

4

O Método Expedito dos Elementos de Contorno

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento da formulação do método expedito dos elementos de contorno. Apresenta-se os principais conceitos e definições para obter as equações matriciais de equilíbrio. A formulação apresentada é desenvolvida para problemas de elasticidade linear, caso mais geral. No entanto, pode-se migrar facilmente e aplicá-lo em problemas de potencial, desde que sejam bem entendidos os parâmetros de equivalência entre ambos tipos de problemas. Exemplos de aplicação serão apresentados no próximo capítulo.

4.1

Enunciados a partir do Princípio dos trabalhos virtuais

Enunciados do princípio dos trabalhos virtuais são incondicionalmente necessários na justificativa do método expedito dos elementos de contorno [12, 19]. São teoremas que devem ser provados a partir de alguns axiomas mecânicos. Alguns deles já foram tratados de forma abrangente em estudos associados com o método híbrido dos elementos de contorno em [8, 10, 12, 13]. A definição 1 é importante para manter coerência total das equações e também facilita o entendimento. Alguns enunciados sobre o trabalho virtual são descritos a seguir.

Definição 1 *Seja n^r o número de deslocamentos de corpo rígido independentes de um problema de elasticidade em geral. Em seguida, $n^r = 3$ ou $n^r = 6$ para problemas 2D ou 3D (e $n^r = 1$ para problemas de potencial). Problemas que envolvem simetria apresentam diferentes valores de n^r . Pode-se eventualmente ter $n^r = 0$ como no caso de domínios infinitos. Os deslocamentos de corpo rígido $W \in \mathbb{R}^{n^d}$ são medidos através das colunas de uma matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n^d \times n^r}$ que é ortogonal por conveniência.*

4.1.1

Enunciado associado com o deslocamento

Partindo do potencial de Hellinger-Reissner [8, 15] chega-se à seguinte equação de equilíbrio

$$H_{mn}p_m^* = p_n - p_n^p \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^p, \quad (4-1)$$

onde $\mathbf{H} = [H_{mn}] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^*}$ é a mesma matriz de potencial duplo do método dos elementos de contorno convencional [3], já introduzida em (3-24). Além disso, $\mathbf{p} = [p_n] \in \mathbb{R}^{n^d}$ e $\mathbf{p}^p = [p_n^p] \in \mathbb{R}^{n^d}$ são definidas como

$$p_n = \int_{\Gamma} \sigma_{ji} \eta_j u_{in} d\Gamma, \quad p_n^p = \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^p \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (4-2)$$

onde, p_n e p_n^d , são vetores de carregamento nodal equivalente correspondentes às forças de superfície aplicadas, conforme indicado na equação (2-2) e equação (2-24), no caso da solução particular, respectivamente.

4.1.2

Relações entre os campos aproximados fornecidos por \mathbf{d} e \mathbf{t}

Pode ser conveniente expressar as forças de superfície aproximadas t_i^t da equação (2-27), em termos de carregamentos nodais equivalentes p_m , a partir do princípio dos trabalhos virtuais

$$\delta d_m p_m(\mathbf{t}) = \delta d_m \int_{\Gamma} u_{im} t_{i\ell} d\Gamma t_{\ell} \quad (4-3)$$

$$\Rightarrow p_m(\mathbf{t}) = L_{\ell m} t_{\ell} \quad \text{ou} \quad \mathbf{p}(\mathbf{t}) = \mathbf{L}^T \mathbf{t} \quad (4-4)$$

onde as funções de interpolação das equações (2-21) e (2-27) foram usadas, definindo assim

$$\mathbf{L} = [L_{\ell m}] \in \mathbb{R}^{n^t \times n^d} = \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im} d\Gamma. \quad (4-5)$$

Como dado na equação (4-4), \mathbf{L}^T executa uma transformação de equilíbrio dos parâmetros de forças de superfície \mathbf{t} para carregamentos nodais equivalentes $\mathbf{p}(\mathbf{t})$. A notação $\mathbf{p}(\mathbf{t})$ significa que as forças nodais equivalentes \mathbf{p} são apresentadas como funções das forças de superfície \mathbf{t} . Observe-se que, de acordo com Definição 1, $\mathbf{W}^T(\mathbf{p}(\mathbf{t}) - \mathbf{p}^p) = \mathbf{W}^T \mathbf{L}^T(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) = 0$ para um problema formulado de forma consistente.

Expressando as relações de contragradência

$$\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \mathbf{L}^T \mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}^t(\mathbf{d}) = \mathbf{L} \mathbf{d}, \quad (4-6)$$

onde $\mathbf{d}^t(\mathbf{d})$ são deslocamentos nodais equivalentes definidos de tal modo que $\delta \mathbf{t}^T \mathbf{d}^t(\mathbf{d})$ tem o significado de trabalho virtual. Esta relação de contragradência

faz parte do método híbrido dos elementos de contorno de deslocamento, que pode ser derivado a partir do potencial Hu [10, 26].

4.1.3

Relações entre os campos aproximados fornecidos por \mathbf{d} e \mathbf{p}^*

Obtém-se a partir da equação (4-1), a relação de contragradência

$$\mathbf{p}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}^*(\mathbf{d}) = \mathbf{H}\mathbf{d} \quad (4-7)$$

onde $\mathbf{d}^*(\mathbf{d})$ são deslocamentos nodais equivalentes definidos de tal modo que $\delta \mathbf{p}^{*T} \mathbf{d}^*(\mathbf{d})$ tem o significado de trabalho virtual.

4.1.4

Subespaços de forças admissíveis para os campos de aproximações

A matriz \mathbf{W} de deslocamentos de corpo rígido nodais, foi introduzido na Definição 1, sendo que é também o sub-espaço das forças \mathbf{p} desequilibradas. Como foi mostrado no parágrafo após a equação (4-5), as colunas de $\mathbf{W}^T \mathbf{L}^T$ abrangem o subespaço das forças \mathbf{t} desequilibradas [9]. Para um domínio finito, as colunas de \mathbf{W} são os espaços nulos de \mathbf{H} . Em seguida obtém-se dada a consistência da equação (4-1), que as forças equilibradas \mathbf{p}^* devem ser ortogonais ao espaço nulo \mathbf{V} de \mathbf{H}^T [8]. Estas conclusões são formalizadas no seguinte teorema.

Teorema 1 *As colunas das matrizes \mathbf{W} , $\mathbf{W}\mathbf{L}$ e \mathbf{V} abrangem os subespaços de deslocamentos de corpo rígido dos campos aproximados, representados pelos parâmetros \mathbf{d} , \mathbf{d}^t e \mathbf{d}^s , respectivamente. Cada um dos vetores \mathbf{p} , \mathbf{t} e \mathbf{p}^* , representam as forças nodais que estão em equilíbrio se e somente se $\mathbf{W}^T \mathbf{p} = 0$, $\mathbf{W}^T \mathbf{L}^T \mathbf{t} = 0$ e $\mathbf{V}^T \mathbf{p}^* = 0$, respectivamente.*

4.1.5

Aproximação da matriz de potencial duplo \mathbf{H}

A equação (2-25), em princípio, válida no domínio Ω , é aplicada aos nós do contorno Γ [10, 15]. Assim, u_i^d (da equação (2-21)) e u_i^s devem coincidir ao longo do contorno Γ ,

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* + \mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{p}^* = (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p), \quad (4-8)$$

onde $\mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{p}^*$ representa uma quantidade de deslocamento de corpo rígido que não pode ser transformado entre os campos de aproximação cujos parâmetros são \mathbf{p}^* e \mathbf{d} . A equação acima é um enunciado muito simples, exceto que há uma

quantidade incorporada de deslocamento de corpo rígido e - o mais importante - que os termos de $\mathbf{U}^* = [U_{ns}^*] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^d}$ para m e n referentes ao mesmo nó, não podem ser avaliados diretamente.

Afirmamos pelo Teorema 1 que, se o conjunto de parâmetros de força \mathbf{p}^* na equação (4-8), corresponde às forças de equilíbrio, então $\mathbf{V}^T \mathbf{p}^* = 0 \Rightarrow \mathbf{WCp}^* = 0$ [15] e o seguinte enunciado de contragradiencia

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d}(\mathbf{p}^*) \Rightarrow \mathbf{U}^{*T} \mathbf{p} = \mathbf{d}^*(\mathbf{p}) \quad \text{desde que} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{p}^* = 0, \quad \mathbf{W}^T \mathbf{p} = 0 \quad (4-9)$$

Seguidamente, se utiliza a equação (4-4) para definir um conjunto de carregamentos nodais equivalentes $\mathbf{p}(\mathbf{t})$ e a equação (4-7) para definir um conjunto de deslocamentos nodais equivalentes $\mathbf{d}^*(\mathbf{d})$. Assim, o lado direito da equação acima torna-se

$$\mathbf{U}^{*T} \mathbf{L}^T \mathbf{t} = \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (4-10)$$

Comparando esta equação com a equação (3-24), obtemos

$$\mathbf{U}^{*T} \mathbf{L}^T \approx \mathbf{G} \quad (4-11)$$

que pode-se obter formalmente no quadro de um teorema de energia [15, 16].

4.1.6

Aproximação da matriz de potencial simples \mathbf{G}

A equação (4-8) foi obtida através da simples afirmação de que a equação (2-21) deve manter-se para os pontos nodais ao longo do contorno Γ (na verdade tem uma base variacional [8, 10, 15]). Uma afirmação semelhante pode ser feita para as forças de superfície ao longo do contorno Γ ,

$$\mathbf{T}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{t}(\mathbf{p}^*) \quad (4-12)$$

com a introdução da matriz $\mathbf{T}^* = [T_{\ell m}^*] \in \mathbb{R}^{n^t \times n^*}$ das forças de superfície, obtida através da medição do efeito $\sigma_{ijm}^* \eta_j$ em um nó do contorno e sua direção caracterizada por ℓ causada por uma força unitária p_m^* , de acordo com a equação (2-24). A aplicação de uma instrução de contragradiencia [16] leva a

$$\mathbf{T}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{t}(\mathbf{p}^*) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{*T} \mathbf{d}^t = \mathbf{d}^*(\mathbf{d}^t) \quad (4-13)$$

onde a parte de deslocamento de corpo rígido é excluída.

A expressão do lado direito equação da 4-13, pode ser escrita num formato amigável, para isso se recorre às expressões de \mathbf{d}^t e \mathbf{d}^* nas equações (4-6) e (4-7)

$$\mathbf{T}^{*T} \mathbf{L} \mathbf{d} = \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (4-14)$$

que envolvem apenas deslocamentos nodais \mathbf{d} . Desde que $\mathbf{H} \mathbf{W} = 0$ para um domínio finito Ω , deslocamentos nodais equivalentes são automaticamente excluídos.

Então, pode-se concluir que

$$\mathbf{T}^{*T} \mathbf{L} \approx \mathbf{H} \quad (4-15)$$

desde que, as condições de $\mathbf{T}^* = T_{\ell m}^*$ para m e ℓ referindo-se ao mesmo ponto nodal, sejam de alguma forma avaliadas e que pelo menos uma garanta que

$$\mathbf{T}^{*T} \mathbf{L} \mathbf{W} = 0 \quad \text{para um } \Omega \text{ finito.} \quad (4-16)$$

4.2

Aproximação dos deslocamentos e das forças de superfície no contorno

No método expedito dos elementos de contorno, resultados de tensões σ_{ij}^s e deslocamentos u_i^s em pontos internos são dados diretamente pelas equações (2-23) e (2-25) em termos de parâmetros de forças p_m^* avaliados após a solução da equação (3-24). Esta forma de representação de resultados no domínio Ω que contorna o uso computacional intensivo da identidade de Somigliana, no método convencional dos elementos de contorno, é próprio do método híbrido dos elementos de contorno [9, 10, 12, 15]. De acordo com isso, as equações (2-23) e (2-25) são aplicadas aos nós do contorno [10, 15]

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d}(\mathbf{p}^*), \quad (4-17)$$

$$\mathbf{T}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{t}(\mathbf{p}^*). \quad (4-18)$$

Na equação (4-17) são excluídas as partes de *deslocamento de corpo rígido* e *forças desequilibradas*. Na equação (4-18) é excluída a parte das *forças desequilibradas* que não podem tomar parte nas transformações lineares. A definição de deslocamento de corpo rígido é simples e intuitiva. A definição de forças desequilibradas não é intuitiva em termos de parâmetros de forças internas \mathbf{p}^* . Entretanto, é simples por meio de álgebra linear. Nas equações acima o argumento (\mathbf{p}^*) indica que os atributos de deslocamentos nodal e

força de superfície são funções dos parâmetros de forças pontuais da solução fundamental.

As duas últimas equações são obtidas de modo muito simples (não são incorporadas as partes de deslocamento de corpo rígido e as das forças desequilibradas que não podem ser transformadas). Além disso, os coeficientes da matriz de deslocamentos $\mathbf{U}^* = [U_{mn}^*] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^d}$ e da matriz de forças de superfície $\mathbf{T}^* = [T_{\ell m}^*] \in \mathbb{R}^{n^t \times n^*}$ são indefinidos (e não infinitas) quando seus índices referem-se ao mesmo ponto nodal [16].

4.3

Expressões do Método Expedito dos Elementos de Contorno

A equação (3-24) escrita em forma matricial é repetida em notação indicial com a finalidade de clareza

$$\left[\int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma \right] (d_n - d_n^p) \cong \left[\int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im}^* d\Gamma \right] (t_{\ell} - t_{\ell}^p) \quad (4-19)$$

onde \cong significa congruência em termos de resíduos ponderados já que existe um erro de aproximação inerente [9, 13]. Utilizando as funções de interpolação do contorno das equações (2-21) e (2-27) nas soluções fundamentais próprias, a equação acima pode ser aproximada como

$$T_{\ell m}^* \left[\int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{in} d\Gamma \right] (d_n - d_n^p) \approx U_{nm}^* \left[\int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{in} d\Gamma \right] (t_{\ell} - t_{\ell}^p) \quad (4-20)$$

Esta é a primeira vista uma iniciativa ousada que exige uma justificativa adequada.

A aproximação envolvendo U_{nm}^* resulta do método híbrido dos elementos de contorno através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais [10]. Uma questão importante a ter em conta, neste caso, é a avaliação adequada dos coeficientes quando m e n referem-se ao mesmo ponto nodal, questão que é abordada com mais detalhe na seção 4.3.3.

A aproximação envolvendo $T_{\ell m}^*$ é mais difícil de justificar e é em princípio questionável, embora se possa usar o princípio dos trabalhos virtuais e recorrer a [16, 19] para um melhor entendimento.

É importante no desenvolvimento do método proposto admitir que a aproximação não pode ser aplicada diretamente numa integral de contorno onde existe uma singularidade forte, o que acontece quando m e n , equação (4-19), pertencem ao mesmo elemento de contorno. O raciocínio por trás disso é que não é possível aproximar forças de superfície $\sigma_{ijm}^* \eta_j$ quando $\sigma_{ijm}^* \rightarrow \infty$ no intervalo do contorno considerado, mesmo no caso em que o produto $\sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}$

fosse finito. Uma forma consistente de lidar com esta questão é proposto na próxima seção.

Usando as definições das matrizes U_{nm}^* , T_{lm}^* e L_{lm} nas equações (4-17), (4-18) e (4-5) e substituindo $=$ por \approx na equação (4-20), pode-se reescrever a equação matricial como

$$\mathbf{T}^{*\text{T}}\mathbf{L}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{U}^{*\text{T}}\mathbf{L}^{\text{T}}(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (4-21)$$

Observa-se que substituindo as aproximações das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , obtidas nas equações (4-11) e (4-15), respectivamente, na equação (3-24) do método convencional dos elementos de contorno, obtém-se a equação (4-21).

Substituindo, na equação (4-21), a notação

$$\tilde{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{T}^{*\text{T}}\mathbf{L} \quad (4-22)$$

com a finalidade de simplifica-la, obtemos finalmente a equação do método expedito dos elementos de contorno na sua forma matricial

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{U}^{*\text{T}}\mathbf{L}^{\text{T}}(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (4-23)$$

A equação (4-23) é uma aproximação razoável da equação (3-24), do método convencional dos elementos de contorno, desde que os coeficientes indefinidos das matrizes \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* sejam resolvidos adequadamente. A equação (4-23) pode ser escrita de forma alternativa de acordo com a equação (4-4) em termos do vetor de carregamento nodal equivalente \mathbf{p} como no método de elementos Finitos

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{U}^{*\text{T}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) \quad (4-24)$$

o que representa uma vantagem operativa adicional do método proposto.

4.3.1

Avaliação dos coeficientes da matriz L_{bl}

A matriz \mathbf{L} da equação (4-5), foi definida como

$$\mathbf{L} = [L_{lm}] \in \mathbb{R}^{n^t \times n^d} = \int_{\Gamma} t_{il} u_{im} d\Gamma \quad (4-25)$$

De acordo com a equação (2-27), o Jacobiano de $d\Gamma = |J|d\xi d\eta$, também válido para problemas em três dimensões, cancela-se com o denominador de t_{il} de tal modo que os coeficientes de L_{lm} sejam números pré-definidos e independentes da geometria do problema. Uma característica importante da

matriz $L_{\ell m}$ é ser uma matriz em banda cujos coeficientes se referem apenas às funções de interpolação do contorno Γ , de suporte local, e podem ser avaliadas analiticamente e independentemente [13], o que mostra que a matriz \mathbf{L} na verdade está formada por pequenos blocos de matrizes iguais \mathbf{L}_{bl} e não precisa ser montada numa implementação adequada. As matrizes \mathbf{L}_{bl} podem ser utilizadas como dados de entrada básicos numa implementação de código de programação computacional são previamente calculadas para cada tipo de elemento utilizado nas implementações bidimensionais ou tridimensionais (ver Apêndice B).

4.3.2

Avaliação dos coeficientes indefinidos de $\tilde{\mathbf{H}}$

A matriz de forças de superfície \mathbf{T}^* é retangular. No entanto, os coeficientes indefinidos da matriz quadrada $\tilde{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{T}^{*\text{T}}\mathbf{L}$ na equação (4-23) são o tema atual de interesse. A matriz \mathbf{L} , como definida na equação (4-5), tem o mesmo número de linhas e colunas que \mathbf{T}^* , mas os coeficientes diferentes de zero da matriz $L_{\ell m}$ estão agrupados se o deslocamento nodal δd_m e os atributos de forças de superfície t_ℓ referem-se ao mesmo segmento do contorno (elemento).

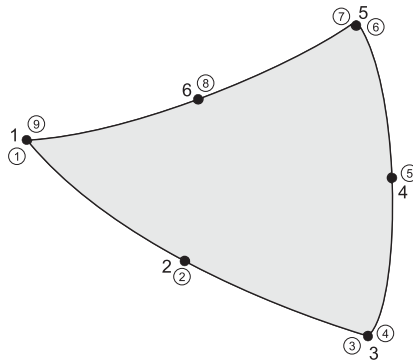


Figura 4.1: Estrutura formada por seis nós e três elementos quadráticos para ilustração na construção das matrizes.

A Figura (4.1) mostra um triângulo com seis nós para uma discretização em termos de três elementos quadráticos. Um ou dois graus de liberdade são associados por nó dependendo do tipo de problema (potencial ou elasticidade em duas dimensões). As duas matrizes correspondentes \mathbf{T}^* e \mathbf{L} necessárias para o cálculo de $\tilde{\mathbf{H}}$ são dadas esquematicamente em forma de submatrizes a seguir

$$\mathbf{T}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} u & \sim & \sim & \times & \times & \times \\ \sim & u & \sim & \times & \times & \times \\ \sim & \sim & u & \times & \times & \times \\ \times & \times & & u & \sim & \times \\ \times & \times & \sim & u & \sim & \times \\ \times & \times & \sim & \sim & u & \times \\ \sim & \times & \times & \times & u & \sim \\ \sim & \times & \times & \times & \sim & u \\ u & \times & \times & \times & \sim & \sim \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4-26)$$

$$\mathbf{L} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4-27)$$

em que os símbolos “×” representam os coeficientes que são gerados diretamente nas matrizes e os símbolos “u” representam coeficientes indefinidos. Os coeficientes representados como “~” são atualmente conhecidos, mas eles correspondem aos nós que estão adjacentes aos coeficientes indefinidas e, no produto $\tilde{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{T}^{*T} \mathbf{L}$, levam a resultados de coeficientes que envolvem uma indefinição, conseqüentemente correspondem ao caso em que a aproximação em termos de $t_{i\ell}$ na equação (4-20) não se aplica. A solução para contornar a indefinição consiste em atribuir a estes coeficientes os valores correspondentes da matriz original \mathbf{H} da equação (3-25) o que leva a

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} u & H_{1,2} & H_{1,3} & \times & H_{1,5} & H_{1,6} \\ H_{2,1} & u & H_{2,3} & \times & \times & \times \\ H_{3,1} & H_{3,2} & u & H_{3,4} & H_{3,5} & \times \\ \times & \times & H_{4,3} & u & H_{4,5} & \times \\ H_{5,1} & \times & H_{5,3} & H_{5,4} & u & H_{5,6} \\ H_{6,1} & \times & \times & \times & H_{6,5} & u \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4-28)$$

Os coeficientes indicados com \mathbf{H} são avaliados usando quadratura de Gauss-Legendre na integração desde que não haja singularidades envolvidas. A forma mais simples de se obter os coeficientes desconhecidos “ u ” é aplicando algumas propriedades de deslocamentos de corpo rígido, como as vezes é implementado no método convencional de elementos de contorno. O procedimento é resumida em [16, 19, 20].

Algoritmo para a avaliação dos coeficientes indefinidos de $\tilde{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{T}^{\text{T}}\mathbf{L}$.*

1. Se os índices (m, n) da matriz $\tilde{\mathbf{H}}$ referem-se a um segmento do contorno não adjacente a uma singularidade, então basta avaliar o coeficiente como o produto $\mathbf{T}^{*\text{T}}\mathbf{L}$.
2. Se os índices (m, n) referem-se a um nó, que fica adjacente a uma singularidade, então o coeficiente deve ser substituído com o valor correspondente de \mathbf{H} , equação (3-25), que requer a avaliação de uma integral regular por quadratura de Gauss ($u_{in} = 0$ no ponto de singularidade).
3. Se os índices (m, n) referem-se a um nó afetado diretamente por uma singularidade, basta avaliar os coeficientes forçando a matriz ser ortogonal ao deslocamento de corpo rígido (para domínios infinitos, usar o domínio complementar limitado. No caso de simetria, quando o número de deslocamentos de corpo rígido não é suficiente, adicionalmente aplicar uma solução analítica simples ao problema.)

Para problemas de potencial, há apenas uma constante potencial e também apenas um valor desconhecido por nó, tanto para problemas 2D ou 3D, e uma avaliação exata dos coeficientes indefinidos sempre é possível. Para problemas de elasticidade em geral, existem três ou seis estados de tensão constante, para problemas 2D ou 3D, e duas ou três incógnitas, que devem ser avaliados utilizando a teoria de mínimos quadrados. Os problemas relacionados com a avaliação dos coeficientes indeterminados da matriz $\tilde{\mathbf{H}}$ estão resumidos na tabela 4.1.

4.3.3

Avaliação dos Coeficientes Indefinidos de \mathbf{U}^*

Uma vez que os coeficientes indefinidos de $\tilde{\mathbf{H}}$ são avaliados, podem ser utilizados na avaliação dos coeficientes indefinidos “ u ” da matriz \mathbf{U}^* como ilustrado na equação (4-30) para o exemplo da Figura (4.1), aplicando um número necessário de soluções analíticas, $(\mathbf{D}^a, \mathbf{T}^a)$ ou $(\mathbf{D}^a, \mathbf{P}^a)$ e uma solução por mínimos quadrados

	Problemas de potencial		Problemas de elasticidade	
	2D	3D	2D	3D
Incógnitas para $\tilde{\mathbf{H}}$	1	1	2	3
Deslocamentos de corpo rígido	1	1	3	6
Tipo de solução	exato	exato	m. q.	m. q.
Incógnitas para \mathbf{U}^*	1	1	2	3
Solução simples	2	3	3	6
Tipo de solução	m. q.	m. q.	m. q.	m. q.

Tabela 4.1: Número de incógnitas e de soluções disponíveis (deslocamento de corpo rígido ou solução simples) e tipo de avaliação de coeficientes indefinidas (exato ou mínimos quadrados – m.q.) para cada fila da matriz, seja para problemas de potencial e elasticidade, 2D ou 3D.

$$|\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{D}^a - \mathbf{U}^{*\text{T}}\mathbf{L}^{\text{T}}\mathbf{T}^a| = \min \quad \text{ou} \quad |\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{D}^a - \mathbf{U}^{*\text{T}}\mathbf{P}^a| = \min \quad (4-29)$$

Para problemas de potencial, o número de fluxos constantes é de dois ou três, para problemas 2D ou 3D, respectivamente, e há apenas uma incógnita por nó.

$$\mathbf{U}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} u & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & u & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & u & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & u & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & u & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & u \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4-30)$$

Para problemas de elasticidade gerais, existem três ou seis estados de tensão constante, para problemas 2D ou 3D, respectivamente, e duas ou três incógnitas. Então, uma avaliação, em termos de mínimos quadrados, dos coeficientes indefinidos, é sempre necessária. Este esquema de solução é semelhante ao adotado no método híbrido dos elementos de contorno na avaliação dos coeficientes indefinidos da matriz de flexibilidade \mathbf{F}^* [6, 8, 16, 17, 26, 27]. Os problemas relacionados com a avaliação dos coeficientes indeterminados da matriz \mathbf{U}^* estão resumidos na tabela 4.1.

4.4

Solução da equação matricial do problema e avaliação de resultados em pontos internos

Dado um problema geral de contorno misto, as equações (4-23) ou (4-24) podem ser resolvidas para obter-se as incógnitas do problema e depois

os resultados em pontos internos podem ser obtidos usando a Identidade de Somigliana como é feito no método convencional dos elementos de contorno. No entanto, no quadro atual, os resultados podem ser obtidos diretamente utilizando o vetor de parâmetros de forças \mathbf{p}^* , segundo as equações (2-23) e (2-25), o que dispensa as integrações adicionais.

A avaliação do vetor \mathbf{p}^* pode ser realizada através da resolução da equação (4-1) e a singularidade presente em termos de álgebra linear, não apresenta maiores dificuldades reais [6, 15, 16, 17, 26, 27].

Uma forma mais eficiente de tratar o problema colocado no parágrafo anterior consiste na avaliação de todas as incógnitas nodais - deslocamentos e forças nodais, além do parâmetro de forças nodais \mathbf{p}^* - por resolução de um sistema de equações matriciais simples. A ideia básica é começar com as equações (4-17) e (4-1), aqui repetidas para maior clareza incluindo também os vetores da solução particular

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^p, \quad \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^p \quad (4-31)$$

A atribuição aos sub vetores \mathbf{d} e \mathbf{p} de subscritos D ou N é para caracterizar se as condições de contorno são do tipo Dirichlet ou Neumann, as equações acima podem ainda ser representadas como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_N^* \\ \mathbf{U}_D^* \end{bmatrix} \mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_N - \mathbf{d}_N^p \\ \mathbf{d}_D - \mathbf{d}_D^p \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_N^T \\ \tilde{\mathbf{H}}_D^T \end{bmatrix} \mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_N - \mathbf{p}_N^p \\ \mathbf{p}_D - \mathbf{p}_D^p \end{Bmatrix} \quad (4-32)$$

Em seguida, o sistema de equações pode ser resolvido em primeiro lugar para \mathbf{p}^* , desde que o problema esteja bem colocado

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_N^T \\ \mathbf{U}_D^* \end{bmatrix} \mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_N - \mathbf{p}_N^p \\ \mathbf{d}_D - \mathbf{d}_D^p \end{Bmatrix} \quad (4-33)$$

com uma posterior avaliação das forças de superfície e os parâmetros de deslocamento

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_N \\ \mathbf{p}_D \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_N^p \\ \mathbf{p}_D^p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_N^* \\ \tilde{\mathbf{H}}_D^T \end{bmatrix} \mathbf{p}^* \quad (4-34)$$

As tensões e os deslocamento em qualquer ponto do domínio são obtidos em termos de \mathbf{p}^* diretamente por meio das equações (2-23) e (2-25). O deslocamento de corpo rígido implícito na equação (2-25) é uma questão que pode ser tratada de forma direta, da mesma forma como é avaliado no âmbito do método híbrido dos elementos de contorno. É importante ressaltar que as características em questão de álgebra linear da equação (4-33) é

fundamentalmente diferente do sistema de equações normalmente representado no método de elementos de contorno convencional [3].