser facilmente compreendidos. Dado que o estado (inflexível ou não) dos agentes pode mudar a cada passo de tempo, um determinado agente que é inflexível num determinado instante de tempo (com probabilidade d) pode deixar de sê-lo no próximo passo de tempo (com probabilidade $1 - d$). Veremos

na próxima subseção que, se o estado inflexível é uma variável temperada, o comportamento crítico vai mudar e o ponto crítico da transição ordem-desordem se tornará dependente de d .

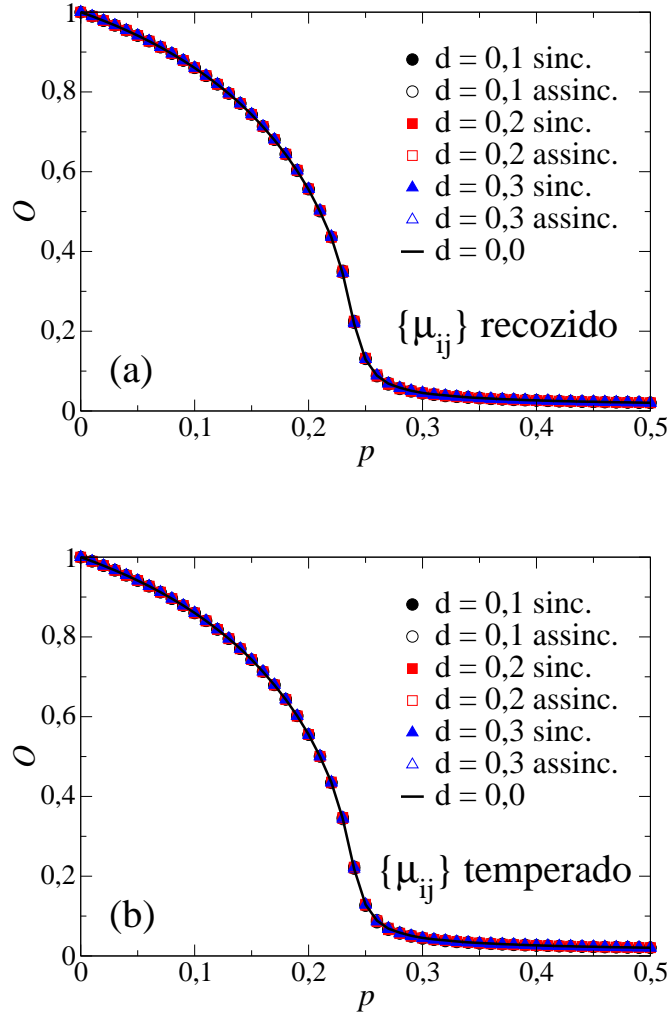


Figura 5.1: Média do parâmetro de ordem O como função de p para valores típicos da fração d de agentes inflexíveis, para a versão recozida do modelo (símbolos cheios e vazios, respectivamente). As intensidades das interações aos pares $\{\mu_{ij}\}$ são recozidas (a) e temperadas (b), para os esquemas de atualização síncrono e assíncrono. Para comparação, também apresentamos o resultado do modelo em ausência de agentes inflexíveis (12) (linha cheia). O tamanho da população é $N = 1000$. Os valores médios foram calculados sobre 100 simulações.

5.2.2

Versão temperada (da inflexibilidade)

Agora, uma fração d da população é selecionada aleatoriamente para os membros desse grupo serem inflexíveis no início da simulação, sendo mantidos como tais durante toda a dinâmica. Na fig. 5.2 exibimos os resultados para o parâmetro de ordem O como função da fração p de interações negativas, para valores típicos de d . Nestas simulações, nós consideramos variáveis $\{\mu_{ij}\}$ recozidas e atualizações síncronas [Fig. 5.2(a)] e por outro lado variáveis $\{\mu_{ij}\}$ temperadas e atualizações assíncronas [Fig. 5.2(b)], ambos os casos, para uma população de $N = 1000$ agentes.

Podemos ver, na Fig. 5.2, que existe um forte impacto da variação do parâmetro d sobre o comportamento do parâmetro de ordem O . Além disso, dado um valor fixo de d , a curva do parâmetro de ordem O não é afetada pela natureza das variáveis aleatórias μ_{ij} nem pelo tipo de esquema de atualização utilizado.

Além do mais, também podemos observar que o sistema sofre uma transição ordem-desordem para pequenos valores de d em pontos específicos que dependem de d . Entretanto, para valores suficientemente grandes de d , o sistema está em uma fase desordenada (paramagnética).

Os estados de consenso ocorrem apenas em um caso muito específico: na ausência de inflexíveis ($d = 0$) e de interações negativas ($p = 0$). Em outras palavras, o valor máximo do parâmetro de ordem é $O < 1$ para todos os valores de $d > 0$, independentemente de p . Observe que a ocorrência de estados de consenso, com $O = 1$ ocorre, por exemplo, quando um Estado exerce um controle social induzindo um consenso sobre determinado assunto, a partir da propaganda ou de políticas sociais que levam à aceitação da ordem vigente. Entretanto esse consenso poucas vezes surge espontaneamente sem um campo ou influência externa, ao passo que os estados com $O < 1$ representam situações mais espontâneas ou “democráticas” (20, 32). Assim, a inclusão de agentes inflexíveis torna o modelo mais realista.

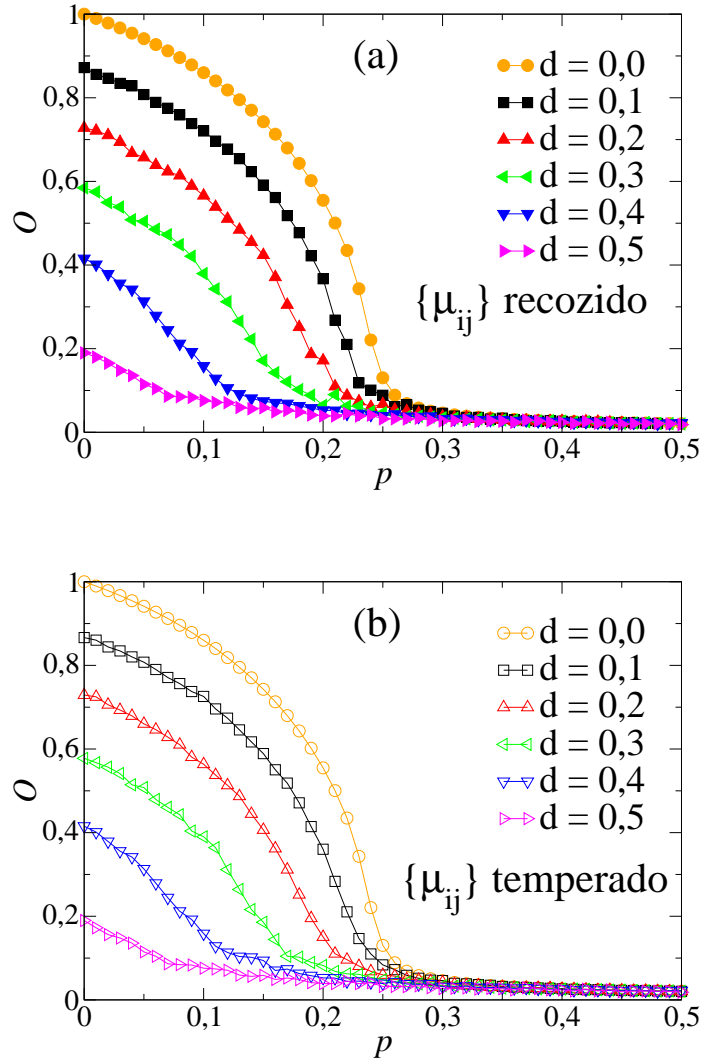


Figura 5.2: Parâmetro de ordem O como função de p , para valores típicos da fração d de agentes inflexíveis, para a versão temperada do modelo. Para comparação, também apresentamos o resultado do modelo em ausência de agentes inflexíveis ($d = 0$) (12). As interações de pares $\{\mu_{ij}\}$ e o esquema de atualização são recozidas e síncrono (a) temperadas e assíncrono (b), respectivamente. O tamanho da população é $N = 1000$. Os valores médios foram calculados sobre 100 simulações.

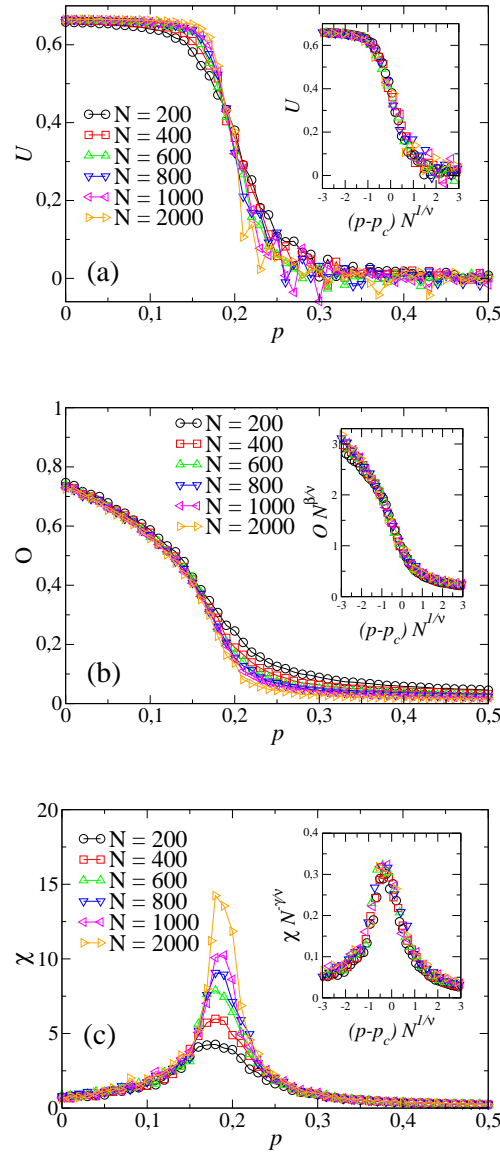


Figura 5.3: Cumulante de Binder (a), parâmetro de ordem (b) e susceptibilidade (c), para a versão temperada do modelo com $d = 0, 2$ e diferentes tamanhos N (gráficos principais). Os gráficos reescalados correspondentes são apresentados nos quadros inseridos. Os dados correspondem a variáveis aleatórias $\{\mu_{ij}\}$ temperadas e atualização assíncrona. O melhor colapso dos dados é obtido para $p_c \approx 0,196$, $\beta \approx 0,5$, $\gamma \approx 1,0$ e $1/\nu \approx 0,5$.

Com a finalidade de localizar os pontos críticos $p_c(d)$ numericamente, realizamos simulações para diferentes tamanhos populacionais N . Assim, os pontos de transição $p_c(d)$ foram estimados, para cada valor de d , a partir da interseção das curvas do cumulante Binder para os diferentes tamanhos (33). Adicionalmente, realizamos uma análise de tamanho finito, para obter uma estimativa dos expoentes críticos β , γ e ν , por meio das relações de escala usuais

$$O(d, N) \sim N^{-\beta/\nu}, \quad (5-3)$$

$$\chi(d, N) \sim N^{\gamma/\nu}, \quad (5-4)$$

$$U(d, N) \sim \text{constante}, \quad (5-5)$$

$$p_c(d, N) - p_c(d) \sim N^{-1/\nu}, \quad (5-6)$$

que são válidas na vizinhança da transição.

A título de ilustração, apresentamos na Fig. 5.3 o comportamento das quantidades de interesse, bem como os gráficos de escala no caso $d = 0, 2$, para acoplamentos aleatórios temperados e atualizações assíncronas. Nossas estimativas para os expoentes críticos coincidem com as do modelo original ($d = 0$), ou seja, obtivemos $\beta \approx 0,5$, $\gamma \approx 1,0$ e $1/\nu \approx 0,5$. Esses expoentes (típicos de modelos de campo médio) são robustos: eles são os mesmos, dentro da margem de erro, para todos os valores de d , independentemente do método de atualização considerado e do tipo de acoplamentos aleatórios $\{\mu_{ij}\}$ (temperados ou recozidos).

Levando-se em conta a análise de tamanho finito para valores típicos de d , exibimos na Fig. 5.4 o diagrama de fases do modelo no plano p versus d . Os símbolos são as estimativas numéricas para os pontos críticos $p_c(d)$.

Neste caso não temos resultados analíticos, mas podemos propor uma forma qualitativa para a fronteira crítica. Com base nos resultados analíticos de um modelo semelhante (13), onde os pontos críticos são dados por uma razão de dois polinômios de primeira ordem, propomos a seguinte expressão para descrever heurísticamente a fronteira crítica,

$$p_c(d) = \frac{x d + y}{z d + 4 y}, \quad (5-7)$$

onde x , y e z são números reais, e levamos em consideração o resultado analítico do modelo em ausência de inflexíveis, $p_c(d = 0) = 1/4$ (12). Ajustando a expressão (5-7) aos valores numéricos de $p_c(d)$, obtemos $x \approx -2,0$, $y \approx 1,0$ e $z \approx -4,5$, dando

$$p_c(d) = \frac{4 d - 2}{9 d - 8}. \quad (5-8)$$

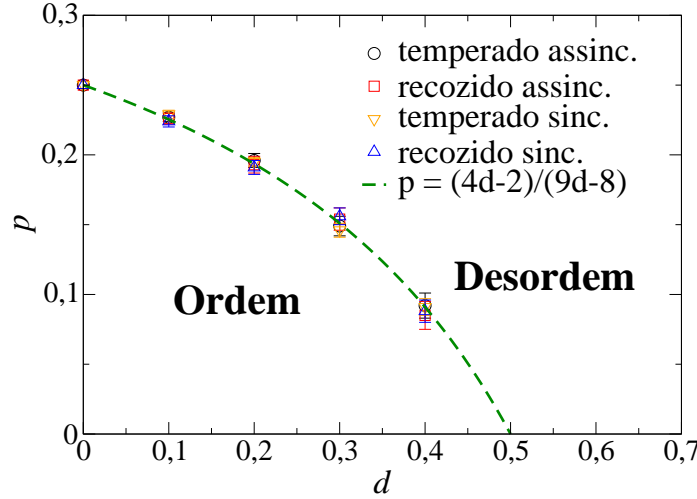


Figura 5.4: Diagrama de fases do modelo no plano p como função de d , para a versão temperada do modelo. Apresentamos os resultados para acoplamentos $\{\mu_{ij}\}$ temperados e recozidos e para esquemas de atualização síncrono e assíncrono. A linha tracejada representa a descrição fenomenológica da fronteira crítica, dada pela Eq. (5-8).

A Eq. (5-8) é representada na Fig. 5.4 junto com os resultados numéricos. Pode-se ver que a curva descreve qualitativamente bem o limite entre as fases ordenada e desordenada, e os dados da simulação concordam, dentro das barras de erro, com a Eq. (5-8). Por exemplo, a estimativa para o caso exibido na Fig. 5.3 é $p_c(d = 0,2) = 0,196 \pm 0,005$, que está em boa correspondência com o valor $\approx 0,193$ obtido da Eq. (5-8).

Além disso, baseados na Eq. (5-8), podemos estimar a densidade crítica d_c acima da qual o sistema não pode ordenar-se. Este valor crítico é $d_c = 1/2$, e acima dele as três opiniões $+1$, -1 e 0 coexistem na população ($1/3$ em média para cada um), que é uma característica da fase desordenada deste tipo de modelo (12, 13). Segundo discutido acima, os expoentes críticos são os mesmos para todos os valores de d , indicando a universalidade da fronteira ordem-desordem. Logo, para valores suficientemente grandes da fração de inflexíveis (acima de 0,5), a transição é eliminada.

5.2.3

Agentes intransigentes restritos a um dado grupo de opinião

Também pode-se estudar uma variante natural do modelo considerado na seção anterior. Em vez de selecionar como agentes inflexíveis uma fração d da população total, ao acaso, pode-se restringir os intransigentes a um

determinado grupo de opinião. Em outras palavras, podemos escolher com probabilidade d os agentes inflexíveis, mas só dentre os que têm uma dada opinião o ($+1$, -1 ou 0). Esta também é uma situação realista, uma vez que em algumas situações há apenas uma certa opinião ou escolha, que é compartilhada por um grupo radical. Vamos considerar nesta seção apenas a versão temperada dos inflexíveis, desde que o recozido não deu novos resultados, como discutido na seção anterior.

Podemos considerar primeiro o caso em que os inflexíveis são escolhidos entre os agentes com a opinião $o = 0$. Exibimos na Fig. 5.5(a) os resultados para o parâmetro de ordem em função da p e valores típicos de d . Pode-se ver que o valor máximo do parâmetro de ordem (para $p = 0$) diminui para valores crescentes de d . Este resultado é esperado, uma vez que a condição inicial é completamente desordenada ($1/3$ para cada opinião), e uma fração d da subpopulação com a opinião $o = 0$ é selecionada para os seus membros serem inflexíveis.

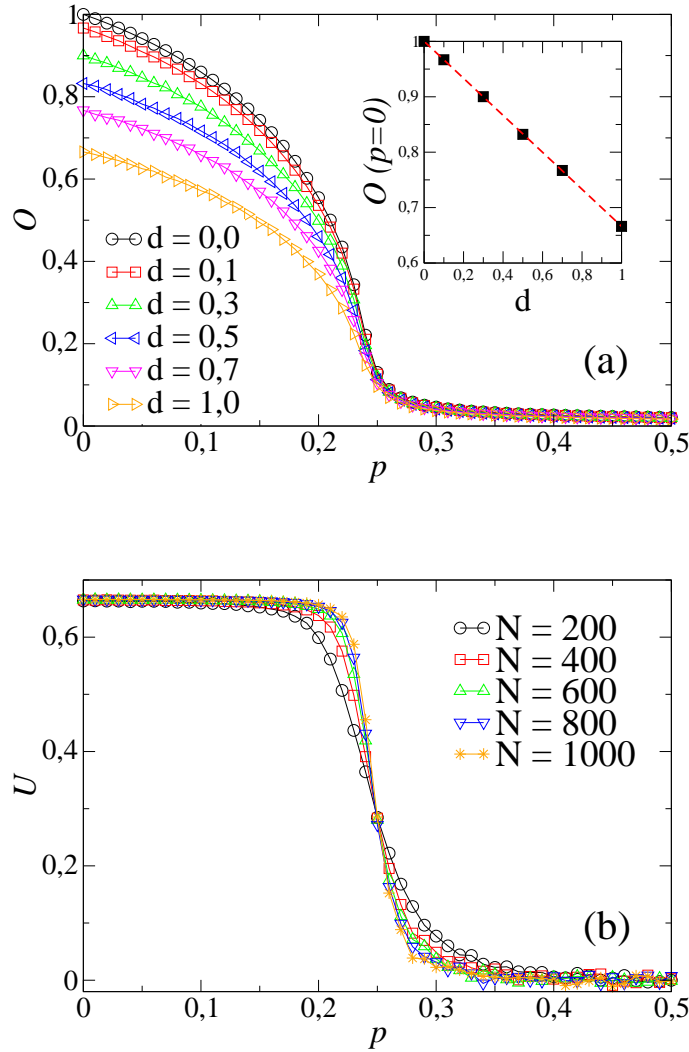


Figura 5.5: Resultados para o caso em que os inflexíveis são escolhidos dentre os agentes com opinião $o = 0$. (a) Parâmetro de ordem como função de p para valores típicos de d , com $N = 1000$. O gráfico inserido mostra o valor máximo do parâmetro de ordem (que ocorre para $p = 0$) para cada valor de d . Dados ajustados com a função $O(p = 0) = 1 - d/3$. (b) Cumulante de Binder para $d = 1,0$ e diferentes tamanhos N , mostrando a intersecção em $p_c \approx 0,25$. Em ambos os casos as interações $\{\mu_{ij}\}$ são variáveis aleatórias temperadas, e realizamos atualizações assíncronas.

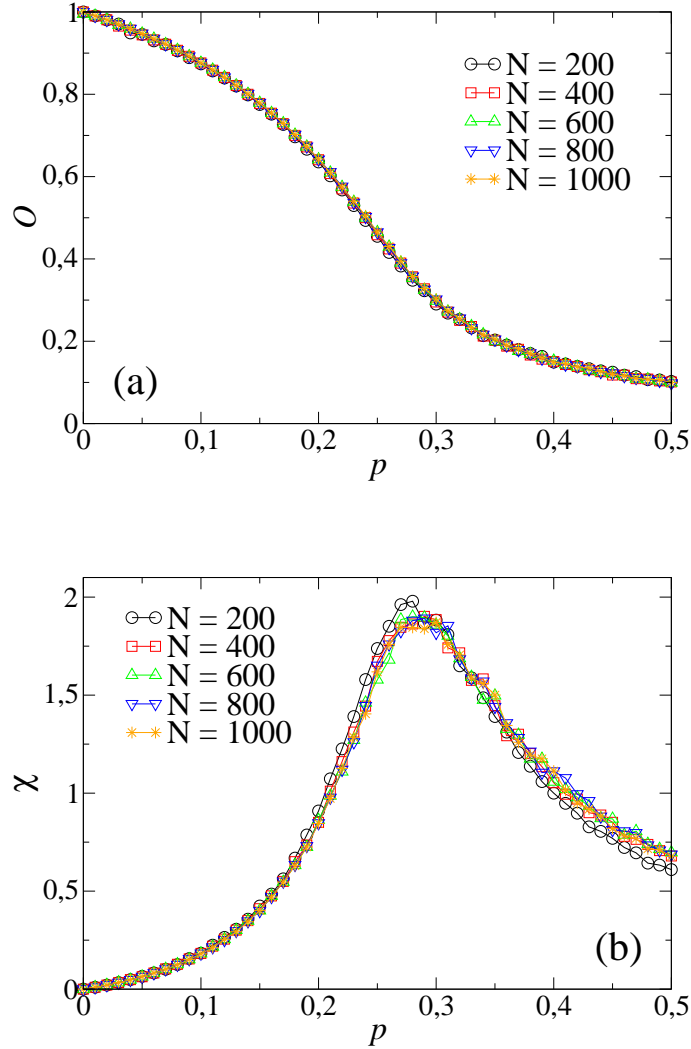


Figura 5.6: Resultados para o caso em que os inflexíveis são escolhidos dentre os agentes com opinião $o = +1$, para $d = 0,3$. Parâmetro de ordem (a) e susceptibilidade (b) como funções de p , para diferentes valores de N . Note que não existe dependência dos resultados com o tamanho do sistema. Em ambos os casos as interações $\{\mu_{ij}\}$ são variáveis aleatórias temperadas, e realizamos atualizações assíncronas.

Este resultado é esperado, uma vez que a condição inicial é completamente desordenada ($1/3$ para cada opinião), e uma fração d dos agentes com a opinião $o = 0$ são selecionados como inflexíveis.

Neste caso, o valor máximo do parâmetro de ordem deve ser $O_{\max} = 1 - d/3$, o que é confirmado pelas simulações (ver inserção da Fig. 5.5(a)).

Apesar de que os valores do parâmetro de ordem para pequenos valores de p são diferentes para cada valor de d , a transição ordem-desordem ocorre no mesmo ponto crítico. Um exemplo é dado na Fig. 5.5(b), onde exibimos o cumulante de Binder como função de p para $d = 1, 0$.

Pode-se observar um cruzamento das curvas em $p_c \approx 0,25$. Também foi realizada uma análise de tamanho finito (não mostrada) que confirma os mesmos expoentes observados nas seções anteriores, ou seja, temos que $\beta \approx 0,5$, $\gamma \approx 1,0$ e $1/\nu \approx 0,5$. Estes resultados são independentes d , o que indica que a classe de universalidade do modelo não é afetada quando consideramos agentes inflexíveis só entre os indivíduos com a opinião $o = 0$.

No caso em que os inflexíveis são restritos aos agentes com a opinião $o = 1^1$, os resultados são diferentes aos do caso anterior. Observamos que o parâmetro de ordem decai com valores crescentes de p , como de costume, mas os valores mais baixos de o não são tão pequenos como de costume (ver Fig. 5.6(a)). Além disso, as curvas do parâmetro de ordem, assim como as da susceptibilidade, não dependem do tamanho do sistema (ver a Fig. 5.6), tal como usualmente ocorre em transições de fase, em geral, (34, 35). Estes resultados sugerem que não existe uma transição de fase quando consideramos agentes inflexíveis só entre os agentes com o parecer $o = +1$ ou $o = -1$.

Para confirmar esse quadro, mostramos na Fig. 5.7 o cumulante de Binder para dois valores diferentes de d , ou seja, $d = 0,3$ (a) e $d = 0,6$ (b), para diferentes tamanhos N . Pode-se observar que as curvas do cumulante de Binder não se cruzam, indicando que não há transição de fase (33). Note também a partir da Fig. 5.7, que a ausência da transição de fase é mais pronunciada para valores maiores de d . Assim, pode-se concluir que existe uma mudança de comportamento, isto é, o parâmetro de ordem diminui quando a fração de interações negativas p aumenta, mas não existem divergências associadas a esse comportamento, o que sugere a ausência de uma fase de transição.

¹O comportamento do modelo no caso em que os inflexíveis são restritos aos agentes com a opinião $o = -1$ é idêntico ao do caso $o = 1$.

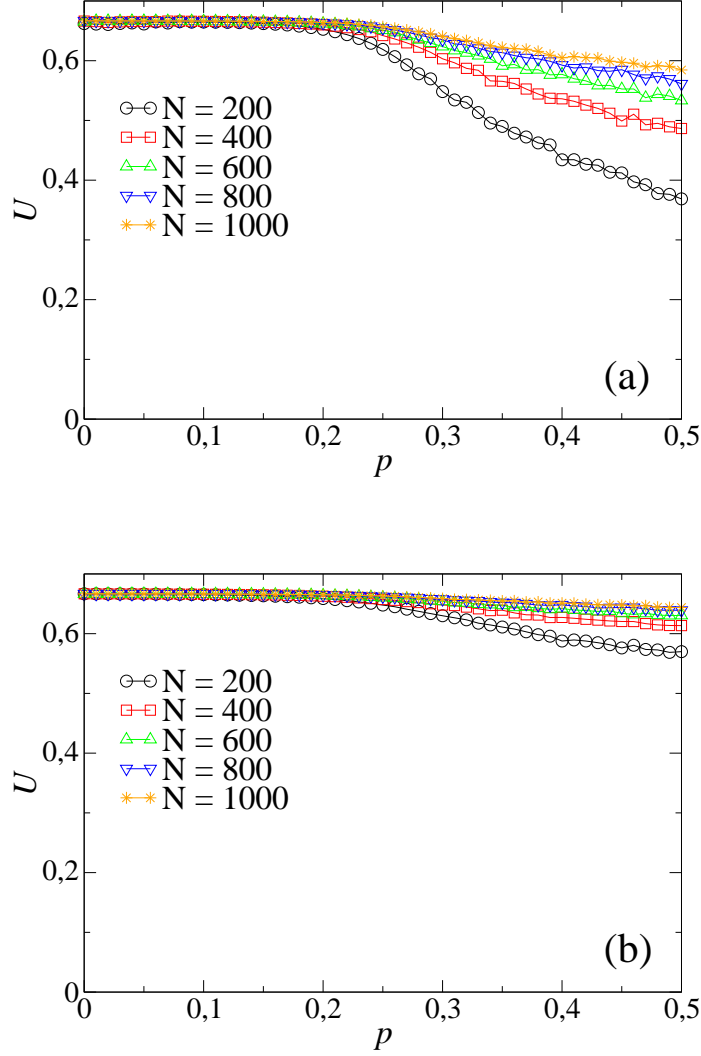


Figura 5.7: Cumulante de Binder para o caso em que os inflexíveis são escolhidos dentre os agentes com opinião $o = +1$, para diferentes tamanhos N . (a) $d = 0,3$ e (b) $d = 0,6$. Note a ausência do cruzamento das curvas. Em ambos os casos as interações $\{\mu_{ij}\}$ são variáveis aleatórias temperadas, e as atualizações assíncronas.

5.3

Cálculo de campo médio

Consideremos todas as combinações possíveis. Estas são indicadas na Tabela 5.1, com as suas respectivas probabilidades de ocorrência.

$o_i(t)$	$o_j(t)$	$o_i(t+1)$	probabilidade
1	1	1	$f_1^2(1-p)$
1	1	0	f_1^2p
1	0	1	f_1f_0
1	-1	1	$f_1f_{-1}p$
1	-1	0	$f_1f_{-1}(1-p)$
0	1	1	$f_0f_1(1-p)$
0	1	-1	f_0f_1p
0	0	0	f_0^2
0	-1	1	$f_0f_{-1}p$
0	-1	-1	$f_0f_{-1}(1-p)$
-1	1	0	$f_{-1}f_1(1-p)$
-1	1	-1	$f_{-1}f_1p$
-1	0	-1	$f_{-1}f_0$
-1	-1	0	f_{-1}^2p
-1	-1	-1	$f_{-1}^2(1-p)$

Tabela 5.1: Todas as possíveis combinações com as respectivas probabilidades de ocorrência, onde f_k é a probabilidade estacionária de que um agente esteja no estado k . Para o caso em que a inflexibilidade não é levada em conta.

Levando em conta a inflexibilidade, cada um dos casos acima acontece com probabilidade $1-d$ no caso do indivíduo não ser inflexível e no caso de ser inflexível ele permanece no seu estado k com probabilidade $f_k d$.

De acordo com os casos possíveis, os elementos m_{jk} da matriz de transição do estado j para o estado k são dados por

$$\begin{aligned}
m_{1,1} &= [f_1^2(1-p) + f_1f_0 + f_1f_{-1}p](1-d) + f_1d \\
m_{1,0} &= [f_1^2p + f_1f_{-1}(1-p)](1-d) \\
m_{1,-1} &= 0 \\
m_{0,1} &= [f_0f_1(1-p) + f_0f_{-1}p](1-d) \\
m_{0,0} &= f_0^2(1-d) + f_0d \\
m_{0,-1} &= [f_0f_1p + f_0f_{-1}(1-p)](1-d) \\
m_{-1,1} &= 0 \\
m_{-1,0} &= [f_1f_{-1}(1-p) + f_{-1}^2p](1-d) \\
m_{-1,-1} &= [f_1f_{-1}p + f_0f_{-1} + f_{-1}^2(1-p)](1-d) + f_{-1}d.
\end{aligned}$$

onde f_k é a probabilidade estacionária de que um agente esteja no estado k (ou fração estacionária de agentes no estado k).

No estado estacionário, os fluxos para e desde cada estado devem estar balanceados. Por exemplo para o estado nulo, deve ser

$$m_{1,0} + m_{-1,0} = m_{0,1} + m_{0,-1}.$$

Adicionalmente, quando o parâmetro de ordem se anula, deve valer

$$f_1 = f_{-1}.$$

Essas duas condições implicam

$$f_1 = f_{-1} = f_0 = 1/3,$$

esta condição (condição de desordem) deve valer inclusive no ponto crítico.

Defino também a probabilidade $r(k)$, com $k = -1, 0, 1$, de que o estado se desloque em k , por exemplo

$$r(1) = m(-1, 0) + m(0, 1).$$

No estado estacionário, o deslocamento médio deve ser nulo, portanto

$$r(1) - r(-1) = 0. \quad (5-9)$$

Esta condição de balanço, junto com a de desordem $f_1 = f_{-1} = f_0 = 1/3$, leva a

$$p_c(d) = \frac{1}{4}. \quad (5-10)$$

Note que o ponto crítico independe de d . Este resultado corresponde ao obtido numericamente para a versão recozida da inflexibilidade. Em contraste, na versão temperada da inflexibilidade, o ponto crítico depende de d segundo nossos resultados numéricos.

6

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho estudamos um modelo de cinética de formação de opiniões. É um modelo de opiniões de estados discretos onde cada agente tem uma de três atitudes possíveis, representadas pelos valores 1, -1 e 0. Nós consideramos uma população de N agentes no limite de campo médio, onde cada agente pode interagir com todos os outros. As interações competitivas, negativas (com probabilidade p) e positivas (com probabilidade $1 - p$) produzem um efeito semelhante ao da introdução de contrários no modelo de Galam. Introduzimos um novo tipo de agentes no modelo precedente, considerando uma densidade d de agentes obstinados ou inflexíveis, que não mudam suas opiniões. Neste caso, o nosso modelo introduz uma competição entre contrários e inflexíveis no processo de formação de opiniões.

Devido à existência de dois tipos de efeitos especiais, contrários e inflexíveis, existem dois tipos diferentes de desordem no sistema. Estes são introduzidos por meio de variáveis temperadas ou recozidas. A intensidade da interação entre pares pode ser fixa no tempo, segundo foi gerada no início de cada simulação (variável temperada) ou pode mudar ao longo do tempo, sendo gerada em cada passo de tempo (variável recozida). Além disso, o estado de inflexível pode também ser introduzido no sistema de uma forma temperada ou recozida. No caso recozido, uma fração fixa d dos agentes é escolhida aleatoriamente para ser inflexíveis em cada etapa de tempo (temporária ou ocasionalmente). Um indivíduo que foi sorteado para ser um inflexível em um passo de tempo pode agir como um volátil no seguinte. No entanto, do ponto de vista social, parece mais realista considerar uma versão temperada da inflexibilidade. Neste caso, uma fração d da população é selecionado aleatoriamente como sendo inflexíveis no início da simulação, e mantendo-se esse carácter durante toda a dinâmica. Por outro lado, consideramos que os estados dos agentes (opiniões) são atualizados por meio de atualizações sequenciais (assíncrono) ou paralelas (síncrono).

Incluindo-se os agentes inflexíveis, a versão recozida do modelo não apresenta diferenças com o caso sem inflexíveis ($d = 0$). Isto pode ser explicado

pelas flutuações no estado inflexível: um determinado agente que é inflexível em um determinado passo de tempo (com probabilidade d) pode não ser um inflexível no próximo passo de tempo (com probabilidade $1 - d$). Neste sentido, cada agente pode sempre mudar de opinião. Assim, na versão recozida da inflexibilidade, o sistema sofre uma transição de fase de não-equilíbrio no ponto crítico $p_c = 1/4$, com expoentes críticos $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$ e $\nu = 2$. Este resultado não é afetado pelo esquema de atualização utilizado (síncrono ou assíncrono) nem pela natureza das interações aleatórias (temperada ou recozida).

Por outro lado, na versão temperada da inflexibilidade, o ponto crítico que separa as fases ordenada e desordenada depende da densidade d de inflexíveis. As simulações sugerem que os valores de $p_c(d)$ decrescem para valores crescentes de d , ou seja, a fase desordenada aumenta com d . Uma inspeção qualitativa dos dados numéricos sugere que existe uma densidade crítica $d_c \approx 1/2$, acima da qual o sistema não pode-se ordenar, por exemplo, o sistema encontra-se num estado paramagnético para todos os valores de p . No entanto, os expoentes críticos na fronteira ordem-desordem são os mesmos, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$ e $\nu = 2$, independentemente de d . Isto sugere uma universalidade no modelo. Este resultado não é afetado pelo esquema de atualização utilizado (síncrono ou assíncrono) nem pela natureza das interações aleatórias (temperadas ou recozidas).

Também consideramos o caso em que os inflexíveis são escolhidos dentre os indivíduos com a mesma opinião. Para o caso em que esta opinião é $o = 0$, o comportamento crítico do sistema não é afetado, ou seja, a transição de fase continua ocorrendo em $p_c = 1/4$ para todo d . Por outro lado, quando os inflexíveis são escolhidos dentre os agentes com o parecer $o = 1$ ou $o = -1$, a transição de fase desaparece. Esta conclusão é sustentada pelo comportamento das quantidades de interesse. Na verdade, o parâmetro de ordem e as curvas de susceptibilidade independem do tamanho do sistema, e as curvas do cumulante de Binder para diferentes tamanhos da população não se cruzam. Todos estes resultados sugerem que a ausência de uma transição ordem-desordem.

Apesar da simplicidade do nosso modelo, este pode ser relevante para descrever sistemas sociais reais. Em nosso modelo, $o = -1$ representa uma posição desfavorável e $o = 1$ uma favorável, enquanto $o = 0$ significa indecisão. Assim, o parâmetro de ordem no modelo corresponde a um índice de classificação global e o estado ordenado significa que há uma decisão consensual (total ou parcial). Um estado desordenado significa a ausência de uma decisão. Assim, o efeito dos contrários, quantificado pelo parâmetro p , induz uma fase desordenada para valores suficientemente grandes de p . Além disso, a inclusão

de agentes inflexíveis quantificada pelo parâmetro d , da maneira mais realista (versão temperada do modelo), torna esse efeito mais pronunciado, uma vez que os pontos críticos p_c diminuem com o aumento de d . Assim, a concorrência entre os dois efeitos, contrários e inflexíveis, favorece o estado desordenado, o que indica que, na presença de obstinados é mais difícil chegar a uma decisão final em um debate público, o que é uma característica realista do modelo. Além disso, os resultados mostram que os estados de consenso nunca são atingidos se existem agentes inflexíveis. Esta é também uma situação realista em eleições ou debates públicos em geral. De fato, a ocorrência de estados de consenso com o parâmetro de ordem $O = 1$, em sistemas reais pode ser associada a uma situação de controle social mais do que a uma situação espontânea, ao passo que os estados com ordem parcial ($O < 1$), que ocorrem no nosso modelo para uma vasta gama de parâmetros, representam situações mais realistas como resultado da evolução sem ingerências externas, ou mais democráticas (20, 32).

Referências Bibliográficas

- [1] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang, Complex networks: Structure and dynamics, *Physics Reports* 424, (2006) 177-308.
- [2] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* 81 (2009) 591-646.
- [3] S. Galam, Y. Gefen, Y. Shapir, *J. Math. Sociol.* 9 (1982) 1-13.
- [4] S. Galam, *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena* (Springer, Berlin, 2012).
- [5] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems* (Springer, New York, 1985).
- [6] S. Redner, *A Guide to First-passage Processes* (Cambridge, Cambridge University Press, 2001).
- [7] S. Galam, *Physica A* 274 (1999) 132-139.
- [8] S. Galam, *Eur. Phys. J. B* 25 (2002) 403.
- [9] M. J. de Oliveira, *J. Stat. Phys.* 66 (1992) 273.
- [10] M. Mobilia, S. Redner, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 046106.
- [11] K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, *Int. J. Mod. Phys. C* 11 (2000) 1157-1165.
- [12] S. Biswas, A. Chatterjee, P. Sen, *Physica A* 391 (2012) 3257-3265.
- [13] N. Crokidakis, C. Anteneodo, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 061127.
- [14] M. S. de La Lama, J. M. López, H. S. Wio, *Europhys. Lett.* 72 (2005) 851.
- [15] D. Stauffer, J. S. Sá Martins, *Physica A* 334 (2004) 558-565.
- [16] S. Galam, *Physica A* 333 (2004) 453-460.
- [17] S. D. Yi, S. K. Baek, C. -P. Zhu, B. J. Kim, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 012806.

- [18] A. C. R. Martins, C. D. Kuba, *Adv. Complex Syst.* 13 (2010) 621.
- [19] S. Galam, F. Jacobs, *Physica A* 381 (2007) 366-376.
- [20] J. J. Schneider, *Int. J. Mod. Phys. C* 15 (2004) 659.
- [21] L. -L. Jiang, D. -Y. Hua, T. Chen, *J. Phys. A* 40 (2007) 11271-11276.
- [22] A. C. R. Martins, S. Galam, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 042807.
- [23] J. M. Yeomans, *Statistical Mechanics of Phase Transitions* (Oxford University Press, 1992).
- [24] E. Ising, *Z. Phys.* 31 (1925) 253-258.
- [25] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Claredon Press, Oxford, 1971).
- [26] E. A. Guggenheim, *J. Chemical Physics* 13 (1945) 253.
- [27] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch, *Adv. Complex Systems* 3 (2000) 87.
- [28] D. Stauffer, A. O. Sousa, S. Moss de Oliveira, *Int. J. Mod. Phys. C* 11 (2000) 1239-1245.
- [29] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loretto, *Statistical physics of social dynamics*, *Reviews of Modern Physics* 81 (2009) 591-646.
- [30] J. L. Cardy, *Finite-Size Scaling* (Elsevier, 1988).
- [31] M. Lallouache, A. S. Chakrabarti, A. Chakraborti, B. K. Chakrabarti, *Phys. Rev. E* 82 (2010) 056112.
- [32] N. Crokidakis, F. L. Forgerini, *Braz. J. Phys.* 42 (2012) 125.
- [33] K. Binder, *Z. Phys. B* 43 (1981) 119.
- [34] J. Marro, R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [35] D. P. Landau, K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics* (Cambridge University Press, New York, 2009).