1
Introdução

1.1
Colocação do problema

Muitos problemas da engenharia, ao serem formulados matematicamente, conduzem a ter que resolver equações diferenciais que envolvem uma ou mais funções incógnitas sob certas condições iniciais e de contorno. Com o advento da computação, diversos métodos numéricos têm sido desenvolvidos.

Um poderoso método desenvolvido para resolver diversos problemas da engenharia é o chamado *método dos elementos finitos*. Esse método baseia-se em subdividir a geometria ou estrutura de um corpo em elementos menores, chamados *elementos finitos* (discretização em uma *malha* com *nós*). Desse modo, a geometria da estrutura torna-se mais simples, possibilitando resolver diversos problemas mediante cálculos numéricos aproximados. Entre os diferentes métodos de elementos finitos, destacamos o método formulado por Theodore H. H. Pian e Pin Tong [28], baseado em *princípios variacionais*.

Uma outra técnica bem sucedida na solução das equações diferenciais é o *método dos elementos de contorno* [2, 3]. O método consiste essencialmente em discretizar o contorno (fronteira ou bordo) da estrutura, permitindo tratar com sucesso os mesmos problemas resolvidos pelo método dos elementos finitos. Convencionalmente, o método de elementos de contorno não possui uma base variacional. Pois, suas equações são deduzidas a partir de uma formulação em resíduos ponderados.

Nesse sentido, em 1987, com o intuito de dar uma base variacional ao método dos elementos de contorno, N. Dumont formula o *método híbrido dos elementos de contorno* [7] —inspirado particularmente nos trabalhos de Hellinger [24], Reissner [30] e Pian [29]. A partir desse trabalho, Dumont e colaboradores desenvolveram ferramentas matemáticas e generalizações que possibilitaram a resolução, com sucesso, de diversos problemas da engenharia. Destacam-se: a técnica de superposição modal avançada para problemas dependentes do tempo; o estudo de inversas generalizadas e diversas técnicas de integração numérica, entre outros.

Em 1999, após diversos trabalhos que possibilitaram um adequado entendimento das propriedades espectrais das matrizes do método híbrido dos elementos de contorno, é proposta uma versão simplificada do método, chamada *método híbrido simplificado dos elementos de contorno* [5, 6]. A principal vantagem, dessa versão, é que os coeficientes da matriz $\mathbf{U}^*$ de deslocamentos nodais (vide equação (3-47)) são calculados de forma direta, dispensando qualquer tipo de integração, o que faz sua implementação e seu esforço computacional simples e rápido. Além disso, não é menos preciso, resolvendo os mesmos problemas, que os métodos citados nos parágrafos anteriores.

Paralelamente às pesquisas do método híbrido dos elementos de contorno e sua versão simplificada, um estudo das propriedades espectrais da matriz $\mathbf{G}$ (vide equação (3-24)), levou a uma *formulação consistente* do método, baseada na adequada consideração das constantes de corpo rígido associadas à solução fundamental [9, 13]. Esta abordagem *consistente* do método é importante para uma adequada compreensão e interpretação de algumas questões teóricas e conceituais que em geral são ignoradas pelo método convencional de elementos de contorno.

Forma *expedita* do método híbrido dos elementos de contorno

A contribuição do presente trabalho nasce nesse cenário. Como sendo, mais uma variação do método híbrido dos elementos de contorno. O método, basicamente, combina dois métodos de elementos de contorno: o desenvolvimento consistente do método convencional e os conceitos do método híbrido simplificado (com base variacional no potencial de Hellinger-Reissner). O método proposto é chamado *método expedito dos elementos de contorno*, cuja formulação é simples e computacionalmente menos dispendiosa. Diversos artigos, relacionados com a formulação e diversas aplicações do método, já foram publicados paralelamente ao desenvolvimento desta tese. Inicialmente por Dumont em 2010 [12] e posteriormente por N. Dumont e C. Aguilar em [18, 19, 20, 21, 22, 23].

No método *expedito* as matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, obtidas pelo método convencional, são obtidas de modo simples e ágil eliminando-se quase toda a integração numérica (integração que faz-se necessária no método convencional). Embora, ambas as matrizes, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, sejam *cheias*, esquemas especiais de solução podem ser implementados para diminuir drasticamente a alocação de memória e o tempo computacional requerido em uma análise numérica, simplificando bastante o problema. A equação matricial do método convencional dos elementos de contorno ($\mathbf{Hd} = \mathbf{Gt}$ sem considerar forças de massa), é substituída no método expedito, por qualquer uma das seguintes equações

$$\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{d} = \mathbf{U}^{*\mathrm{T}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} \quad \text{ou} \quad \widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{d} = \mathbf{U}^{*\mathrm{T}}\mathbf{p}$$

onde, $\widetilde{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{T}^{*\mathrm{T}}\mathbf{L}$ é uma aproximação da matriz $\mathbf{H}$. Em uma formulação de elasticidade, $\mathbf{U}^*$ e $\mathbf{T}^*$ são matrizes de deslocamentos nodais $\mathbf{d}$ e forças de superfície $\mathbf{t}$ da solução fundamental, respectivamente, obtidas para cada grau de liberdade do problema idealizado matematicamente. Da forma como a formulação é apresentada, sempre é possível usar o conceito de carregamento nodal equivalente $\mathbf{p} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}$, onde $\mathbf{L}$ é uma matriz que depende apenas das funções de interpolação do contorno e pode ser avaliada de forma analítica.

Uma característica importante da formulação proposta é a facilidade na obtenção de resultados em pontos internos. Em uma implementação computacional, para problemas mistos de condição de contorno, a equação anterior $\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{d} = \mathbf{U}^{*\mathrm{T}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}$ (ou $\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{d} = \mathbf{U}^{*\mathrm{T}}\mathbf{p}$) é substituída pelas equações

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}^* = \mathbf{p}, \qquad \mathbf{U}^*\mathbf{p}^* = \mathbf{d}.$$

A partir dessas equações, é possível montar um único sistema de equações lineares. A incógnita desse sistema é o vetor de parâmetros $\mathbf{p}^*$. Calculado este vetor $\mathbf{p}^*$, resultados em pontos internos são obtidos diretamente, sem a utilização de qualquer integral de contorno.

A formulação *expedita* é especialmente vantajosa para problemas de topologia complicada ou que requeiram soluções fundamentais complicadas. Por exemplo: problemas de dinâmica (no domínio do tempo ou da frequência); problemas axissimétricos; problemas de mecânica da fratura; problemas com gradação funcional ou de elasticidade gradiente e outros.

1.2 Objetivos

Os objetivos principais são:

1. Implementação de algoritmos computacionais para resolver problemas de elasticidade e potencial aplicando o *método expedito de elementos de contorno*. No desenvolvimento desses algoritmos, serão considerados:

   – Domínios bidimensionais: discretização do contorno com elementos lineares, quadráticos e cúbicos.
   – Domínio tridimensionais: discretização do contorno com elementos triangulares (T3 e T6) e elementos quadrilaterais (Q4 e Q8).

2. Testar os algoritmos implementados com a finalidade de avaliar a aplicabilidade do método, o esforço computacional, a convergência das variáveis envolvidas nas equações matriciais e a coerência dos resultados em diversos problemas da engenharia.

1.3 Organização do texto

A tese está dividida em seis capítulos.

O Capítulo 1 faz uma breve introdução e os objetivos da tese. No capítulo 2, apresenta-se algumas considerações teóricas necessárias na compreensão dos capítulos subsequentes. O capítulo 3, apresenta a formulação teórica dos métodos de elementos de contorno: a forma consistente do método convencional; a formulação híbrida e sua versão simplificada. O capítulo 4, apresenta o método expedito dos elementos de contorno que é uma das partes principais da tese. O capítulo 5, aplica o método expedito dos elementos de contorno em diversos problemas numéricos de elasticidade linear e potencial. Os resultados são comparados com soluções analíticas, caso existam, com o intuito de validá-los. Finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.