

2 Considerações Teóricas Importantes

2.1 Conceitos básicos da teoria de elasticidade linear

Seja um corpo elástico, com interior Ω e contorno Γ (figura 2.1), sujeito a pequenos deslocamentos. Os deslocamentos de um elemento infinitesimal $d\Omega$ desse corpo são descritos pela teoria da elasticidade segundo dois sistemas de coordenadas:

- Um sistema global ou externo, onde se tem deslocamentos absolutos u_i , sobre os quais realizam trabalho duas forças externas: as forças de massa b_i (que agem no domínio Ω) e as forças de superfície t_i (que agem no contorno Γ).
- Um sistema local ou interno, onde se tem deformações ε_{ij} (deslocamentos relativos), num elemento infinitesimal do domínio $d\Omega$, gerados pelas tensões σ_{ij} .

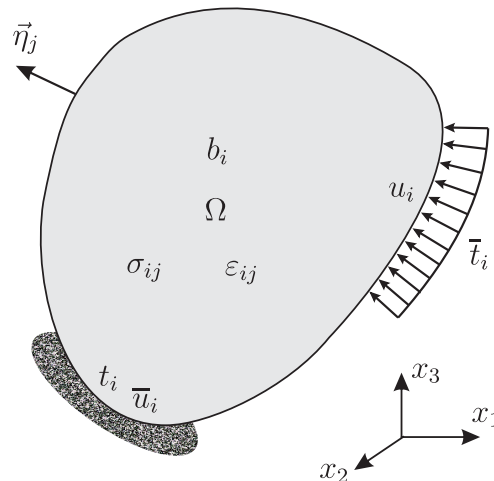


Figura 2.1: Corpo elástico equilibrado submetido à ação de forças externas, b_i e \bar{t}_i , e deslocamentos prescritos \bar{u}_i .

Decompondo o contorno Γ em Γ_σ e Γ_u (isto é, $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u$). Em Γ_σ agem as forças prescritas \bar{t}_i e em Γ_u os deslocamentos prescritos \bar{u}_i .

Formulamos o problema de elasticidade linear como segue.

Seja um conjunto de forças externas prescritas aplicadas sobre o corpo elástico, descritas no sistema global pelas forças b_i agindo em Ω e as forças \bar{t}_i agindo em Γ_σ . Uma análise desse corpo consiste em determinar: os deslocamentos u_i que ocorrem em Ω e Γ_σ ; as reações de apoio t_i que surgem em Γ_u e as tensões σ_{ij} em Ω provocados pela influência das solicitações externas.

Para determinar os valores não prescritos é necessário estabelecer relações de transformação entre forças e deslocamentos, relacionados com os sistemas interno e externo. Essas relações de transformação são descritas como segue.

As *relações de equilíbrio de forças*, que relacionam as forças descritas no sistema externo com as tensões do sistema interno, são dadas pela equação diferencial que governa o problema

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-1)$$

e a relação

$$\sigma_{ji}\eta_j = t_i \quad \text{em } \Gamma. \quad (2-2)$$

Considerando as condições de contorno, temos a relação de equilíbrio das forças de superfície

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma, \quad (2-3)$$

onde η_j são os cossenos diretores do vetor $\vec{\eta}$ normal ao contorno $d\Gamma$. Os índices i e j , associados às direções das coordenadas do sistema, assumem valores 1, 2 e 3 para problemas tridimensionais.

A propriedade de simetria do tensor de tensões, relacionado com o equilíbrio de momentos, é

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{em } \Omega. \quad (2-4)$$

As *relações de compatibilidade* entre as deformações no sistema interno e os deslocamentos no sistema externo, são chamadas relações de transformação cinemática. Para pequenos deslocamentos a relação é dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{em } \Omega, \quad (2-5)$$

onde ε_{ij} é o tensor de deformações e u_i é o campo de deslocamentos. Além disso, levando em conta as condições de contorno, tem-se a relação de compatibilidade de deslocamentos

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_u. \quad (2-6)$$

Finalmente, as *relações constitutivas* que representam as relações que existem entre o tensor de tensões σ_{ij} e o tensor de deformações ε_{ij} em qualquer ponto do corpo elástico. Essas relações podem ser simples ou complexas, dependendo do material e às condições a que é submetido o corpo. Para um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, a relação constitutiva é expressa por

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2-7)$$

onde D_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas dado por

$$D_{ijkl} = \frac{2Gv}{1-2v}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2-8)$$

sendo v o coeficiente de Poisson, G o coeficiente de elasticidade transversal ou de cisalhamento e δ_{ij} é o delta de Kronecker definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2-9)$$

Considerando as equações (2-4) e (2-5), reescreve-se a equação (2-7) como

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}u_{k,l}. \quad (2-10)$$

Substituindo a equação (2-8) e considerando a condição de simetria da matriz constitutiva D_{ijkl} , a equação (2-10) é expressa na como

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2Gv}{1-2v}u_{k,k}\delta_{ij}. \quad (2-11)$$

Utilizando a equação (2-11), também é possível expressar a equação (2-1) em termos do campo de deslocamentos u_i , resultando na equação de Navier

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{1-2v}u_{k,ki} + b_i = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \quad (2-12)$$

2.2

Conceitos básicos da teoria de potencial em regime permanente.

Seja um corpo homogêneo qualquer, com interior Ω e contorno Γ (figura 2.2). Considere ainda a decomposição do contorno Γ em Γ_q e Γ_u . O corpo homogêneo é submetido a uma fonte interna de energia Q em seu domínio Ω

e a fontes prescritas de energia \bar{q}_n ao longo de Γ_q . O potencial \bar{u} é prescrito na parte do contorno complementar Γ_u .

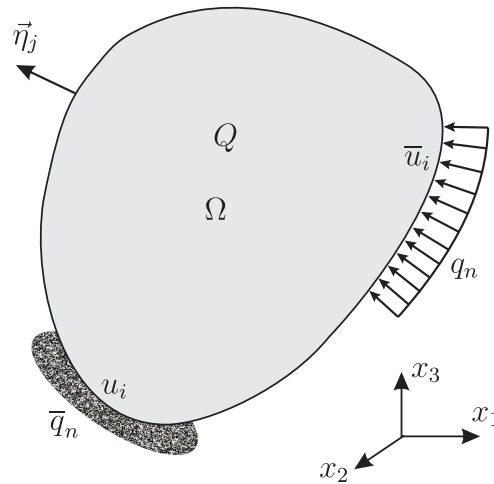


Figura 2.2: Corpo homogêneo submetido a ações de fontes externas de energia, Q e \bar{q}_n , e potencial prescrito \bar{u} .

Geralmente, a taxa do fluxo q_i na direção i , é relacionada com o gradiente de certo potencial u_i . Essa relação é expressada como

$$q_i = -k_n u_{,i} \quad \text{em } \Omega, \quad (2-13)$$

onde k_n é a condutividade do material.

A partir do equilíbrio entre a taxa gerada pela fonte Q por unidade de volume com a taxa de fluxo q_i em estado permanente tem-se

$$q_{i,i} + Q = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2-14)$$

Substituindo a equação (2-13) em (2-14), considerando o material sendo isotrópico, chega-se à equação diferencial que governa o problema de potencial

$$k_n u_{,ii} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2-15)$$

A equação acima pode-se reescrever na forma da equação de Poisson

$$u_{,ii} - \frac{Q}{k} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2-16)$$

onde $k_n = k_x = k_y = k_z$. No caso de problemas de potencial sem fonte interna Q , a equação de governo se torna a equação de Laplace, ou seja,

$$u_{,ii} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2-17)$$

No contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$, o fluxo q_n , normal à superfície, é expresso por

$$q_n = -q_i \eta_i \quad \text{em } \Gamma, \quad (2-18)$$

onde η_j são os cossenos diretores do vetor $\vec{\eta}$ que é normal à superfície $d\Gamma$. Além disso, considerando as condições de contorno, temos a relação de compatibilidade de potencial

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2-19)$$

e a relação de equilíbrio de fluxo normal

$$q_n = \bar{q}_n \quad \text{em } \Gamma_q. \quad (2-20)$$

2.3

Discretização dos deslocamentos, das tensões e das forças de superfície

Três campos independentes são necessários para o desenvolvimento do presente trabalho. O campo de deslocamentos no contorno u_i^d , o campo de tensões no domínio σ_{ij}^s e o campo das forças de superfície no contorno t_i^t .

2.3.1

Discretização dos deslocamentos no contorno

O campo de deslocamentos u_i ao longo do contorno Γ é, explicitamente, aproximado por u_i^d . Onde u_i^d indica a discretização do deslocamento u_i no contorno, em termos das funções de interpolação polinomiais u_{im} com suporte compacto e parâmetros de deslocamentos nodais $\mathbf{d} = [d_m] \in \mathbb{R}^{n^d}$, para n^d graus de liberdade do modelo discretizado. Isto é,

$$u_i^d = u_{im} d_m \quad \text{em } \Gamma, \quad (2-21)$$

de tal forma que

$$u_i^d = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u. \quad (2-22)$$

2.3.2

Discretização das tensões no domínio

O campo de tensões σ_{ij} no domínio Ω , é aproximado por σ_{ij}^s . Onde σ_{ij}^s denota as tensões no domínio Ω como uma soma de uma solução fundamental σ_{ijm}^* com suporte global, multiplicado pelos parâmetros de força $\mathbf{p}^* = [p_m^*] \in \mathbb{R}^{n^*}$,

aplicados nos mesmos pontos nodais m do contorno aos quais os deslocamentos nodais d_m estão associados ($n^* = n^d$) e uma solução particular arbitraria σ_{ij}^p

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p = \sigma_{ijm}^* p_m^* + \sigma_{ij}^p \quad \text{em } \Omega \quad (2-23)$$

de tal forma que a equação (2-1) reescrevesse como

$$\sigma_{jim,j}^* = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{ji,j}^p + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2-24)$$

A partir do campo de tensões σ_{ij}^s da equação (2-23), obtém-se deslocamentos

$$u_i^s = u_i^* + u_i^r + u_i^p = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) p_m^* + u_i^p \quad \text{em } \Omega, \quad (2-25)$$

onde u_{im}^* são os deslocamentos da solução fundamental correspondente a σ_{ijm}^* e o deslocamento u_i^p é a parcela que corresponde à solução particular σ_{ij}^p . Deslocamentos de corpo rígido são incluídos em termos de funções u_{is}^r multiplicados por constantes (em princípio) arbitrárias $C_{sm} \in \mathbb{R}^{n^r \times n^*}$, onde n^r é o número de deslocamentos de corpo rígido do problema discretizado. Os índices $()^*$ e $()^r$ denotam, respectivamente, a solução fundamental e os deslocamentos de corpo rígido. As soluções fundamentais são utilizadas como funções de ponderação no método dos elementos de contorno convencional. Em métodos de elementos de contorno variacionais (caso do método híbrido dos elementos de contorno), em particular, representam funções de interpolação do domínio.

2.3.3

Discretização das forças de superfície no contorno

O campo de forças de superfície t_i ao longo do contorno Γ , é aproximado por t_i^t , onde $()^t$ esta associado às forças de superfície, como requerido no método dos elementos de contorno convencional e é dado por

$$t_i^t = u_{i\ell} t_\ell \quad \text{discretização convencional} \quad (2-26)$$

No entanto, no *método expedito dos elementos de contorno* a discretização utilizada será uma versão proposta por Dumont [13], modificação que traz vantagens quando tratamos com contornos curvos e é dado por

$$t_i^t = t_{i\ell} t_\ell \equiv \frac{|J|_{(at\ell)}}{|J|} u_{i\ell} t_\ell \quad \text{discretização modificada.} \quad (2-27)$$

Ao longo de Γ_σ , de acordo com a equação (2-3), a equação mantém-se como $\bar{t}_i^t = t_{i\ell}\bar{t}_\ell$.

Na equação (2-27), $u_{i\ell}$ denotam as funções de interpolação polinomiais com suporte compacto e $\mathbf{t} = [t_\ell] \in \mathbb{R}^{n^t}$ são parâmetros de forças de superfície. O índice i refere-se às direções das coordenadas do sistema e o índice ℓ a qualquer um dos n^t graus de liberdade relacionados com as forças de superfície do problema (denotando tanto a localização e orientação) para nós adequadamente distribuídos ao longo do segmento de contorno Γ . As funções de interpolação $u_{i\ell}$ têm as mesmas propriedades das funções de interpolação u_{im} apresentadas na equação (2-21).

Na equação (2-27), $|J|_{(at\ell)}$ é o valor do Jacobiano das coordenadas globais (x, y, z) em função das coordenadas naturais (ξ, η) nos pontos nodais ℓ . A expressão $|J|_{(at\ell)}/|J|$ apresenta um termo no denominador que cancela-se com o termo Jacobiano do segmento de contorno infinitesimal $d\Gamma = |J|d\xi d\eta$ na expressão integral das equações (3-25), (3-26) e (4-5). Isto, não apenas melhora a capacidade de t_i^t para representar as forças de superfície ao longo de segmentos de contornos curvos, também simplifica a integração numérica dos termos relacionados [13].

O número de graus de liberdade para as forças de superfície n^t e deslocamentos n^d não são necessariamente os mesmos, desde que mais de um parâmetro de força de superfície seja associado com uma descontinuidade num nó do contorno, onde os segmentos adjacentes apresentam diferentes normais exteriores [13]. Como consequência temos que $n^t \geq n^d$. É importante ressaltar que t_ℓ , na equação (2-27), tem atributos de forças de superfície nas extremidades do segmento de contorno. Enquanto u_{im} , na equação (2-21), tem atributos de deslocamento em pontos nodais.

2.4

Aproximação da solução particular no contorno

Dada uma malha, suficientemente refinada no contorno Γ , os deslocamentos u_i^p e as forças de superfície t_i^p relacionados com uma solução particular arbitrária da parcela não homogênea da equação (2-1) podem ser aproximadas com precisão suficiente por parâmetros de deslocamentos nodais $\mathbf{d}^p = [d_m^p] \in \mathbb{R}^{n^d}$ e parâmetros de forças de superfície $\mathbf{t}^p = [t_\ell^p] \in \mathbb{R}^{n^t}$, respectivamente, em termos das funções de interpolação das equações (2-21) e (2-27) da seguinte maneira

$$u_i^p \approx u_{im}d_m^p, \quad t_i^p = \sigma_{ij}^p \eta_j \approx t_{i\ell}t_\ell^p \quad \text{em } \Gamma, \quad (2-28)$$

sempre que uma solução particular arbitrária para as forças de massa b_i seja conhecida em termos de deslocamentos u_i^p e tensões σ_{ij}^p . Esta aproximação pode

tornar as equações subsequentes em simples, elegantes e de fácil manipulação [10].

2.5 Solução Fundamental.

Consideramos como solução fundamental o campo de deslocamentos u_i^* , calculado para cada direção coordenada i gerado pela ação de uma força concentrada arbitraria p_m^* com um determinado grau de liberdade m do contorno discretizado (nó do contorno), obtidos a menos de constantes relacionadas com os movimentos de corpo rígido [10].

Essa solução fundamental é expressa por

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* + c_i^r \equiv (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) p_m^* \quad \text{em } \Omega, \quad (2-29)$$

onde c_i^r e C_{sm} são, em princípio, constantes arbitrárias; u_{im}^* funções de interpolação singulares e u_{is}^r funções de interpolação referentes ao deslocamento de corpo rígido. O procedimento para calcular as funções u_{im}^* e u_{is}^r são apresentadas nas seções 2.5.1 e 2.5.2.

Considerando a equação (2-10), as tensões σ_{ij}^* associadas à solução fundamental em termos de deslocamentos u_i^* são expressas por

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* = D_{ijkl} u_{km,i}^* p_m^* \quad \text{em } \Omega. \quad (2-30)$$

Na equação (2-2), as forças de superfície t_i^* associadas à solução fundamental em termos de tensões σ_{ijm}^* são

$$t_i^* = t_{im}^* p_m^* = \sigma_{ijm}^* \eta_j p_m^* \quad \text{em } \Gamma. \quad (2-31)$$

No método dos elementos de contorno convencional, a força concentrada p_m^* é considerada com intensidade unitária e as constantes, referentes a deslocamento de corpo rígido c_i^r , não são consideradas. No método convencional dos elementos de contorno, a solução fundamental é utilizada como fator de ponderação e nos métodos híbridos dos elementos de contorno, como função de interpolação.

2.5.1 Funções de Interpolação Singulares.

As funções de interpolação singulares u_{im}^* são obtidas de modo que a solução fundamental u_i^* satisfaça a parte homogênea da equação diferencial que governa o problema de um corpo submetido a uma força concentrada arbitraria p_m^* [3, 2]. Da primeira equação de (2-24) obtemos

$$(\sigma_{jim,j}^* + \Delta_{im})p_m^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-32)$$

onde Δ_{im} é a função singular delta de Dirac, definida por

$$\Delta_{im} = \begin{cases} \infty & \text{se } i = m \quad (\text{mesmo nó}) \\ 0 & \text{se } i \neq m. \end{cases} \quad (2-33)$$

A função Δ_{im} tem a seguinte propriedade

$$\int_{\Omega} \Delta_{im} d\Omega = \delta_{im}, \quad (2-34)$$

onde δ_{im} é o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{im} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = m, \\ 0 & \text{se } i \neq m. \end{cases} \quad (2-35)$$

Na equação (2-32) observamos que para qualquer valor de p_m^* , tem-se

$$\sigma_{jim,j}^* + \Delta_{im} = 0. \quad (2-36)$$

Integrando no domínio Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \sigma_{jim,j}^* d\Omega + \delta_{im} = 0. \quad (2-37)$$

Aplicando o teorema da divergência e considerando a equação (2-31), após a integração para um contorno Γ que circunscreva o ponto de aplicação da força p_m^* , tem-se

$$\int_{\Gamma} t_{im}^* d\Gamma + \delta_{im} = 0. \quad (2-38)$$

Expressões para as soluções fundamentais, em termos de deslocamentos, são obtidos partir da equação de Navier, equação (2-12). Para problemas tridimensionais de elasticidade linear, considerando material isotrópico e homogêneo, temos

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{im} + r_{,i}r_{,m}]. \quad (2-39)$$

Para problemas em estado plano de deformações obtemos a conhecida função chamada, solução fundamental de Kelvin

$$u_{im}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\ln(r)\delta_{im} + r_{,i}r_{,m}], \quad (2-40)$$

onde

$$r_i = x_i - x_i^m \quad \text{e} \quad r = (r_i r_i)^{\frac{1}{2}} \quad (2-41)$$

sendo r a distância entre o ponto de aplicação x_i^m da força concentrada p_m^* (ponto fonte) e o ponto x_i onde queremos medir o valor da função (ponto campo). O termo $r_{,i}$ denota a derivada de r na direção i .

A expressão da solução fundamental em termos de tensões correspondente à função da equação (2-40) é dada por

$$\sigma_{ijm}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{jm} + r_{,j}\delta_{im} + r_{,m}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,m}]. \quad (2-42)$$

A expressão de p_{im}^* correspondente à função do campo de tensões da equação (2-42) é

$$p_{im}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)\delta_{im} + 2r_{,i}r_{,m} \right] \frac{\partial r}{\partial \eta} - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_m + r_{,m}\eta_i). \quad (2-43)$$

Para problemas de potencial tridimensionais, considerando material homogêneo e isotrópico em regime permanente, tem-se

$$u_{im}^* = \frac{1}{4k\pi r} \quad (2-44)$$

com fluxos

$$q_x^* = \frac{-x}{4k\pi r^3}, \quad q_y^* = \frac{-y}{4k\pi r^3} \quad \text{e} \quad q_z^* = \frac{-z}{4k\pi r^3}. \quad (2-45)$$

Para problemas de potencial bidimensionais, considerando material homogêneo e isotrópico em regime permanente, temos

$$u_{im}^* = -\frac{\ln(r)}{2k\pi}, \quad (2-46)$$

com fluxos

$$q_x^* = \frac{x}{2\pi r^2} \quad \text{e} \quad q_y^* = \frac{y}{2\pi r^2}. \quad (2-47)$$

2.5.2

Funções de interpolação referentes aos deslocamentos de corpo rígido

É conveniente considerar funções de interpolação normalizadas u_{is}^r de modo que, quando avaliadas no contorno Γ para cada grau de liberdade s , resultem em uma base ortonormal de deslocamentos de corpo rígido $W_{ms} \equiv \mathbf{W}$.

Supondo que essas funções normalizadas $u_{is}^r \equiv \mathbf{u}^r$ possam ser obtidas a partir de funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido $\tilde{u}_{is}^r \equiv \tilde{\mathbf{u}}^r$ pela expressão

$$u_{is}^r = \tilde{u}_{in}^r T_{ns} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^r \mathbf{T}. \quad (2-48)$$

Para cada grau de liberdade m do contorno chega-se a

$$W_{ms}^r = \tilde{U}_{mn}^r T_{ns} \quad \text{ou} \quad \mathbf{W} = \tilde{\mathbf{U}}^r \mathbf{T}. \quad (2-49)$$

Pré-multiplicando por \mathbf{W}^T e sabendo que $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} a matriz de identidade, chegamos a

$$\mathbf{T} = (\mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{U}}^r)^{-1}. \quad (2-50)$$

Conhecidas as funções arbitrárias \tilde{u}_{is}^r e a base ortonormal W_{mr} , obtemos T_{ss} e u_{is}^r .

Para problemas de elasticidade, em estado plano de deformações, pode-se utilizar como funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido

$$\tilde{u}_{is}^r \equiv \tilde{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

e para problemas bidimensionais de potencial

$$\tilde{u}_{is}^r \equiv \tilde{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2-52)$$