Referências bibliográficas

ABAQUS. (s.d.). Theory Manual. In: ABAQUS Documentation - Version 6.11.

- Ang, A. H.-S., & Tang, W. H. (1975). *Probability concepts in engineering planning and design*. John Wiley & Sons Inc.
- Ashby, M. F. (1972). A first report in deformation mechanism maps. *Acta Metallurgica*, 20, pp. 887-897.
- Baar, C. A. (1977). Applied Salt-Rock Mechanics. Amsterdam: Ensevier Scientific Publishing Company.
- Baecher, G. B., & Christian, J. T. (2003). Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering. John Wiley & Sons, Inc.
- Beasley, C. J., Fiduk, J. C., Bize, E., Boyd, A., Frydman, M., Zerilli, A., . . . Pinto,A. C. (2010). Brazil's Presalt Play. *Oilfield Review*, pp. 28-37.
- Benjamin, J. R., & Cornell, A. A. (1970). Probability, statistics and decision for civil engeneers. New York: McGraw-Hill.
- Berger, A., Fleckenstein, W. W., Eustes, A. W., & Thonhauser, G. (2004). Effect of Eccentricity, Voids, Cement Channels, and Poro Pressure Decline on Collapse Resistance of Casing. *Annual Technical Conference and Exibition*. Houston: Society of Petroleum Engineers Inc. (SPE).
- Borges, R. G. (2008). Avaliação Numérica de Perturbações de Tensões Associadas a Estruturas Salíferas e Suas Influências na Estabilidade de Poços. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado - COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).
- Bostrom, B., & Skomedal, E. (2004). Reservoir Geomechanics with ABAQUS. Pawtucket: 2004 ABAQUS Users Conference.
- Botelho, F. V. (2008). Análise Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado Departamento de Engenharia Civil Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio).

- Bradshaw, R. L., & McClain, W. C. (1971). Project Salt Vault: A Demonstration of the Disposal of High-Activity Solidified Wastes in Underground Salt Mines.
- Callister, W. D. (2008). *Ciência e Engenharia de Materiais Uma Introdução* (7^a ed.). Rio de Janeiro: LTC.
- Carvalho, A. L. (2012). Análise Paramétrica e Probabilística da Reativação e Abertura de Falhas Geológicas. Rio de Janeiro: Projeto de Iniciação Científica - Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).
- Cavalcante, A. D. (2012). Modelagem Numérica de Escavações de Túneis em Maciços Evaporíticos. São Paulo: Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (USP).
- Cavalcante, A. D., & Ramos, V. C. (2010). Ajuste de Parâmetros Para Modelo Viscoelástico de Fluência com Aplicações em Rochas Salinas. In: E. Dvorkin, M. Goldschmit, & M. Storti (Ed.), *Mecânica Computacional. XXIX*, pp. 8579-8591. Buenos Aires: Asociación Argentina de Mecánica Computacional.
- Chan, K. S., Bodner, S. R., Fossum, A. F., & Munson, D. E. (1992). A constitutive model for inelastic flow and damage evolution in solids under triaxial compression. *Mechanics of Materials - Elsevier*, 14, pp. 1-14.
- Chan, K. S., Brodsky, N. S., Fossum, A. F., Bordner, S. R., & Munson, D. E. (1993). Damage-induced nonassociated inelastic flow in rock salt.
- Chen, Z., Wang, M. L., & Lu, T. (1997). Study of Tertiary Creep of Rock Salt. Journal of Engineering Mechanics, pp. 77-82.
- Christante, L. (2009). Pré-Sal: desafios científicos e ambientais. *Unesp Ciência*, p. 2009.
- Coble, R. L. (1963). A Model for Boundary Diffusion Controlled Creep in Polycrystalline Materials. *Journal of Applied Physics*, *34*, pp. 1679-1682.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., & Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* (3rd ed.). Madinson: John Wiley & Sons, Inc.
- Costa, A. M. (1984). Uma Aplicação de Métodos Computacionais e Princípios de Mecânica das Rochas no Projeto e Análise de Escavações Destinadas à Mineração Subterrânea. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado - COPPE -Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

- Costa, A. M., & Fairhurst, C. (1985). Comparison of numerical modeling with predictions from laboratory tests and field observations of deformation in a potash mine in Sergipe, Brazil. 26th US Symposium on Rock Mechanics, (pp. 239-249). Rapid City.
- Costa, A. M., & Poiate Jr., E. (2009). Rocha salina na indústria do petróleo: aspectos relacionados à reologia e à perfuração de rochas salinas. In: W. Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal Geologia e Tectônica Exemplos nas Bacias Brasileiras (pp. 362-385). São Paulo: Editora Beca.
- Costa, A. M., Amaral, C. S., Poiate, E., Pereira, A. M., Martha, L. F., Gattass, M., & Roehl, D. M. (2012). Underground Storage of Natural Gas and CO2 in Salt Caverns in Deep and Ultra-deep Water Offshore Brazil. (pp. 1659-1664). London: Taylor & Francis Group.
- Costa, A. M., Poiate Jr., E., Amaral, C. S., Gonçalves, C. J., Falcão, J. L., & Pereira, A. (2010). Geomechanics applied to the well design through salt layers in Brazil: A History of success. 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium. Salt Lake City: American Rock Mechanics Association (ARMA).
- Costa, A. M., Poiate Jr., E., Falcão, J. L., & Coelho, L. F. (2005). Triaxial Creep Tests in Salt Applied in Drilling Through Thick Salt Layers in Campos Basin - Brazil. SPE/IADC Drilling Conference. Amsterdam: Society of Petroleum Engineers Inc. (SPE).
- Dai, Y., Fredlund, D. G., & Stolte, W. J. (1993). A probabilistic slope stability analysis using deterministic computer software. In: K. S. Li, & S.-C. R. Lo, *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering* (pp. 267-274). Canberra: Taylor & Francis.
- D'Ellia, P. C. (1991). Análise e Retroanálise do Comportamento de Fluência em Escavações Subterrâneas pelo Método dos Elementos Finitos. Rio de Janeiro: Tese de Mestrado - COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).
- DeVries, K. L., Callahan, G. D., & Mellegard, K. D. (2005). Numerical Simulations of Natural Gas Storage Caverns in Bedded Salt. 40th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS): Rock Mechanics for Energy, Mineral and Infrastructure Development in the Northern Regions. Anchorage: American Rock Mechanics Association (ARMA).

- Dusseault, M. B. (1989). Saltrock Behavior as an Analogue to the Behavior of rock at Greath Depth. (Maury, & Fourmaintraux, Eds.) Rock at Great Depth, pp. 11-17.
- Dusseault, M. B., Rothenburg, L., & Mraz, D. Z. (1987). The Design of Openings in Salt Rock Using a Multiple Mechanism Viscoplastic Law. 28th US Symposium on Rock Mechanics, (pp. 633-642). Tucson.
- Fairhurst, C., John, C. M., Midea, N. F., Estom, S. M., Fernandes, A. C., & Bongiovanni, L. A. (1979). Rock Mechanics Studies Of Proposed Underground Mining of Potash in Sergipe, Brazil. pp. 131-137.
- Falcão, J. L. (2009). Perfuração de formações salíferas. In: W. Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal Geologia e Tectônica Exemplos nas Bacias Brasileiras (pp. 386-405). São Paulo: Editora Beca.
- Fjaer, E., Holt, R. M., Horsrud, P., Raaen, A. M., & Risnes, R. (2008). Petroleum Related Rock Mechanics - 2nd edition. Amsterdam: Elsevier.
- Fleckenstein, W. W., Eustes, A. W., Rodriguez, W. J., Berger, A., & Sanchez, F. J. (2005). Cemented Casing: The True Stress Picture. AADE 2005 National Technical Conference and Exhibition. Houston: American Association of Drilling Engineers.
- Florencio, C. P. (2009). A mineração de evaporitos. In: W. Mohriak, P. Szatmari,
 & S. M. Couto Anjos, Sal Geologia e Tectônica Exemplos nas Bacias Brasileiras (pp. 406-415). São Paulo: Editora Beca.
- Fontoura, S. A., Holzberg, B. B., Teixeira, É. C., & Frydman, M. (2002). Probabilistic Analysis of Wellbore Stability During Drilling. SPE/ISRM Rock Mechanics Conference. Irving: Society of Petroleum Engineers Inc. (SPE).
- Fossum, A. F., & Fredrich, J. T. (2002). Salt Mechanics Primer for Near-Salt and Sub-Salt Deepwater Gulf of Mexico Field Developments. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Fossum, A. F., & Fredrich, J. T. (2007). Probabilistic analysis of borehole closure for through-salt well design. *Acta Geotechnica*, pp. 41-51.
- Fossum, A. F., & Munson, D. E. (1996). Probabilistic Creep Analysis of Underground Structures In Salt. *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 209-217.

- Fossum, A. F., Callahan, G. D., Van Sambeek, L. L., & Senseny, P. E. (1988). How should one-dimensional laboratory equations be cast into threedimensional form? (C. e. al., Ed.) *Key Questions in Rock Mechanics*, pp. 35-41.
- Fossum, A. F., Pfeifle, T. W., Mellegard, K. D., & Munson, D. E. (1994). Probability Distribuitions for Parameters of the Munson-Dawson Salt Creep Model. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Fossum, A. F., Senseny, P. E., & Thacker, B. H. (1991). Input uncertanties and calculated borehole closure. (Roegiers, Ed.) *Rock Mechanics as a Multidisciplinary Science*, pp. 987-994.
- Frayne, M. A., & Mraz, D. Z. (1991). Calibration of a Numerical Model for Different Potash Ores.
- Giambastiani, M. (2005). Comportamento dependente do tempo de rochas sulfáticas de anidrita e gipso. São Carlos: Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (USP).
- Gonçalves, G. d. (2011). Estudo Paramétrico da Influência da Temperatura na Análise Termomecânica Durante a Escavação em Rochas Salinas.
 Maceió: Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Alagoas (UFAL).
- Goodman, R. E. (1989). Introduction to Rock Mechanics Second Edition. New York: John Wiley & Sons.
- Grainger, P. A. (2012). Numerical Analysis Of The Mechanical Behavior Of Cement Sheaths In Wells Through Salt Formations. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio).
- Gravina, C. C. (1997). Simulação Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo. Campinas: Dissertação de Mestrado -Departamento de Engenharia de Petróleo - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- Günther, R.-M., Salzer, K., & Popp, T. (2010). Advanced Strain-Hardening Approach Constitutive model for rock salt describing transient, stationary, and accelerated creep and dilatancy. 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium. Salt Lake City: American Rock Mechanics Association (ARMA).

- Hambley, D. F., Dusseault, M. B., & Mraz, D. Z. (1988). Characterization of Saltrock Creep Behavior. (C. e. al., Ed.) Key Questions in Rock Mechanics, pp. 179-189.
- Hampel, A., Günther, R. M., Salzer, K., Minkley, W., Pudewills, A., Leuger, B., .
 . . Hunsche, U. (2010). Benchmarking of geomechanical constitutive models for rock salt. 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium. Salt Lake City: American Rock Mechanics Association (ARMA).
- Harr, M. E. (1977). *Mechanics of particulate media a probabilistic approach*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Harr, M. E. (1987). Reliability-Based Design In Civil Engineering. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Hill, R. (1971). *The mathematical theory of plasticity*. London: Oxford University Press.
- Hoek, E. (2006). Factor of safety and probability of failure. In: E. Hoek, *Practical Rock Engineering*. North Vancouver.
- Holzberg, B. B. (2001). Quantificação e tratamento de incertezas em análises de estabilidade de poços de petróleo. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado Departamento de Engenharia Civil Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio).
- Jeremic, M. L. (1994). *Rock Mechanics In Salt Mining*. Rotterdam: A.A. Balkema Publishers.
- Lee, M. Y., & Ehgartner, B. (2001). Laboratory Evaluation of Damage Criteria and Creep Parameters of Tioga Dolomite and Rock Salt from Cavern Well No. 1. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Lee, M. Y., Ehgartner, B. L., Park, B.-Y., & Bronowski, D. R. (2004). Laboratory Evaluation of Damage Criteria and Permeability of Big Hill Salt. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Liang, W., Yang, C., Zhao, Y., Dusseault, M. B., & Liu, J. (2006). Experimental investigation of mechanical properties of bedded salt rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, pp. 400-411.
- Lomenick, T. F., & Bradshaw, R. L. (1969). Deformation of Rock Salt in Openings Mined for the Disposal of Radioactive Wastes. *Rock Mechanics*, *1*, pp. 5-30.

- Machado, E. C., & Szatmari, P. (2009). A mina da Taquari-Vassouras. In: W.
 Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal Geologia e Tectônica -Exemplos nas Bacias Brasileiras (pp. 416-425). São Paulo: Editora Beca.
- Mackay, F. E. (2011). Análise Geomecânica na Perfuração e Cimentação de Poços de Petróleo em Zonas de Sal. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado Departamento de Engenharia Civil Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio).
- Mackay, F., Botelho, F. V., Inoue, N., & Fontoura, S. A. (2007). Análise do Comportamento de Evaporitos. 4° PDPETRO. Campinas: ABPG.
- Mackay, F., Inoue, N., Fontoura, S. A., & Botelho, F. (2008). Analyzing Geomechanical Effects While Drilling Sub Salt Well Through Numerical Modeling. 2008 Indian Oil and Gas Technical Conference and Exhibition. Mumbai: Society of Petroleum Engineers Inc. (SPE).
- Medeiros, F. A. (1999). Análise do Comportamento de Colunas de Revestimento Frente a Movimentação do Sal em Poços de Petróleo. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio).
- Mellegard, K. D., & Munson, D. E. (1997). Laboratory Creep and Mechanical Tests on Salt Data Report (1975-1996) - Waste Isolation Pilot Plant (WIPP) Thermal/Structural Interactions Program. Albuquerque: Sandia.
- Minkley, W., Menzel, W., Konietzky, H., & Kamp, L. t. (2001). A visco-elastoplastic softening model and its application for solving static and dynamic stability problems in potash mining.
- Mohriak, W., & Szatmari, P. (2009). Introdução às propriedades químicas e físicas dos evaporitos. In: W. Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal Geologia e Tectônica Exemplos nas Bacias Brasileiras (pp. 19-40).
 São Paulo: Editora Beca.
- Mohriak, W., Szatmari, P., & Couto Anjos, S. M. (2009). Sal Geologia e Tectônica - Exemplos nas Bacias Brasileiras. São Paulo: Editora Beca.
- Mraz, D. Z., Rothenburg, L., & Dusseault, M. B. (1991). Design of Mines in Salt and Potash. pp. 1837-1845.
- Munson, D. E. (1997). Constitutive Model of Creep in Rock Salt Applied to Underground Room Closure. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 34, pp. 233-247.

- Munson, D. E. (1998). Analysis of Multistage and Other Creep Data for Domal Salts. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Munson, D. E. (1999). Multimechanism Deformation Parameters of Domal Salts Using Transient Creep Analysis. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Munson, D. E. (2004). M-D Constitutive Model Parameters Defined for Gulf Coast Salt Domes and Structures. 6th North America Rock Mechanics Symposium (NARMS): Rock Mechanics Across Borders and Disciplines. Texas: American Rock Mechanics Association (ARMA).
- Munson, D. E., & Dawson, P. R. (1979). Constitutive Model for the Low Temperature Creep of Salt (With Application to WIPP). Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Munson, D. E., & Dawson, P. R. (1982). A Workhardening/Recovery Model of Transient Creep of Salt During Stress Loading and Unloading. *Issues in Rock Mechanics*, pp. 299-306.
- Munson, D. E., & DeVries, K. (1991). Development and Validation of a Predictive Technology for Creep Closure of Underground Rooms in Salt. pp. 127-134.
- Munson, D. E., & Wawersik, W. R. (1991). Constitutive Modeling of Salt Behavior - State of the Technology. pp. 1797-1810.
- Munson, D. E., Fossum, A. F., & Senseny, P. E. (1989). Approach to first principles model prediction of measured WIPP in situ room closure in salt. (Khair, Ed.) Rock Mechanics as a Guide for Efficient Utilization of Natural Resources, pp. 673-680.
- NESSUS. (2010). *NESSUS Theoretical Manual*. San Antonio: Southwest Research Institute (SwRI).
- Odqvist, F. K. (1974). *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture* (2nd ed.). Oxford: Clarendon Press.
- Orozco, S. O., Fontoura, S. A., & Inoue, N. (2013). Numerical 3D Stability Analysis of Wells Drilled. 47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium. San Francisco: American Rock Mechanics Association (ARMA).
- Pereira, F. L., Oliveira, M. F., & Roehl, D. M. (2012). Probabilistic analysis of a faulted hydrocarbon reservoir during CO2 injection. *46th US Rock*

Mechanics / Geomechanics Symposium. Chicago: American Rock Mechanics Association (ARMA).

- Pinto, C. L., & Cruz, E. R. (2003). Utilização de uma nova equação constitutiva para os evaporitos de Taquari-Vassouras. *Revista Escola de Minas*, pp. 103-107.
- Poiate Jr., E. (2012). Mecânica das Rochas e Mecânica Computacional para Projeto de Poços de Petróleo em Zonas de Sal. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio).
- Poiate Jr., E., Costa, A. M., & Falcão, J. L. (2006). Well Design for Drilling Through Thick Evaporite Layers in Santos Basin - Brazil. *IADC/SPE Drilling Conference*. Miami: IADC/SPE Drilling Conference.
- Rath, J. S., & Argüello, J. G. (2012). Revisiting Historic Numerical Analyses of the Waste Isolation Pilot Plant (WIPP) Room B and D in-situ Experiments. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Reinecker, J., Tingay, M., & Müller, B. (2003). Borehole breakout analysis from four-arm caliper logs. *World Stress Map Project*.
- Riha, D. S., Thacker, B. H., Millwater, H. R., Wu, Y.-T., & Enright, M. P. (2000). Probabilistic Engineering Analysis Using The Nessus Software. AIAA 2000.
- Rothenburg, L., Dusseault, M. B., & Mraz, D. Z. (2002). On the third-power creep law for salt in mine conditions. In: N. D. Cristescu, H. R. Hardy Jr., & R. O. Simionescu, *Basic and applied salt mechanics* (pp. 171-176). Lisse: A.A. Balkema Publishers.
- Rueda, J. A. (2013). Reativação de falhas geológicas com modelos numéricos discretos e distribuídos. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado Departamento de Engenharia Civil Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio).
- Santos, K. R., & Ramos Jr., A. S. (2012). Reliability Analysis of Vertical Wellbore Drilling in Salt Rocks. *International Journal od Modeling and Simulation for Petroleum Industry*, pp. 59-70.
- Senseny, P. E., Hansen, F. D., Russell, J. E., Carter, N. L., & Handin, J. W. (1992). Mechanical Behaviour of Rock Salt: Phenomenology and

Micromechanisms. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics, pp. 363-378.

- Silva, M. A., Schreiber, B. C., & Santos, C. L. (2000). Evaporitos Como Recursos Minerais. *Brazilian Journal of Geophysics*, 18, pp. 337-350.
- Stone, C. M. (1997). SANTOS A Two Dimensional Finite Element Program for the Quasistatic, Large Deformation, Inelastic Response of Solids. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Thacker, B. H., Riha, D. S., & Wu, Y.-T. (1996). *Probabilistic Structural Analysis* of *Deep Tunnels*. Alexandria: Defense Nuclear Agency.
- Wawersik, W. R., Hannum, D. W., & Lauson, H. S. (1980). Compression and Extension Data for Dome Salt from West Hackberry, Louisiana. Albuquerque: Sandia National Laboratories.
- Whitman, R. V. (1984). Evaluating Calculated Risk In Geotechnical Engineering. Journal of Geotechnical Engineering, pp. 145-188.
- Wilson, S. M., Fossum, A. F., & Fredrich, J. T. (2003). Assessment of Salt Loading on Well Casings. SPE Drilling & Completion, pp. 13-21.
- Wu, Y.-T. (1984). Efficient Methods For Mechanical And Structural Reliability Analysis And Design. Tese de Doutorado - University of Arizona.
- Wu, Y.-T., Millwater, H. R., & Cruse, T. A. (1990). Advanced Probabilistic Structural Analysis Method for Implicit Performance Functions. AIAA Journal, pp. 1663-1669.
- Yao, H.-T., Xuan, F.-Z., Wang, Z., & Tu, S.-T. (2007). A Review of Creep Analysis and Design Under Multi-axial Stress States. *Nuclear Engineering* and Design 237, pp. 1969-1986.

Apêndice

A. Estado multiaxial de tensões

Ensaios de laboratório normalmente simulam a condição uniaxial, sendo necessária uma generalização para que os parâmetros estimados a partir de ensaios uniaxiais sejam aplicáveis em modelos geomecânicos em estado multiaxial de tensões (Fossum *et al.*, 1988 e Yao *et al.*, 2007).

Apresenta-se a seguir a generalização para o estado multiaxial apresentada por Hill (1971) e Odqvist (1974), adotando-se as leis de fluxo de Prandtl-Reuss e de Lévy-Mises

A primeira premissa para a generalização é atribuida a Saint-Venant (após 1870 *apud* Hill, 1971). Ele propõe que os eixos principais dos incrementos deformação e os eixos das tensões principais são coincidentes. Portanto, nesta pesquisa é assumido que as análises sempre se dão nos planos principais.

A lei de Prandtl-Reuss é destinada a materiais isotrópicos em regime elastoplástico com endurecimento também isotrópico. Ela enuncia que mesmo ao transpor o regime elástico, o material permanece se deformando elasticamente $(\dot{\epsilon}_{ij}^{el})$ e essa taxa de deformação é acrescida da taxa de deformação plástica $(\dot{\epsilon}_{ij}^{pl})$ subsequente, conforme mostrado (A.1):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{el} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \tag{A.1}$$

Entendendo-se, para fins de análise numérica, a fluência como deformação análogamente plástica, tem-se que (A.2):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{el} + \dot{\varepsilon}_{ij}^f \tag{A.2}$$

onde $\dot{\varepsilon}_{ij}^{f}$ é a taxa de fluência, tal que (A.3):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{f} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{I}}{\partial t} \tag{A.3}$$

onde ε_{ii}^{f} é a deformação por fluência e t é o tempo.

A relação constitutiva da fluência será a relação entre a taxa de fluência e o estado tensão a ele associado, ou seja, entre invariantes $(\dot{\varepsilon}_{ij}^f \leftrightarrow \sigma_{ij})$.

Considerando-se pequenas deformações (e taxas), segue que a deformação volumétrica e sua taxa $(\dot{\varepsilon}_{vol}^{f})$ são nulas, configurando um processo isocórico conforme a equação (A.4).

$$\dot{\varepsilon}_{vol}^{f} = \dot{\varepsilon}_{11}^{f} + \dot{\varepsilon}_{22}^{f} + \dot{\varepsilon}_{33}^{f} = 0 \tag{A.4}$$

Comumente, entende-se que a parcela hidrostática das tensões (p) não influencia a taxa de fluência, podendo ser adicionada ou retirada, conforme o desenvolvimento numérico. Embora questionável do ponto de vista geotécnico, essa hipótese será mantida, conforme (A.5).

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \tag{A.5}$$

onde σ'_{ij} é o invariante de tensões efetivas.

No plano das tensões principais, fazendo i = j = k nos índices do delta de Kronecker (δ_{ij}), tem-se $\delta_{kk} = 3$, e segue que (A.6):

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} \tag{A.6}$$

ou (A.7):

$$s'_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma'_{kk}}{3} \tag{A.7}$$

Substituindo (A.5) em (A.7), tem-se que (A.8):

$$s'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma'_{kk}}{3}$$
(A.8)

onde s_{ij} e s'_{ij} correspondem ao invariante de tensões desviadoras.

Excluindo a contribuição da parcela hidrostática, chega-se a (A.9):

$$s'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} = s_{ij} \tag{A.9}$$

Fazendo i = j = k, no plano das tensões principais, tem-se (A.10):

$$s'_{kk} = \sigma_{kk} - \sigma_{kk} = s_{kk} = 0 \tag{A.10}$$

A seguir, será empregada a lei de fluxo de Lévy-Mises, naturalmente pressupondo o critério de escoamento (plastificação) de von Mises, para regime elasto-plástico com endurecimento isotrópico.

Seja \dot{W} a taxa de dissipação plástica de von Mises (A.11):

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^f_{ij} \tag{A.11}$$

Substitutindo (A.6) em (A.11), obtêm-se (A.12):

$$\dot{W} = \left(s_{ij} + \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}^f \tag{A.12}$$

Como $\dot{\varepsilon}_{kk}$ associado a σ_{kk} é nulo, segue que (A.13):

$$\dot{W} = s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^f \tag{A.13}$$

Considerando-se a fase secundária da fluência, a taxa de deformação por esse fenômeno é nula, logo, essa variável não será sensível a dissipação plástica. Consequentemente (A.14):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^f = \frac{\partial \dot{W}}{\partial s_{ij}} \tag{A.14}$$

O critério de escoamento de von Mises é dependente de uma função escalar da tensão equivalente multiaxial (σ_{eq}), que provêm do tensor de tensões desviadoras. Hill (*apud* Odqvist, 1974) sugere uma relação quadrática entre a tensão equivalente e o invariante de tensões desviadoras, para materiais isotrópicos.

O segundo invariante das tensões desviadoras (J_{2D}) é dado por (A.15):

$$J_{2D} = \frac{s_{ij}s_{ij}}{2} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$
(A.15)

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões totais principais.

No caso uniaxial, considerando $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, tem-se que (A.16):

$$J_{2D} = \frac{1}{3}\sigma_1^2$$
 (A.16)

Assumindo a relação quadrática y entre o segundo invariante das tensões desviadoras e a tensão equivalente (σ_{eq}), tem-se que (A.17):

$$\sigma_{eq}^2 = y J_{2D} = \frac{y}{3} \sigma_1^2 \tag{A.17}$$

Consequentemente, verifica-se que essa relação é y, e somente representa o estado uniaxial se for igual a 3. Logo (A.18):

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_{2D}} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \tag{A.18}$$

Resolvendo a equação da dissipação plástica de von Mises, tem-se (A.19):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{f} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \sigma_{eq}} \times \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_{ij}}$$
(A.19)

Substituindo (A.18) na derivada parcial de (A.19), tem-se que (A.20):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{f} = \frac{d\dot{W}}{d\sigma_{eq}} \times \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{3}{2}}s_{ij}s_{ij}\right)}{\partial s_{ij}} = \frac{d\dot{W}}{d\sigma_{eq}} \times \frac{1}{2} \times \frac{3s_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2}}s_{ij}s_{ij}} = \frac{d\dot{W}}{d\sigma_{eq}} \times \frac{1}{2} \times \frac{3s_{ij}}{\sigma_{eq}} \quad (A.20)$$

Chegando-se a (A.21):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{f} = \frac{3}{2} \frac{d\dot{W}}{d\sigma_{eq}} \times \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}}$$
(A.21)

Pela premissa de coaxialidade entre incrementos de deformação e tensões, ambos principais, tem-se que (A.22):

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \sigma_{eq}} \tag{A.22}$$

Finalmente, as deformações por fluência no estado multiaxial de tensões representado pela tensão equivalente (σ_{eq}) serão dadas por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^f = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}} s_{ij} \tag{A.23}$$

Para a maioria dos metais, a generalização pelo critério de von Mises produz melhores ajustes aos dados experimentais, já para sais, autores americanos sugerem a utilização da tensão de Tresca. A despeito disso, adotar-se-á a tensão equivalente de von Mises, mantendo-se a coerência da generalização para o estado multiaxial.

Conforme deduzido na equação (A.18), a tensão equivalente de von Mises $(\sigma_{eq,Mises})$ é função do segundo invariante de tensões desviadoras, conforme segue (A.24):

$$\sigma_{eq,Mises} = \sqrt{3J_{2D}} \tag{A.24}$$

Expandindo a expressão, tem-se (A.25):

$$\sigma_{eq,Mises} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_x - \sigma_y \right)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z \right)^2 \right] + 3 \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \right)}$$
(A.25)

onde σ_x , σ_y e σ_z são tensões normais e τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} são tensões cisalhantes em um plano qualquer. No plano das tensões principais, as componentes cisalhantes são nulas, de modo que (A.26):

$$\sigma_{eq,Mises} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}$$
(A.26)

Para um problema geomecânico representável por um estado plano de deformações, a tensão equivalente de von Mises será dada por (A.27):

$$\sigma_{eq,Mises} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}$$
(A.27)

Já para problemas axissimétricos, segue que $\sigma_2 = \sigma_3$, então (A.28):

$$\sigma_{eq,Mises} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$
(A.28)

Portanto, nesse caso, a tensão equivalente de von Mises será dada pela maior diferença entre tensões principais, assim como a tensão equivalente de Tresca ($\sigma_{eq,Tresca}$), conforme mostra a expressão (A.29):

$$\sigma_{eq,Mises} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2} = |\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_{eq,Tresca}$$
(A.29)

Uma vez apresentadas as expressões do estado de tensões e de deformações para os modelos geomecânicos, deve-se concluir que em problemas axissimétricos, não são esperadas divergências nos resultados atribuíveis à generalização para o estado multiaxial. Já em problemas planos, são esperados valores menores de fluência pela generalização de von Mises, uma vez que essa considera o efeito da tensão intermediária, ao contrário da tensão de Tresca, que é a diferença entre as tensões principais maior e menor.

B. Solução elástica para tensões ao redor da perfuração

Em perfurações em maciços rochosos, o estado de tensões ao redor do furo é estimado a partir da solução de Kirsch (1898) *apud* Goodman (1989) – uma solução particular da teoria da elasticidade para uma placa perfurada, de espessura infinita (Figura B.).



Figura B.1 – Esquematização da solução de Kirsch, 1898 (Goodman, 1989).

O uso dessa solução requer uma série de premissas que eventualmente não são verificadas na pratica geotécnica, entretanto, a perda de representatividade em alguns aspectos é contrabalançada pela praticidade da solução para uma estimativa da distribuição de tensões – assume-se que a placa (representando o maciço) é homogênea, isotrópica, contínua e linearmente elástica.

Na geomecânica de poços, assume-se que imediatamente após a perfuração e a aplicação do fluido de perfuração, o maciço responde ao desconfinamento com deformações elásticas. Dessa forma, é possível determinar e validar o intervalo de tensões atuantes nas paredes do poço e no material circundante.

Segundo Kirsch *apud* Fjaer *et al.* (2008), no plano das tensões principais, as tensões radiais (σ_r) ao redor do poço preenchido com fluido de perfuração serão dadas por (B.1):

$$\sigma_r = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta + P_{Fluido} \frac{a^2}{r^2}$$
(B.1)

As tensões tangenciais (σ_{θ}) ao redor do poço serão dadas por (B.2):

$$\sigma_{\theta} = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - P_{Fluido} \frac{a^2}{r^2}$$
(B.2)

onde *a* é o raio do poço, *r* é a coordenada radial considerada, p_1 e p_2 são as tensões horizontais e P_{Fluido} é a pressão do fluido de perfuração.

Assumindo a isotropia de tensões horizontais $(p_1 = p_2 = p)$, tem-se:

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + P_{Fluido}\frac{a^2}{r^2} \tag{B.3}$$

e

$$\sigma_{\theta} = p \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) p - P_{Fluido} \frac{a^2}{r^2}$$
(B.4)

Portanto, as equações (B.3) e (B.4) darão a distribuição das tensões ao longo do maciço perfurado, permitindo verificar a solução numérica para o novo estado de tensões, após a perfuração. Esse procedimento é importante uma vez que nessa fase ocorre o maior desequilíbrio de tensões do problema. Após essa etapa, a tendência é que esse diferencial seja gradativamente aliviado pela deformação por fluência.

C. Métodos probabilísticos

C.1. Métodos de integração probabilística rápida (FPI)

Os métodos de integração probabilística rápida (Fast Probability Integration – FPI) têm como objetivo fornecer soluções aproximadas para a função de desempenho de um determinado problema de engenharia estudado que sejam comparáveis à solução pelo Método de Monte Carlo, considerado um método preciso, porém proibitivo para análises com modelos complexos, haja vista o grande número de experimentos necessários.

Como função de desempenho, entende-se uma função matemática que descreve uma determinada grandeza analisada. É também denominada como função de avaliação, função de falha, função de estado limite ou função de *performance*. Em engenharia civil, usualmente se refere a tensões, deformações, deslocamentos ou quaisquer outras grandezas que possam ser representadas por uma função matemática.

Apresentar-se-á a seguir a metodologia matemática e probabilística dos métodos de integração probabilística rápida e de confiabilidade empregados nesta pesquisa, a partir de Wu (1984), Wu *et al.* (1990) e NESSUS (2010).

Seja Z(X) uma função de desempenho, ou um evento estudado, expresso em função de *n* variáveis aleatórias X (C.1):

$$Z(X) = Z(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots X_n)$$
(C.1)

Seja g(X) uma função que representa um estado limite, usualmente ruptura, colapso ou qualquer evento passível de representação numérica e z_0 um valor particular de Z(X), obtido pela solução experimental ou numérica do problema probabilístico em um determinado ponto, de modo que (C.2):

$$g(X) = Z(X) - z_0 \tag{C.2}$$

Portanto, é possível separar dois domínios (onde ocorre e onde não ocorre o evento estudado) e uma fronteira entre eles, que é o estado limite, definido por (C.3):

$$g(X) = Z(X) - z_0 = 0$$
(C.3)

Assumindo que o evento indesejado (usualmente a falha, ruptura, colapso ou congêneres) ocorra para $z_0 \ge Z(X)$, deseja-se estimar a probabilidade de ocorrência do desse (p_f) , de modo que (C.4):

$$p_f = P[g(X) \le 0] \tag{C.4}$$

A probabilidade de ocorrência do evento indesejado será dada pelo cômputo de todas as soluções de z_0 ao longo do domínio do estado limite (Ω), ou seja, será a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias ($f_X(X)$) dada por (C.5):

$$p_f = \int_{\Omega} \dots \int f_X(X) dX \tag{C.5}$$

Teoricamente, essa integral poderia ser resolvida pelo Método de Monte Carlo, segundo a metodologia que segue (Dai *et al.*, 1993):

- Geração de números aleatórios entre 0 e 1, que sejam variáveis aleatórias independentes sob distribuição normal;
- Transformação de tipo de distribuição para aquele que for aplicável ao parâmetro em questão (caso não seja distribuição normal);
- Cálculo dos parâmetros a partir dos números aleatórios gerados;
- Cálculo dos fatores de segurança, ou do indicador do evento estudado a partir dos parâmetros calculados;
- Repetição dos passos citados acima várias vezes (milhares, tipicamente em geotecnia), conforme a variabilidade dos parâmetros inseridos e obtidos e a precisão de resultados desejada;
- Criação de uma distribuição acumulada a partir dos dados nas simulações.
 Algebricamente, tem-se (C.6):

$$p_f = \frac{N_f}{N} \tag{C.6}$$

onde N é o número total de análises ou experimentos e N_f é o número experimentos que foi verificada a ocorrência do evento indesejado.

Entretanto, na maior parte dos problemas de engenharia, modelos geomecânicos complexos são utilizados e essa metodologia para integração de $f_X(X)$ torna-se impraticável. Portanto, são necessários métodos numéricos que aproximem a solução de modo computacionalmente viável – os métodos de integração probabilística rápida.

Diversos desses métodos estão baseados na estimativa de um ponto mais provável de ocorrência do evento indesejável (*Most Probable Point – MPP*). Basicamente, a metodologia pode sistematizada conforme segue:

- Estimativa de g(X) a partir de métodos de perturbação ou por diferenças finitas, gerando uma g(X) quadrática;
- Transformação das variáveis aleatórias originais em variáveis independentes e normalmente distribuídas, com base em um sistema de coordenadas independente e normalizado u – processo conhecido como Transformação de Rosenblatt (1952);

- Cálculo da mínima distância β da origem da função densidade de probabilidade acumulada à superfície do estado limite (g(X) ≤ 0). A interseção de β com a superfície do estado limite é o ponto mais provável de ocorrência do evento indesejável (MPP, simbolizado por u*);
- Aproximação de g(u) no ponto u* ou g(X) em X*, por meio de funções polinomiais;
- Calculo de p_f por soluções analíticas. No caso de g(u) quadrática, a precisão de p_f dependerá da qualidade na aproximação de g(u) exata. Já para g(u) linear, o erro na estimativa de p_f será proveniente das distribuições normais equivalentes.

A metodologia descrita apresenta limitações, como no caso de variáveis aleatórias dependentes e na invariância da distância β , também conhecida como índice de segurança, com a formulação de estado limite adotada. Três algoritmos de *FPI* devem ser destacados por sucessivas evoluções:

- Hasofer-Lind (*HL*) Advento do índice de segurança generalizado, como tentativa de atenuar a questão da invariância do índice de segurança com a formulação de estado limite, mas ainda restrito ao emprego da distribuição normal nas variáveis aleatórias (Hasofer & Lind, 1974 *apud* Wu, 1984);
- Rackwitz-Fiessler (*RF*) Evolução do algoritmo *HL*, possibilitando o emprego de distribuições não normais nas variáveis aleatórias através da aproximação dessas por distribuições normais equivalentes, que resultem em resultados iguais no ponto mais provável (Rackwitz & Fiessler, 1978 *apud* Wu, 1984);
- Chen & Lind (*CL*) Aperfeiçoamento da distribuição normal equivalente do algoritmo *RF* com o advento de um fator de escala, como o terceiro parâmetro da referida distribuição, além da média e desvio padrão (Chen & Lind, 1982 *apud* Wu, 1984).

Esses algoritmos serviram de embasamento para métodos de confiabilidade usualmente empregados em engenharia, com os métodos de valor médio, a serem descritos a seguir.

C.2. Métodos do Valor Médio

Os métodos de Valor Médio são métodos de primeira ordem e segundo momento estatístico, ou seja, métodos que somente consideram a função de desempenho com termos até o primeiro grau e fornecem a média e o desvio padrão da função densidade de probabilidade conjunta da função de estado limite.

Segundo Wu (1984), métodos de primeira ordem possibilitam ganhos consideráveis em tempo computacional, uma vez que neles o estado limite do evento indesejável é considerado linear no ponto de projeto.

Para tal, seja Z(X) uma função suave³⁰ e representável por uma expansão da Série de Taylor nas médias das variáveis aleatórias, necessariamente independentes, conforme segue (C.7):

$$Z(X) = Z(\mu) + \frac{1}{1!} \frac{\partial Z}{\partial X} (X - \mu) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} (X - \mu)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n Z}{\partial X^n} (X - \mu)^n$$
(C.7)

onde *X* e μ representam nominalmente todas as variáveis aleatórias *X_i* e suas respectivas médias μ_i . Reorganizando a expansão, de modo evidenciar somente os termos constates e de primeira ordem, bem como a contribuição de cada variável aleatória, tem-se que (C.8):

$$Z(X) = Z(\mu) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial X_i} \right) (X_i - \mu_i) \right] + H(X)$$
(C.8)

onde H(X) representa o somatório dos termos de ordem acima da primeira. A equação (C.8) pode ser expressa como (C.9):

$$Z(X) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i + H(X)$$
(C.9)

onde a_0 será a solução particular de Z obtida quando todas as variáveis aleatórias são assumidas com seus valores médios, usualmente representando a solução determinística do problema. a_i é o coeficientes da variável aleatória *i*, de acordo com o valor assumido para a solução de Z.

O modo de lidar com a parcela H(X) varia de acordo com o método de valor médio empregado, a partir de sucessivos aperfeiçoamentos conforme será descrito a seguir.

³⁰ Entende-se por função suave aquela que possui derivadas de todas as ordens.

C.2.1. Método do Valor Médio (Mean Value – MV)

A primeira e mais imediata possibilidade é manter somente o termo constante e o de primeira ordem da expansão, desprezando H(X). Assim sendo, têm-se a aproximação obtida pelo Método do Valor Médio (C.10):

$$Z(X) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i = Z_{MV}(X)$$
(C.10)

onde $Z_{MV}(X)$ é a variável aleatória que representa a soma dos termos de primeira ordem da expansão. Os coeficientes são determinados pelas primeiras derivadas (termos de primeira ordem da expansão), a partir de perturbações nas médias das variáveis aleatórias, sendo necessárias n + 1 análises para tal, onde n é o número de variáveis aleatórias.

Os dois momentos estatísticos da resposta serão dados por (C.11) e (C.12):

$$\mu_Z = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \tag{C.11}$$

e

$$\sigma_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2} \tag{C.12}$$

Uma vez que os termos de ordem superior foram desprezados, observa-se que a solução será linear e explicita, não sendo suficientemente precisa para funções não lineares, como é o caso de análises de fluência ou diretamente dependentes dela. Portanto, são necessárias correções que compensem o erro inerente ao descarte dos termos de ordem superior.

C.2.2. Método do Valor Médio Avançado (Advanced *Mean Value* – *AMV*)

O Método do Valor Médio Avançado (*Advanced Mean Value – AMV*) é um aprimoramento do método *MV*. O erro devido ao truncamento da expansão da série de Taylor após os termos de primeira ordem no método *MV* é compensando pelo acréscimo de um termo à função de desempenho, conforme segue (C.13):

$$Z_{AMV}(X) = Z_{MV}(X) + H(Z_{MV})$$
 (C.13)

onde $H(Z_{MV})$ é dado por (C.14):

$$H(Z_{MV}) = Z_{MV} - Z_{MPP} \tag{C.14}$$

A função $H(Z_{MV})$ introduz o termo Z_{MPP} , que é o valor particular de Z calculado no local do ponto mais provável³¹ (*MPPL*), com intuito de minimizar o erro devido ao truncamento. Com isso, a estimativa da distribuição acumulada da resposta, embora ainda não exata, torna-se mais precisa.

Cita-se a metodologia do método AMV, a partir de Wu et al. (1990) e NESSUS (2010):

- Obtenção da primeira estimativa de Z(X), a partir de perturbações nos valores das médias das variáveis aleatórias e da eliminação dos termos de secunda ordem em diante da expansão da série de Taylor – ou seja, o resultado obtido pelo método MV;
- Estimativa do local dos pontos mais prováveis (*MPPL*) a partir da solução obtida com os termos de primeira ordem, para níveis de probabilidade prescritos, conforme a discretização ou precisão desejada pelo usuário;
- Cálculo de $Z(X^*)$ nos níveis de probabilidade prescritos, aperfeiçoando a estimativa da distribuição acumulada da resposta.

Com isso, serão necessárias n + 1 + m análises para obtenção da superfície de resposta, onde m é o numero de níveis de probabilidade prescritos para a discretização da mesma.

Segundo os autores citados, a precisão da estimativa da resposta pelo método AMV é sujeita a qualidade da estimativa do ponto mais provável. Entretanto, esse método costuma produzir boas estimativas de superfície de resposta para muitos problemas de engenharia, uma vez que a correção dos pontos da função Z(X) em virtude do truncamento após os termos de primeira ordem da expansão geralmente é próxima dos valores exatos dos pontos mais prováveis (Fossum & Fredrich, 2007).

³¹ Segundo NESSUS (2010), o local do ponto mais provável (*MPPL*) é definido pela interseção da ligação entre todos os pontos mais prováveis (*MPP*) para diversas soluções particulares de Z(X).

C.2.3. Método do Valor Médio Avançado Generalizado (*Generalized* Advanced Mean Value – AMV+)

Dando prosseguimento ao aumento na precisão da estimativa da superfície de resposta, o Método do Valor Médio Avançado Generalizado representa um aperfeiçoamento do método *AMV*.

O resultado do método *AMV* pode ser verificado e eventualmente aprimorado a partir de algoritmos iterativos, um destinado à estimativa da resposta a partir do nível de probabilidade prescrito, outro à estimativa do nível de probabilidade a partir da resposta prescrita. Nesta pesquisa, adotou-se o primeiro deles.

A formulação do método AMV+ é dada por (NESSUS, 2010) (C.15):

$$Z_{AMV+}(X) = Z(X^*) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial X_i} \right) \Big|_{X^*} \left(X_i - X_i^* \right) \right]$$
(C.15)

A equação (C.15) pode ser expressa como (C.16):

$$Z_{AMV+}(X) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$$
(C.16)

onde b_0 é a solução particular de Z nos pontos mais prováveis já convergidos e os b_i é o coeficiente de cada variável aleatória *i*, de acordo com o valor assumido para a solução de Z.

A principal contribuição desse método é o fato de que o local do ponto mais provável (*MPPL*), anteriormente estimada a partir dos resultados de primeira ordem, agora é determinado aproximando-se do valor exato do *MPP*.

A metodologia é citada a seguir, a partir de Wu et al. (1990):

- Obtenção da primeira estimativa de Z(X), a partir dos termos de primeira ordem – resultado obtido pelo método MV;
- Obtenção da segunda estimativa de Z(X), a partir dos locais dos pontos mais prováveis (MPPL) resultado obtido pelo método AMV;
- Avaliação da resposta com base em um erro definido como aceitável;
- Obtenção de novas soluções particulares de Z(X) ao redor do ponto mais provável do evento indesejável (MPP), procurando aproximar-

se do valor exato desse, até que os resultados convirjam para um valor com erro inferior ao definido.

A solução pelo método *AMV*+ representa a forma mais precisa de resposta possível de ser obtida pelos métodos de Valor Médio, além de ser uma verificação de precisão da solução obtida pelo método *AMV*.

Nos exemplos para validação do programa NESSUS[®] apresentados por Wu et al. (1990), muitas vezes os erros verificados com os métodos AMV foram ainda inferiores aos erros atribuíveis à modelagem por elementos finitos. Nas palavras dos referidos autores, o "método AMV generalizado [AMV+] parece ser ideal para a resolução de problemas envolvendo funções de desempenho implícitas e/ou complexas".