

3

Métodos de elementos de contorno

Dos diversos métodos de elementos de contorno que vêm sendo utilizados com sucesso em diferentes aplicações numéricas, três são de nosso interesse. No decorrer do presente capítulo serão apresentados em forma breve a formulação e os principais conceitos de cada um desses métodos.

- O método convencional dos elementos de contorno.
- O método híbrido dos elementos de contorno.
- O método híbrido simplificado dos elementos de contorno.

3.1

O Método convencional dos elementos de contorno

O método convencional dos elementos de contorno é obtido a partir de uma formulação em resíduos ponderados. Sempre que aplicável, é uma ferramenta simples e poderosa de análise numérica [1, 2, 3]. Em [9, 13, 26] se mostra uma formulação consistente do método, baseada em uma adequada consideração das constantes de corpo rígido associadas à solução fundamental em termos de deslocamentos.

3.1.1

Formulação consistente do método convencional dos elementos de contorno

Assumimos que σ_{ij} é um tensor simétrico que satisfaz a equação constitutiva $\sigma_{ij} = D_{ijkl}u_{k,l}$, equação (2-10). O problema pode ser formulado, na sua forma forte, utilizando o princípio de energia potencial total estacionária [8], para uma variação δu_i de u_i , estendendo o contorno do segundo integrando de Γ_σ para Γ , uma vez que, de acordo com a equação (2-3) e (2-6), $\delta u_i = 0$ em Γ_u

$$\delta \Pi = - \int_{\Omega} (\sigma_{j^i,j} + b_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} \eta_j - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0. \quad (3-1)$$

Para uma formulação não-variacional em termos de resíduos ponderados, que é menos restritiva que a equação (3-1), recorre-se a um campo de soluções fundamentais. Isto é, tensões σ_{ij}^* e deslocamentos u_i^* do mesmo problema de

elasticidade, $\delta\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}\delta u_{k,l}^*$, que satisfaz a parte homogênea $\sigma_{ji,j} = 0$ da equação (2-1), porém, não satisfaz as condições de contorno das equações (2-3) e (2-6):

$$-\int_{\Omega}(\sigma_{ji,j} + b_i)\delta u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma}(\sigma_{ij}\eta_j - t_i)\delta u_i^* d\Gamma = 0. \quad (3-2)$$

Integrando por partes. Aplicando o teorema de Green e a identidade $\sigma_{ij}\delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l}C_{ijkl}\delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l}\delta\sigma_{kl}^*$ obtemos

$$\int_{\Gamma}\delta\sigma_{ij}^*\eta_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega}\delta\sigma_{ji,j}^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma}t_i\delta u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega}b_i\delta u_i^* d\Omega. \quad (3-3)$$

A formulação consistente, do método convencional dos elementos de contorno, obtém-se a partir da equação (3-3). As soluções fundamentais $\delta\sigma_{ij}^*$ e δu_i^* são discretizadas adequadamente segundo as equações (2-30) e (2-29) em termos de parâmetros de forças arbitrárias δp_m^* dados como

$$\delta\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ijm}^* \delta p_m^* \quad e \quad (3-4)$$

$$\delta u_i^* = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm})\delta p_m^* \quad (3-5)$$

onde u_{is}^r (para $s = 1 \dots n^r$) são os n^r deslocamentos de corpo rígido multiplicados pelas constantes arbitrárias C_{sm} ; m indica a localização e direção da aplicação de parâmetros de forças arbitrárias δp_m^* . Também, $\delta\sigma_{ijm}^*$ e δu_{im}^* denotam funções, com suporte global, das coordenadas e direções de δp_m^* designado por m (ponto origem), assim como das coordenadas e direções i (ponto campo), onde os efeitos de δp_m^* são medidos.

A robustez do método dos elementos de contorno resulta do fato de os parâmetros de forças arbitrárias δp_m^* serem aplicados nos nós ao longo do contorno Γ , do lado de fora do domínio Ω , infinitamente fechado. Embora, $\delta\sigma_{ijm}^*$ e δu_{im}^* tendam ao infinito (no ponto de aplicação de δp_m^*) são analíticos em Ω . Por conveniência, as funções $\delta\sigma_{ijm}^*$ são normalizadas de modo que para um domínio Ω_0 que contém δp_m^* com o contorno fechado Γ_0 temos

$$\int_{\Omega_0}\sigma_{jim,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma_0}\sigma_{ijm}^*\eta_j d\Gamma \equiv -\delta_{im}, \quad (3-6)$$

onde δ_{im} é o delta de Kronecker generalizado (igual a 1, se i e m referem-se ao mesmo grau de liberdade, ou 0, caso contrário).

De acordo com a definição associada à solução fundamental da equação (3-6), a integral de domínio do lado esquerdo da equação (3-3) é, na verdade, avaliada como $\int_{\Omega}\delta\sigma_{ji,j}^* u_i d\Omega = -\delta_{im} u_i \delta p_m^* \equiv -u_m \delta p_m^*$.

Substituindo $\delta\sigma_{ij}^*$ e δu_i^* na equação (3-3), de acordo com as suas expressões dadas nas equações (3-4) e (3-5). Obtém-se a expressão modificada da identidade de Somigliana

$$u_m = \int_{\Gamma} t_i u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_i u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right). \quad (3-7)$$

Essa identidade é utilizada para avaliar os deslocamentos u_m (e consequentemente, as tensões) num ponto m do domínio Ω , sempre que, as forças de massa b_i , forças de superfície t_i sejam prescritas e deslocamentos no contorno u_i sejam conhecidos. O termo entre parênteses desaparece quando as forças de superfície t_i e as forças de massa b_i estão em equilíbrio, o que não necessariamente é atingido quando se está lidando com aproximações. Observa-se também que, os resultados são, em princípio, influenciados pelas constantes arbitrárias C_{sm} [1].

3.1.2

Discretização numérica

A equação (3-7) também é utilizada para avaliar os deslocamentos u_i e as forças de superfície t_i como incógnitas do problema ao longo das partes Γ_{σ} e Γ_u do contorno Γ , respectivamente. De fato, aproximam-se segundo as equações (2-21) e (2-27) ao longo do contorno Γ como

$$u_i^d = u_{in} d_n \quad \text{e} \quad t_i^t = t_{i\ell} t_{\ell} \quad (3-8)$$

onde d_n , para $n = 1 \dots n^d$, é um vetor de n^d deslocamentos nodais e u_{in} são funções de interpolação com suporte local, geralmente polinômios escolhidos de tal maneira que, nos pontos nodais, $u_{in} \equiv \delta_{in}$. Uma vez que o campo de forças de superfície t_i tem atributos de superfície, os n^t parâmetros t_{ℓ} os têm, mas dependem do vetor normal externo $\vec{\eta}_i$ dos nós do contorno aos quais t_{ℓ} está fisicamente associado. Geralmente, $n^t > n^d$, devido a que o contorno Γ nem sempre é completamente contínuo e alguns nós podem ter duas normais.

A geometria do contorno é aproximada a partir dos atributos nodais usando as mesmas funções de interpolação u_{in} da equação (3-8) (representação isoparamétrica), exatamente como no método dos elementos finitos,.

Substituindo as aproximações u_i^d e t_i^t na identidade de Somigliana, dada pela equação (3-7), e aplicando δp_m^* em nós sucessivos do contorno de forma que $\delta p_m^* d_m$ tenha significado de trabalho virtual, chega-se à equação básica do método convencional dos elementos de contorno na sua forma consistente, que

considera o termo de erro relacionado com a constante C_{sm} ,

$$\left(\int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n = \left(\int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im}^* d\Gamma \right) t_{\ell} + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right). \quad (3-9)$$

Escrevendo na forma matricial, temos

$$\mathbf{Hd} = \mathbf{Gt} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (3-10)$$

onde $\mathbf{H} = [H_{mn}] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^d}$ é uma matriz de transformação cinemática [8, 10], $\mathbf{G} = [G_{m\ell}] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^t}$ é uma matriz do tipo flexibilidade (geralmente retangular) e $\mathbf{b} = [b_m] \in \mathbb{R}^{n^d}$ é um vetor de deslocamentos nodais equivalente às forças de massa. As matrizes de potencial duplo e simples, \mathbf{H} e \mathbf{G} , compreendem em sua definição integrais singulares e impróprias, respectivamente, quando o ponto fonte (índice m) e o ponto campo (índice n ou ℓ) referem-se aos mesmos pontos nodais. Então, cuidados especiais devem ser tomados nas integrações numéricas. As integrais singulares podem, sempre, ser avaliadas matematicamente, levando em conta os correspondentes significados mecânicos.

O termo de erro $\boldsymbol{\epsilon}$ na equação (3-10) corresponde a resíduos cujas magnitudes dependem dos deslocamentos de corpo rígido que estão implícitos na solução fundamental, da forma como a malha é refinada, ou seja, como exatamente as forças de superfície discretizadas estão em equilíbrio com as forças de massa aplicadas no domínio. Este vetor de resíduos é geralmente ignorado nas implementações mostradas na literatura [1, 3], ou às vezes utilizado como uma medida da convergência do modelo numérico. Um modelo numérico consistente deve considerar este termo explicitamente e ter uma formulação que seja independente de C_{sm} , e não simplesmente ignorá-lo.

Esta questão específica já foi assunto de uma investigação teórica em [9]. Também é importante a introdução de uma simplificação conveniente relacionada com a solução particular (termo \mathbf{b}) da equação (3-10). Os principais resultados obtidos são resumidos a seguir.

O vetor de resíduos $\boldsymbol{\epsilon}$ da equação (3-10) pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (3-11)$$

onde $\mathbf{R} = [R_{\ell s}] \in \mathbb{R}^{n^t \times n^d}$ é definido como

$$R_{\ell s} = \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{is}^r d\Gamma \quad (3-12)$$

e o produto $\mathbf{R}^T \mathbf{t}^p$ vem da aproximação

$$\int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega = - \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^p \eta_j u_{is}^r d\Gamma \approx - \left(\int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{is}^r d\Gamma \right) t_{\ell}^p \quad (3-13)$$

presente sempre que uma solução particular relacionada com as forças de massa estiver disponível. Do mesmo modo, o vetor $\mathbf{b} = [b_m]$ de deslocamentos nodais equivalentes, introduzido na equação (3-10), é aproximado do seguinte modo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^p \eta_j u_{im}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_i^p d\Gamma + \delta_{im} u_i^p \\ &\Rightarrow b_i \approx -G_{m\ell} t_{\ell}^p + H_{mn} d_n^p. \end{aligned} \quad (3-14)$$

Considerando uma malha suficientemente refinada no contorno. Os deslocamentos u_i^p e as forças de superfície $t_i^p = \sigma_{ji}^p \eta_j$, relacionados com uma solução particular arbitrária (parte não-homogênea) do problema governado pela equação (2-1), podem-se aproximar por deslocamentos nodais d_n^p e parâmetros de forças de superfície t_{ℓ}^p , com precisão suficiente em termos das funções de interpolação da equação (2-28)

$$u_i^p \approx u_{in} d_n^p \quad \text{e} \quad t_i^p = \sigma_{ji}^p \eta_j \approx t_{i\ell} t_{\ell}^p \quad \text{em} \quad \Gamma \quad (3-15)$$

Seguidamente, usando as equações (3-11) e (3-14), reescrevendo, de forma conveniente, a expressão da equação (3-10) como

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = (\mathbf{G} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T) (\mathbf{t} - \mathbf{t}^p). \quad (3-16)$$

Identifica-se na equação (3-11), com o apoio da álgebra linear [9], que as colunas da matriz \mathbf{R} da equação (3-16) abrangem o espaço das forças de superfície $(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p)$ que não podem ser transformadas em deslocamento (não estão em equilíbrio). Portanto,

$$(\mathbf{G} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T) \mathbf{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}^T = -\mathbf{G}\mathbf{R} (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1}. \quad (3-17)$$

O que leva a uma equação de elementos de contorno consistente

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{G}_a (\mathbf{t} - \mathbf{t}^p), \quad (3-18)$$

onde $\mathbf{G}_a \equiv \mathbf{G}\mathbf{P}_R^{\perp}$ é a parte admissível de \mathbf{G} e

$$\mathbf{P}_R^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_R = \mathbf{I} - \mathbf{R} (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \quad (3-19)$$

é o projetor ortogonal para o espaço admissível das forças de superfície, que compreende a parte de forças de superfície que estão em equilíbrio e podem, portanto, ser transformadas em deslocamentos nodais equivalentes através da matriz de flexibilidade \mathbf{G}_a .

3.1.3

Avaliação espectral das matrizes envolvidas

Seja $\mathbf{W} = [W_{ns}] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^r}$ uma matriz cujas colunas formam uma base ortogonal de deslocamentos nodais \mathbf{d} da equação (3-16), relacionados aos deslocamentos de corpo rígido, de tal forma que $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$. Então, os deslocamentos de corpo rígido u_{is}^r introduzidos na equação (3-5) podem ser normalizados de modo que os seus valores nodais coincidam com W_{ns} nos pontos nodais. Após isso temos que

$$u_{is}^r = u_{in} W_{ns} \quad \text{em} \quad \Gamma \quad (3-20)$$

Além disso, é aconselhável pensar o vetor de forças de superfície \mathbf{t} expresso em termos de forças nodais equivalentes $\mathbf{p} = [p_n] \in \mathbb{R}^{n^d}$ que surgem a partir de demonstrações do princípio dos trabalhos virtuais

$$\begin{aligned} \delta d_m p_m = \delta d_m \int_{\Gamma} u_{im} t_{i\ell} d\Gamma t_{\ell} &\Rightarrow p_m = L_{\ell m} t_{\ell} \quad \text{ou} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{L}^T \mathbf{t}, \end{aligned} \quad (3-21)$$

onde \mathbf{L}^T é uma matriz de transformação de equilíbrio, já que transforma forças de superfície em carregamento nodal equivalente.

Com as definições de \mathbf{W} e \mathbf{L}^T , dadas acima, verifica-se a equivalência

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{LW} \quad (3-22)$$

para \mathbf{R} , como definido na equação (3-12), o que significa que, para um domínio finito,

$$\mathbf{W}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) = 0. \quad (3-23)$$

As relações anteriores ajudam a entender as propriedades espectrais das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G}_a da equação (3-18). $\mathbf{W} = N(\mathbf{H})$ e $\mathbf{G}_a \mathbf{R} = 0$ são verificações parciais da consistência. Definindo \mathbf{V} como o espaço nulo de $\mathbf{V} = N(\mathbf{H}^T)$, verificamos que $|\mathbf{V}^T \mathbf{G}_a| \approx 0$ e não $|\mathbf{V}^T \mathbf{G}_a| = 0$, o que significa que a equação (3-18), não é completamente consistente. O que era esperado, já que a

equação (3-2) foi obtida de uma formulação em resíduos ponderados, que não é variacionalmente consistente, se for comparada com a equação (3-1).

3.1.4

Formulação não consistente do método convencional dos elementos de contorno

A versão inconsistente da equação (3-18) é a formulação do método convencional dos elementos de contorno, apresentada em [1, 2, 3] como

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{G}(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (3-24)$$

pode-se obter diretamente considerando nulo o erro ϵ da equação (3-10) ou a matriz \mathbf{C}^T da equação (3-16). A definição formal das matrizes envolvidas, cuja avaliação conceitual é dada por Dumont [9,13], é

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (3-25)$$

$$\mathbf{G} \equiv G_{m\ell} = \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im}^* d\Gamma \quad (3-26)$$

3.2

O método híbrido dos elementos de contorno

A formulação do método híbrido dos elementos de contorno, que tem uma base variacional, foi proposto em 1987 por Dumont [7], origina-se da variação do potencial de Hellinger-Reissner. O método baseia-se nas hipóteses de aproximações de tensões σ_{ij} no domínio Ω e de deslocamentos u_i no contorno Γ . Desde que foi proposto, mostrou-se como um método robusto na solução de diversos problemas da engenharia.

3.2.1

O potencial de Hellinger–Reissner

O potencial de Hellinger–Reissner é obtido de uma generalização da expressão da energia potencial total de um corpo elástico sujeito a pequenos deslocamentos (maiores detalhes no Apêndice A).

$$-\Pi_R(\sigma_{ij}, u_i) = \int_{\Omega} [U_0^C(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + b_i)u_i] d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \eta_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (3-27)$$

onde $U_0^C(\sigma_{ij})$ é a energia interna de deformação complementar. Observa-se na Figura A.1 que

$$U_0^C(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - U_0(\varepsilon_{ij}) \quad (3-28)$$

onde $U_0(\varepsilon_{ij})$ é a energia interna de deformação.

3.2.2

Formulação do método híbrido dos elementos de contorno

Considerando que a parte do contorno Γ_u será levada em conta somente após a formulação matricial do problema, ou seja, $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ e $\bar{t}_i \equiv t_i$ na equação (3-27), pode-se obter a forma estacionária do potencial:

$$-\delta\Pi_R(\sigma_{ij}, u_i) = \int_{\Omega} \delta U_0^C(\sigma_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} [(\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i + \delta\sigma_{ij,j}u_i] d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} [\delta\sigma_{ij}\eta_j u_i - \sigma_{ij}\eta_j \delta u_i] d\Gamma \quad (3-29)$$

onde a variação da energia interna de deformação complementar $\delta U_0^C(\sigma_{ij})$, segundo a Figura A.1 do Apêndice A, é

$$\delta U_0^C(\sigma_{ij}^s) = \delta\sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij} = \delta\sigma_{ij}^s u_{i,j}. \quad (3-30)$$

Substituindo na equação (3-29) a discretização das tensões σ_{ij}^s expressa na equação (2-23) de acordo com as tensões referentes à solução fundamental σ_{ij}^* e t_i^* , ou seja, equações (2-30) e (2-31), a discretização dos deslocamentos u_i^d de acordo com a equação (2-21) e considerando a equação (3-30), chega-se à expressão

$$-\delta\Pi_R = \delta p_m^* [F_{mn} p_n^* - H_{mn}(d_n - d_n^b)] + \delta d_n [-H_{nm} p_n^* + (p_m - p_m^b)] = 0. \quad (3-31)$$

Para quaisquer valor de δp_m^* e δd_n , a equação (3-31) resulta no sistema de equações matriciais que governam o problema no método híbrido dos elementos de contorno,

$$\mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (3-32)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) \quad (3-33)$$

onde

$$\mathbf{F} \equiv F_{mn} = \int_{\Gamma} t_{im}^* u_{in}^* d\Gamma + \delta_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma + \delta_{mn} \quad (3-34)$$

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} t_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \quad (3-35)$$

\mathbf{F} é a matriz de flexibilidade simétrica e \mathbf{H} é uma matriz de transformação cinemática.

3.2.3

Matriz de rigidez

Da equação (3-32) é obtida a expressão \mathbf{p}^* que após ser substituída na equação (3-33), resulta em uma outra equação que é

$$\mathbf{K}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^p \quad (3-36)$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{(-1)} \mathbf{H} \quad (3-37)$$

\mathbf{K} é a matriz de rigidez simétrica que transforma deslocamentos em forças. Sendo a matriz de flexibilidade \mathbf{F} singular, precisa-se utilizar para sua inversão a técnica de inversa generalizada, que considera uma base ortonormal $\mathbf{V} \equiv V_{mr}$ do espaço das forças \mathbf{p}^* do sistema interno

$$\mathbf{F}^{(-1)} = \mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T. \quad (3-38)$$

3.3

O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno

Como consequência das investigações das propriedades das equações matriciais do método híbrido dos elementos de contorno, foi proposto o método híbrido simplificado dos elementos de contorno em [5]. O método baseia-se nas mesmas hipóteses do método híbrido dos elementos de contorno (aproximações de tensões σ_{ij} no domínio Ω e deslocamentos u_i no contorno Γ) e na suposição de que a solução fundamental em termos de deslocamentos u_i^* também é válida no contorno Γ .

3.3.1

Formulação do método

Considerando que a parte do contorno Γ_u será levada em conta somente após a formulação matricial do problema, ou seja, $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ e $\bar{t}_i \equiv t_i$,

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i d\Gamma. \quad (3-39)$$

Substituindo $\delta \varepsilon_{ij} = \delta u_{i,j}$ (obtida considerando das equações (2-4) e (2-5)). Integrando por partes e aplicando o teorema da divergência resulta

$$\int_{\Gamma} t_i^s \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^s \delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i d\Gamma. \quad (3-40)$$

Realizando a discretização dos integrandos pelas equações [3-12] e [3-13] no contorno e pelas equações [4-6] e [4-7] no domínio, considerando as equações [2-27] e [2-28], obtemos

$$\delta d_n \left[\left(\int_{\Gamma} t_i^s \delta u_i d\Gamma - \delta_{im} u_{in} \right) p_m^* - \int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_j u_{in} d\Gamma \right] = 0 \quad (3-41)$$

ou

$$\delta d_n [H_{mn} p_m^* - p_n + p_n^p] = 0 \quad (3-42)$$

onde, para qualquer valor de δ_n , resulta na equação matricial de equilíbrio

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p). \quad (3-43)$$

Observamos que a equação (2-25), onde o campo de deslocamentos u_i^s do corpo elástico é expresso a partir do campo de tensões σ_{ij}^s definido pelas equações (2-23) e (2-30), em princípio válida para o domínio pode ser estendida para ser utilizada no contorno e reescrita em forma conveniente como

$$u_{im}^* p_m^* + u_{is}^r C_{sm} p_m^* = u_i^s - u_i^p \quad \text{em } \Gamma. \quad (3-44)$$

Avaliando a equação (3-44) nos pontos nodais ao longo do contorno Γ e escolhendo um conjunto de funções de deslocamentos de corpo rígido u_{is}^r de forma que, quando medida nos pontos nodais do contorno, resulte na base ortonormal \mathbf{W} , obtém-se a equação matricial

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* + \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^p. \quad (3-45)$$

Pré-multiplicando a equação acima pelo projetor ortonormal aos deslocamentos de corpo rígido $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{W} \mathbf{W}^T$, temos

$$\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p), \quad (3-46)$$

já que $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{W} = 0$. Esta equação de compatibilidade nodal de deslocamentos juntamente com a equação de equilíbrio nodal de forças dada pela equação (3-43), formam o sistema de equações matriciais do método híbrido simplificado dos elementos de contorno.

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* &= (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* &= (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p)\end{aligned}\tag{3-47}$$

A matriz \mathbf{U}^* requer somente a avaliação da solução fundamental em termos de deslocamentos diretamente nos pontos nodais. A matriz \mathbf{H} é a matriz de transformação cinemática já estudada nos métodos anteriores.