

2 Formulação

2.1. Revisão bibliográfica de membrana e endentação

A análise de estruturas sujeitas a grandes deformações tem seu início com os trabalhos pioneiros de Rivlin [2,3] em elasticidade não linear. Este trabalho, por sua vez faz uso da notação e análise propostas por Green e Adkins [4].

Avanços mais recentes no campo da elasticidade finita podem ser encontrados em Libai e Simmonds [5] assim como em Fu e Ogden [6].

A escolha do funcional de energia correto para cada material estudado é de fundamental importância em sua caracterização para uma análise que faça uso da teoria de elasticidade por deformações finitas. Os funcionais mais simples e portanto mais limitados são o Neo Hookeano que é uma variação do modelo de Mooney-Rivlin [7] e o modelo de Mooney-Rivlin em si.

Já Ogden [8], Yeoh [10], e Arruda e Boyce [11], dentre outros, propuseram modelos de ordem maior que um e portanto mais complexos e abrangentes para a caracterização de materiais hiperelásticos, borrachas e elastômeros, dentre outros. Selvadurai [12], assim como Saccomandi e Ogden [13] apresentam uma análise crítica de diversos modelos para materiais hiperelásticos.

O estudo das deformações em uma membrana hiperelástica é um problema clássico de aplicação da teoria de deformações finitas em elasticidade. Alguns exemplos são encontrados em Green e Adkins [4] assim como em Rivlin e Saunders [14]. Já o trabalho de Wong e Shield [15] apresenta um estudo sobre deformações planas em uma membrana composta por um material neo-Hookeano, mostrando que quando esta é submetida a grandes deformações no sentido meridional o problema que é altamente não linear pode ser reduzido com uma solução linear.

O trabalho de Wineman et al. [16] apresenta um estudo de como a partir do perfil deformado de uma membrana e da distribuição de deformações, pode-se obter uma caracterização do material.

O trabalho de Garcia R., Ruiz S. e Lopez [17] apresenta um interessante relato sobre a caracterização de materiais hiperelásticos e suas peculiaridades. São apresentados neste trabalho estudos sobre as relações entre a caracterização feita a partir dos resultados de tensão vs. deformação obtidos por ensaios uniaxiais e biaxiais.

Em Roylance [18] pode ser encontrada uma descrição básica do modelo de análise por elementos finitos, quais as equações, e como são resolvidas pelos softwares que executam estes tipos de cálculos, por exemplo o Abaqus, software utilizado nesta dissertação.

Já Pamplona [19], [20] possui diversos trabalhos onde são apresentadas análises de deformações finitas em membranas.

2.2. Invariantes de deformação

As leis constitutivas utilizadas na análise numérica do problema da membrana são escritas em termos dos invariantes de deformação da membrana. Sendo conhecidas as componentes de deformação e a lei constitutiva do material pode-se obter a função densidade de energia de deformação da membrana w .

Assim, os invariantes de deformação da superfície média da membrana são dados, em função das componentes dos tensores métricos, por:

$$I_1 = \lambda_3^2 + a^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

$$I_2 = \lambda_3^2 \frac{A}{a} a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + \frac{A}{a} \quad (2.2)$$

$$I_3 = \lambda_3^2 \frac{A}{a} \quad (2.3)$$

onde λ_3 é a extensão na direção normal à superfície da membrana.

Sendo I_3 a relação entre os volumes inicial e final de um elemento infinitesimal da membrana, e sendo considerando a borracha utilizada nesta análise um material incompressível (Treolar, 1975), temos:

$$I_3 = 1 \quad (2.4)$$

Aplicando a condição acima e substituindo as componentes dos tensores métricos na equação (2.3), obtêm-se as extensões:

$$\lambda_i = \frac{dS_i}{ds_i} \quad (2.5)$$

Sendo dS_i um elemento da membrana deformada, e ds_i um elemento da membrana indeformada, ambos descritos na direção principal I, temos:

$$\lambda_1 = \frac{dS}{d\rho} = \frac{dR}{d\rho} = R' \quad (2.6)$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi R}{2\pi\rho} = \frac{R}{\rho} \quad (2.7)$$

$$\lambda_3^2 = \frac{a}{A} = \lambda^2 = \frac{\rho^2}{R^2 R^2} \quad (2.8)$$

Sendo $i=1$ a direção radial, $i=2$ a direção circunferencial e $i=3$ a direção normal à superfície.

Substituindo as expressões apresentadas nas equações (2.6), (2.7), (2.8) nas equações (2.1), (2.2) e (2.3) tem-se para os outros invariantes de deformação as relações abaixo:

$$I_1 = R'^2 + \frac{R^2}{\rho^2} + \lambda^2 \quad (2.9)$$

$$I_2 = \frac{1}{R'^2} + \frac{\rho^2}{R^2} + \lambda^2 \quad (2.10)$$

2.2.1. Energia de deformação

A energia elástica de deformação, E , é obtida pela integração, no volume indeformado, da função densidade de energia de deformação, w , que é o potencial elástico medido por unidade de volume do corpo indeformado, ou seja, está relacionada a uma característica intrínseca do material utilizado. Logo, tem-se que:

$$E = \int_V w dV \quad (2.11)$$

onde V é o volume da membrana no seu estado indeformado.

Considerando-se o material incompressível, a função densidade de energia de deformação depende apenas do primeiro e segundo invariantes de deformação. Considerando-se um material Neo-Hookeano, Mooney Rivlin ou Ogden, tem-se os valores de w mostrados na Tabela 2.1:

Tabela 2.1 - Funções densidade de energia

Neo-Hookeana	$w = C_1(I_1 - 3)$
Mooney Rivlin	$w = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$
Ogden	$w = \sum_{i=1}^n \mu_n \frac{(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3)}{\alpha_n}$

A função densidade de energia de deformação para o material Neo-Hookeano depende apenas de uma constante, C_1 , enquanto para caracterizar o material dito de Mooney Rivlin, precisa-se determinar duas constantes elásticas, C_1 e C_2 . Já para um material Ogden, são necessários os parâmetros C_n, α_n onde n é o grau do polinômio.

2.3. Formulações de energia para a borracha

As formulações de energia para a borracha utilizadas neste trabalho são baseadas na função densidade de energia de deformação, w , uma função escalar que relaciona a energia de deformação de um material com o gradiente de deformação do mesmo.

A função w é usada para descrever um material usualmente hiperelástico a partir do princípio de que a tensão no material pode ser obtida através da derivada da função densidade de energia em relação à deformação do material.

Para um material hiperelástico e isotrópico esta função relaciona a energia potencial elástica armazenada apenas à deformação do material, não levando em conta os efeitos de histerese e dissipação de calor.

2.3.1. Neo-Hookeano

O modelo neo-hookeano foi proposto inicialmente por Ronald Rivlin em 1948 para caracterizar a relação tensão-deformação de materiais hiperelásticos cujo comportamento é não linear. Esse modelo é baseado nas características das cadeias

poliméricas presentes nas borrachas. Essas cadeias podem mover-se em relação as outras dentro do corpo por efeito da aplicação de uma tensão. Após um valor de aproximadamente 20% de alongamento esta capacidade de deslocamento chega ao limite e as cadeias cruzadas passam a restringir o movimento, o que causa um aumento expressivo na resistência a deformação do material. Esta característica não é modelada pelo modelo Neo-Hookeano, que começa a divergir dos valores experimentais para grandes deformações. Este modelo é ainda limitado para descrever tensões bi-axiais, não sendo indicado para a análise do problema em questão, onde esperam-se grandes deformações e por simetria axial, tensões em duas direções.

A densidade de energia de deformação para um material incompressível é:

$$w = C_1(I_1 - 3) \quad (2.12)$$

onde C_1 é a constante do material e I_1 é o primeiro invariante do tensor de deformação que vale:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.13)$$

onde λ_1^2 , λ_2^2 e λ_3^2 são as extensões principais.

2.3.2. Mooney-Rivlin

O modelo Mooney-Rivlin foi proposto inicialmente por Melvin Mooney em 1940 e posteriormente expresso em termos invariantes por Ronald Rivlin em 1948. É igualmente um modelo que caracteriza a relação tensão-deformação em materiais hiperelásticos onde a densidade de energia de deformação w é descrita como uma combinação linear de dois invariantes, a saber:

$$w = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (2.14)$$

Onde C_1 e C_2 são constantes do material determinadas experimentalmente e I_1 e I_2 são respectivamente o primeiro e segundo invariantes de Cauchy-Green.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.15)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (2.16)$$

2.3.3. Ogden

O modelo de Ogden para descrever o comportamento hiperelástico de materiais é o mais completo dentre os três modelos abordados neste trabalho. Foi descrito por Ray W. Ogden em 1972. Este modelo descreve o material como isotrópico, incompressível a partir da função densidade de energia abaixo.

$$w = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (2.17)$$

onde N , μ_p e α_p são constantes do material

Se o material a ser descrito for incompressível podemos reescrever a equação como:

$$w = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_1^{-\alpha_p} \lambda_2^{-\alpha_p} - 3) \quad (2.18)$$

Por comparação vemos que o modelo de Ogden se aproxima do modelo Neo-Hookeano quando $N = 1$ e $\alpha = 2$ e do modelo de Mooney-Rivlin quando $N = 2$, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -2$, sendo $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$

2.4. Formulação em Elementos Finitos

O método de análise por elementos finitos (FEA na sigla em inglês) foi inicialmente proposto por R. Courant em 1943. Este utilizou o método de Ritz para encontrar uma solução aproximada para problemas de valores de contorno, e cálculo variacional para chegar a soluções aproximadas para problemas de análise de vibrações.

Por ser um método que utiliza uma grande quantidade de cálculos similares para chegar a uma solução final para um dado problema o método de elementos finitos teve seu grande desenvolvimento após a década de 70, acompanhando o desenvolvimento da capacidade e velocidade de cálculo dos computadores disponíveis para pesquisas.

A análise por elementos finitos consiste em criar um modelo computacional dos corpos a serem analisados onde são aplicados os esforços, vibrações, gradientes de temperatura.

Esta análise pode ser dividida em três grupos, análises 1D, 2D e 3D. A análise tridimensional descreve com mais precisão os problemas em análise, contudo, por fazer uso de um modelo mais complexo demanda um maior esforço computacional, o que resulta na necessidade de computadores com maior capacidade de processamento ou em um maior tempo de simulação. Por esta razão, para problemas com alto grau de simetria ou cuja geometria é suficientemente simples, pode ser efetuada uma análise bidimensional sem grandes prejuízos à precisão dos resultados alcançados.

2.4.1. O método

O método de análise por elementos finitos se baseia em subdividir o corpo em análise em subespaços que se unem em nós. O conjunto desses nós interligados é chamado de malha. Essa malha contém as propriedades do material a ser analisado. O número de nós e sua densidade, em uma malha são definidos em função da complexidade da geometria e das tensões esperadas tanto local quanto globalmente. O aumento do número de nós em uma malha acarreta em um maior esforço computacional demandado, portanto utiliza-se a técnica de aumentar o número de nós e conseqüentemente a discretização do modelo apenas nas regiões onde esperam-se concentrações altas de tensões ou quebras de geometria. Na Figura 2.1 se observa uma malha de elementos finitos usada neste trabalho. É possível identificar uma maior discretização no topo da membrana devido ao fato de que é nesse local que ocorrem as maiores tensões e conseqüentemente as maiores deformações, além de descontinuidade da geometria.

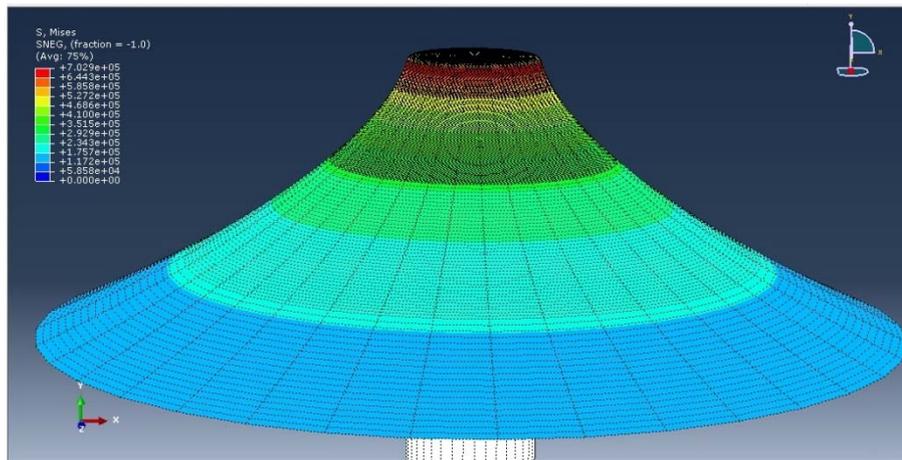


Figura 2.1- Malha de elementos finitos

A malha de elementos finitos (Figura 2.1) tem características de uma teia onde cada nó está ligado aos nós vizinhos por vetores que transmitem os esforços e características do material a fim de propagar os efeitos dos agentes externos pelo corpo.

2.4.2. Elementos de Membranas, de Cascas e Sólidos

Existem diversos tipos de elementos que podem ser utilizados em um modelo de elementos finitos. A escolha do tipo de elemento a ser utilizado é feita em função da análise que se deseja fazer, da complexidade geométrica dos corpos e dos parâmetros computacionais utilizados.

A ordem de um elemento se refere à interpolação dos resultados dos nós deste para o seu interior. Isto é, determina como os resultados da análise podem variar dentro de um elemento, é de grande importância se há no modelo grandes gradientes de tensões.

No caso da endentação estudada é de grande importância já que há grandes quebras de linearidade nas tensões presentes em uma pequena parte da membrana. A ordem de um elemento genérico pode ser linear ou quadrática.

Elementos lineares não possuem nós intermediários. Em geral, a tensão só pode variar linearmente de um nó para outro. Em alguns programas os elementos lineares podem possuir características como dimensões extras ou integração total. Essas características fazem elementos lineares terem características mais próximas a elementos quadráticos.

Estes têm ainda uma grande vantagem sobre elementos quadráticos já que são computacionalmente mais leves e, portanto reduzem o tempo de processamento e a exigência de capacidade computacional.

Os elementos quadráticos possuem nós intermediários. Enquanto elementos lineares são planos nos dois lados, os elementos quadráticos podem ter formas diferentes de curvatura em ambas as direções e, portanto são capazes de realizar uma análise mais precisa para um mesmo número de nós, em relação a um modelo com elementos lineares.

2.5.

O processo de endentação, penetração e ruptura

O processo de endentação, penetração e ruptura de uma membrana ocorrem consecutivamente conforme o endentor se desloca verticalmente durante um ensaio.

O limite entre a endentação e a penetração (Figura 2.2) é descrito como o ponto onde o perfil lateral da geometria da membrana assume uma tangente vertical, como visto na figura abaixo, ou ainda o ponto imediatamente anterior ao estágio em que passa a haver contato da membrana com a lateral do endentor.

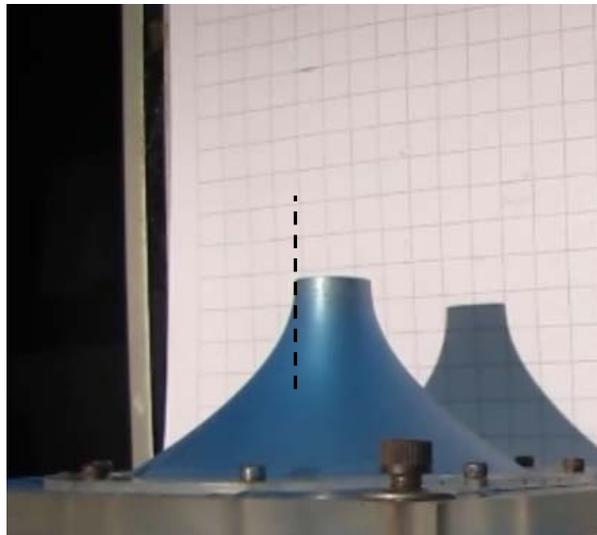


Figura 2.2 - Ponto limite entre endentação e penetração

A membrana deformada após a penetração pode ser separada em três partes discriminadas na Figura 2.3, sendo a inferior descrita como tronco de cone, a região onde não há contato com o endentor. A superior como cilindro, região que está em

contato com o endentor, e por último o topo, região circular plana que cobre o topo do endentor.

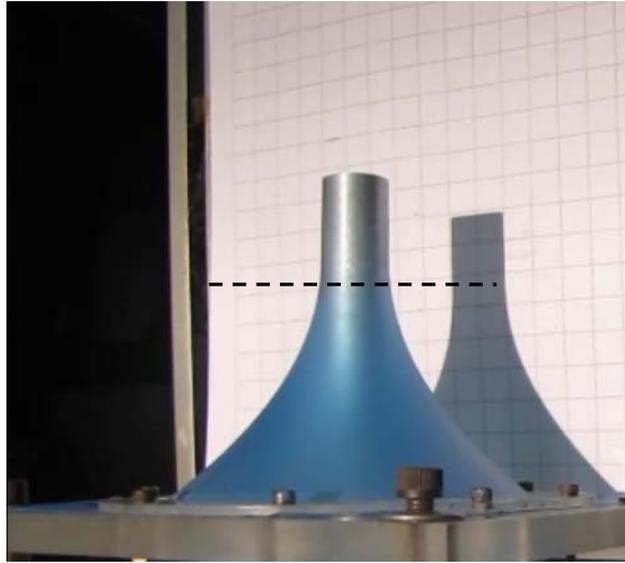


Figura 2.3 - Limite de descolamento

Para o caso onde este processo ocorre sem interferência do atrito na região de contato entre a membrana e o endentor, a partir do ponto limite do fim da endentação, o tronco de cone da membrana permanece fixa e apenas a porção que se encontra cobrindo o topo do endentor deforma-se para formar a região de forma cilíndrica que acompanha a área lateral do endentor.

2.6. O endentor

O endentor utilizado é um objeto de formato cilíndrico alongado feito de alumínio, sua função é provocar uma deformação no sentido transversal ao plano da membrana.



Figura 2.4 - Endentores

Este é modelado como um sólido rígido uma vez que os esforços e deslocamentos imprimidos à membrana não são capazes de modificar significativamente suas propriedades físicas ou sua geometria. Foram utilizados nos ensaios deste trabalho dois endentores com diâmetros diferentes (Figura 2.4).

Na borda superior do endentor foi feito um arredondamento para que este não tenha cantos vivos que possam cortar a membrana que estará em contato com ele.