

Referências Bibliográficas

- [1] Banerjee, P.K.; Butterfield, R.; 1981; *Boundary Element Methods in Engineering Science.*, McGraw-Hill: London.
- [2] Brebbia, C.A.; 1978, *The Boundary element method for engineers.*, Pentech Press, Londres.
- [3] Brebbia, C.A.; Telles, J.F.C.; Wrobel, L.C.; 1984, *Boundary element techniques.*, Springer-Verlag, Berlin and New York.
- [4] Burgos, R.B.; 2009; *Análise de Estruturas Utilizando Wavelets de Daubechies e Interpolets de Deslauriers-Dubuc.*, Tese de Doutorado - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontificia Univerdade Catolica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 185 f.
- [5] Chaves, R.A.P.; 1999; *Estudo do método híbrido dos elementos de contorno e proposta de uma formulação simplificada.*, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontificia Univerdade Catolica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 169 f.
- [6] Chaves, R.A.P.; 2003, *The simplified hybrid boundary element method applied to time-dependent problems.*, (in Portuguese), Ph.D. thesis, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.
- [7] Dumont, N.A.; 1987; *The hybrid boundary element method.*, In: C. Brebbia, W. Wendland, G. Kuhn (Eds.), *Boundary Elements IX: Mathematical and computational aspects*, number 3 in *computational Mechanics Publication*, Springer-Verlag, pp. 125-138.
- [8] Dumont, N.A.; 1989 *The hybrid boundary element method: an alliance between mechanical consistency and simplicity*, *Applied Mechanics Reviews*, 42(11), Part 2, pp. S54-S63.
- [9] Dumont, N.A.; 1998, *An assessment of the spectral properties of the matrix G used in the boundary element methods.*, *Computational Mechanics* 22, pp. 32-41.

- [10] Dumont, N.A.; 2003, *Variationally-based, hybrid boundary element methods.*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences (CA-MES) 10, pp. 407-430.
- [11] Dumont, N.A.; 2003; *Variationally-based, hybrid boundary element methods.*, In: E.A.W. Maunder, A.A. Javadi (Eds.), Proceedings 3er International Conference Trefftz Methods, Developments and Applications in Computational Mechanics (EuroConference ECONF CM4, IACM Special Interest Conference), Exeter, England, pp. 25 on CD.
- [12] Dumont, N.A.; 2010, *From the collocation boundary element methods to a meshless formulation.*, in: E.N. Dvorkin, M.B. Goldschmit, M.A. Storti(Eds), *Mécanica Computacional, MECOM 2010 - IX Argentinean congress on Computational Mechanics and II South American congress on Computational Mechanics, XXXI CILAMCE Iberian Latin-American Congress of Computational Methods in Engineering*, Buenos Aires, Argentina. pp. 4635-4659.
- [13] Dumont, N.A.; 2010; *The boundary element method revisited.*, In: BEM - MRM 32 - Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXII, 2010, Inglaterra. WIT Transactions on Modelling and Simulation. Southampton, Inglaterra: WIT Press. v.50. pp. 227-238.
- [14] Dumont, N.A.; 2010; *On the spectral properties of the double layer potential matrix H of the boundary element methods.* In 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM XI, page 6pp. Foz de Iguaçu, Brazil.
- [15] Dumont, N.A.; 2013; *The hybrid boundary element method - fundamentals.*(to be submitted). *Engineering Analysis with Boundary Elements.*
- [16] Dumont, N.A.; 2013, *Toward a meshless formulation of the simplified hybrid boundary element method.*, (to be submitted).
- [17] Dumont, N.A.; Chaves, R.A.P.; 2003, *General time-dependent analysis with the frequency-domain hybrid boundary element method.*, Computer assisted Mechanics and Engineering Sciences, pp. 431-452.
- [18] Dumont, N.A.; Aguilar, C.A.; 2011, *The best of two worlds: The expedite boundary element method.*,in: Y.Y.-B.L.J. Leu, C.S.D. Chen (Eds.), *Extended Abstracts of ISCMIII/CSEII-3rd International Symposium on Computational Mechanics, 2nd Symposium on Computational Structural Engineering*, Taipei, Taiwan, pp. 46-47.

- [19] Dumont, N.A.; Aguilar, C.A.; 2011, *The expedite boundary element method.*, in: C.A. Brebbia, V. Popov (Eds.), *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXII*, WITPress, Southampton, pp. 179-190.
- [20] Dumont, N.A.; Aguilar, C.A.; 2011, *Expedite implementation of the boundary element method.*, in: E.L. Albuquerque, M.H. Aliabadi (Eds), *Advances in Boundary Element Techniques XII*, EC, Ltd, UK, pp. 162-179.
- [21] Dumont, N.A.; Aguilar, C.A.; 2011, *Expedite implementation of the boundary element method for elasticity problems.*, in: *Proceed-ings CILAMCE - XXXII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Ouro Preto, Brazil, p.16 (on CD).
- [22] Dumont, N.A.; Aguilar, C.A.; 2011, *Three-dimensional implementation of the expedite boundary element method.*, in: *Extended Abstract of the IABEM2011, Symposium of the International Association for Boundary Element Methods*, Brescia, Italy, pp. 113-118.
- [23] Dumont, N.A.; Aguilar, C.A.; 2012, *The best of two worlds: The expedite boundary element method.* *Engineering Structures*, v.43, p.235-244.
- [24] Hellinger, E.; 1914; *Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Continua.*, *Enz. Math. Wis.*; 4, 602-694.
- [25] Liu, Y.; 2009; *Fast Multipole Boundary Element Method, Theory and applications in Engineering.*, Cambridge.
- [26] Oliveira, M.F.F.; 2004, *Conventional, hybrid and simplified boundary element methods.*, (in Portuguese), Master's thesis, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.
- [27] Oliveira, M.F.F.; Dumont, N.A.; 2009, *Conceptual completion of the simplified hybrid boundary element method.*, in: E.J. Sapountzakis, M.H. Aliabadi (Eds.), *Beteq 2009 - International Conference on Boundary Element Techniques*, Athens, Greece, pp. 49-54.
- [28] Pian, T.H.H.; Tong, P.; 1969; *Basis of Finite Element Methods for Solid Continua.*, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 1, pp. 3-28.
- [29] Pian, T.H.H.; 1983; *Reflections and remarks on hybrid and mixed finite element method.*, In: S.N. Atluri, R.H. Gallagher, O.C. Zienkiewicz; (eds) *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*. Wiley, New York, NY. pp. 565-570.

- [30] Reissner, E.; 1950; *On a variational theorem in elasticity.*, In. J. Math. Phys., 29, pp. 90-95.
- [31] Saad, Y.; 1981; *Krylov subspace methods for solving large unymmetric linear systems.* Math Comput. 37, pp. 203-228.
- [32] Saad, Y.; Schultz, M.H.; 1986; *GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems.* Siam J. Sci. Stat. Comput.; pp. 856-869.

A Potencial de Hellinger-Reissner

A expressão da energia potencial total de um corpo elástico sujeito a pequenos deslocamentos é dada por

$$\Pi = \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij})d\Omega - \int_{\Omega} b_j u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (\text{A-1})$$

a menos de uma constante. Neste funcional, o primeiro termo corresponde à energia total interna de deformação, onde

$$U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{A-2})$$

e os outros termos referem-se ao potencial das forças externas b_i e t_i que atuam no corpo. Este potencial foi estabelecido sob as condições restritivas de compatibilidade geométrica dadas pelas equações (2-5) e (2-6).

Pode-se, no entanto, formular um potencial de forma independente destas restrições, de forma que estas não sejam atendidas previamente. Isto pode ser proporcionado através do acréscimo, no funcional, destas condições de restrição por intermédio de multiplicadores de Lagrange. O novo funcional resulta, então, como uma forma generalizada da energia potencial total:

$$\begin{aligned} \Pi_g = \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij})d\Omega - \int_{\Omega} b_j u_i d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right] \lambda_{ij} d\Omega - \\ \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{u}_i - u_i) \lambda_i d\Gamma \quad (\text{A-3}) \end{aligned}$$

onde λ_{ij} e λ_i são os multiplicadores de Lagrange. Os novos termos que surgem nesta equação compensam a eliminação feita previamente das condições restritivas.

Este novo potencial é função das variáveis ε_{ij} , u_i , λ_{ij} e λ_i , completamente independentes entre si, a princípio, sem qualquer relação com as forças prescritas b_i e t_i , e com os deslocamentos prescritos \bar{u}_i .

Pode-se nos multiplicadores de Lagrange um sentido mecânico: a variável λ_{ij} corresponde às tensões no domínio, enquanto λ_i refere-se a forças no contorno. Além disto, observa-se que a imposição de estacionariedade do

potencial da equação (A-3) estabelece que as variáveis presentes devem ser relacionadas entre si através das equações (2-1) a (2-6) e (2-10).

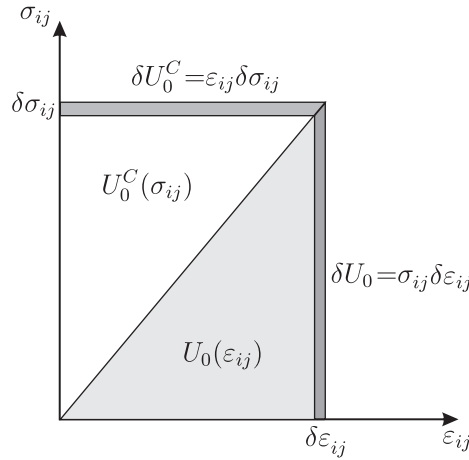


Figura A.1: Gráfico da energia interna de deformação.

A expressão Π_g na equação (A-3) é, para finalidades práticas, excessivamente geral. Pode-se supor que o tensor das tensões seja simétrico, como na equação (2-4), que as condições de contorno em termos de deslocamentos estejam previamente satisfeitas, como na equação (2-6), e que a densidade de energia interna seja expressa em termos de tensões, isto é, define-se

$$U_0^C(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - U_0(\epsilon_{ij}) \quad (\text{A-4})$$

Para materiais linearmente elásticos, os valores dos termos $U_0^C(\sigma_{ij})$ e $U_0(\epsilon_{ij})$ são iguais. A diferença existente consiste na forma como estas duas parcelas são descritas, conforme representado na figura 2.2.

Além disso, a partir da consideração da simetria de σ_{ij} , pode-se escrever um dos integrandos da equação (A-3) na forma

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \int_{\Omega} u_{i,j}\sigma_{ij}d\Omega \quad (\text{A-5})$$

que, após a aplicação do teorema de Green e posterior integração por partes, pode ser reescrito como

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \int_{\Gamma} u_i\sigma_{ij}\eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_i\sigma_{ij,j}d\Omega \quad (\text{A-6})$$

Com isto, recai-se, a partir da equação (A-3), no potencial de Hellinger-Reissner:

$$-\Pi_R(\sigma_{ij}^s, u_i^d) = \int_{\Omega} [U_0^C(\sigma_{ij}^s) + (\sigma_{ij,j}^s + b_i)u_i^d]d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^s\eta_j u_i^d d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i u_i^d d\Gamma \quad (\text{A-7})$$

que depende unicamente dos deslocamentos u_i e das tensões σ_{ij} , independentes entre si.

B

Matriz \mathbf{L}_{bl}

Matrizes \mathbf{L}_{bl} previamente calculadas para elementos em duas e três dimensões.

Matrizes \mathbf{L}_{bl} para elementos 2D

Elemento linear:

$$\mathbf{L}_{bl} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-1})$$

Elemento quadrático:

$$\mathbf{L}_{bl} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 4 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

Elemento cúbico:

$$\mathbf{L}_{bl} = \frac{1}{840} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix} \quad (\text{B-3})$$

Matrizes \mathbf{L}_{bl} para elementos 3D

Elemento triangular linear **T3**:

$$\mathbf{L}_{bl} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-4})$$

Elemento quadrangular linear **Q4**:

$$\mathbf{L}_{bl} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{B-5})$$

Elemento triangular quadrático **T6**:

$$\mathbf{L}_{bl} = \frac{1}{360} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix} \quad (\text{B-6})$$

Elemento quadrangular quadrático **Q8**:

$$\mathbf{L}_{bl} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 2 & -6 & -8 & -8 & -6 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & -6 & -6 & -8 & -8 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & -8 & -6 & -6 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & -8 & -8 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -8 & -8 & 32 & 20 & 16 & 20 \\ -8 & -6 & -6 & -8 & 20 & 32 & 20 & 16 \\ -8 & -8 & -6 & -6 & 16 & 20 & 32 & 20 \\ -6 & -8 & -8 & -6 & 20 & 16 & 20 & 32 \end{bmatrix} \quad (\text{B-7})$$