

## 2

### Estimativas do fator de intensidade de tensão

A mecânica da fratura é uma área que também caracteriza o crescimento da trinca por fadiga. Adotadas as hipóteses da mecânica da fratura linear elástica (MFLE), o fator de intensidade de tensão (FIT) é o parâmetro usado para determinar os incrementos de trinca durante seu crescimento.

Neste capítulo são apresentados tópicos importantes relacionados ao FIT, enfatizando suas aplicações neste trabalho. O problema de propagação da trinca por fadiga é abordado no próximo capítulo (Capítulo 3).

Revisões de conceitos importantes de mecânica da fratura podem ser encontradas em diversos livros. Os livros de Janssen et al. (2006), Anderson (2005), Castro & Meggiolaro (2009) e Unger (1995) são representativos nesta área e usados neste capítulo.

#### 2.1.

##### Modos de fratura de teoria de elasticidade tri-dimensional

O campo de tensão na ponta da trinca pode ser dividido em três maneiras distintas, cada maneira é associada a um modo local de fratura. Elas são comumente chamadas de modo I, modo II e modo III de fratura.

O modo I é o modo principal de fratura que ocorre quando duas superfícies (faces) de uma trinca são separadas por tração, que é aplicada perpendicularmente ao plano da trinca, conforme é mostrado na Figura 2.1(a). Nesta tese, o carregamento remotamente aplicado de flexão pura induz tração em um trecho da frente da trinca. Conseqüentemente, o modo I de abertura é o único modo de crescimento nesse trecho da trinca.

O modo II é chamado de modo de fratura por deslizamento (*sliding*). Ele ocorre quando é aplicado cisalhamento no plano da trinca. O modo II é mostrado na Figura 2.1(b). Adicionalmente, o modo III é referido ao modo de fratura por

rasgamento (*tearing*). Esse modo de fratura tem carregamento de cisalhamento fora do plano (ver Figura 2.1(c)).

Todos os campos de tensões e deslocamentos na vizinhança da ponta da trinca podem ser divididos nesses três modos. Os FITs são associados a eles, sendo referidos como  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ . Desta forma,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são, respectivamente, FIT de modo I, FIT de modo II e FIT de modo III.

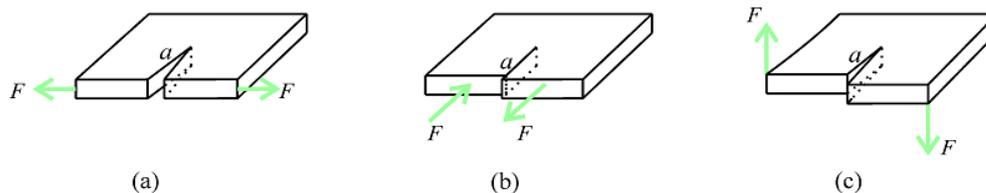


Figura 2.1 – Três modos principais de fratura: (a) Modo I, modo de abertura; (b) Modo II, modo de cisalhamento no plano e (c) Modo III, modo de rasgamento.

## 2.2. Tensões e deslocamentos em uma placa trincada infinita

Uma variedade de técnicas está disponível na literatura de mecânica da fratura para analisar tensões em corpos trincados. Williams e co-autores foram os primeiros a usar uma expansão de autofunções para investigar as tensões singulares em torno da ponta da trinca (Williams, 1952; Williams, 1957). Eles atribuíram diversas condições de contorno em uma placa trincada usando material isotrópico e ortotrópico.

Nesta seção é apresentado o campo de tensões local na ponta da trinca para os três modos de fratura, utilizando as soluções de Williams. Essas soluções serão necessárias no método da integral- $M$ , que é descrito na Seção 2.6.2.

Williams considerou uma placa infinita contendo uma trinca e deduziu soluções lineares elásticas para o campo de tensões e campo de deslocamentos nos três modos fundamentais de fratura. A dedução dessa solução pode ser encontrada em diversos livros textos; por exemplo, no livro de Unger (1995).

Uma função arbitrária  $\Phi(r, \theta)$  representa a solução plana que satisfaz tanto equação de equilíbrio quanto equação de compatibilidade do sistema. Ela é denominada por função de tensão de Airy e é escrita como

$$\Phi = r^{\lambda+1} F(\theta^*, \lambda), \quad (2.1)$$

onde

$$F(\theta^*, \lambda) = \left[ c_1 \sin((\lambda+1)\theta^*) + c_2 \cos((\lambda+1)\theta^*) + c_3 \sin((\lambda-1)\theta^*) + c_4 \cos((\lambda-1)\theta^*) \right],$$

$c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  são constantes e  $\theta^*$  é definida na Figura 2.2. Para essa solução  $F$ , existe um número infinito de valores de  $\lambda > 0$  que satisfazem as condições de contorno.

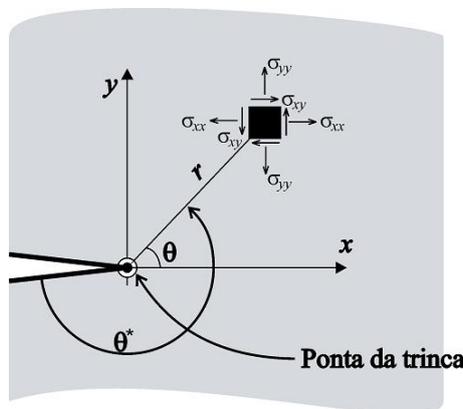


Figura 2.2 – Parâmetros usados para descrever as tensões na ponta da trinca.

As tensões biaxiais de tração  $\sigma_\infty$  remotamente aplicadas são ilustradas na Figura 2.3(a). Para o modo I, a solução assintótica associada a essas tensões aplicadas, para estado plano de tensão e estado plano de deformação, é

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $r$  e  $\theta$  foram ilustrados na Figura 2.2.  $K_I$  é definido para uma placa infinita com um comprimento de trinca  $2a$  sob um carregamento remoto de tensões de tração. Para a tensão de tração remotamente aplicada,  $K_I$  é igual a  $\sigma_\infty \sqrt{\pi a}$ .

Os deslocamentos assintóticos em torno da ponta da trinca para o modo I são

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \\ u_y &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

com  $\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{(estado plano de tensão)} \\ \frac{3-4\nu}{3-4\nu} & \text{(estado plano de deformação)} \end{cases}$ .  $\nu$  é o coeficiente de Poisson

e  $G$  é o módulo de cisalhamento, onde  $G = E/[2(1+\nu)]$ . Note que  $E$  é o módulo de elasticidade.

Utilizando a distribuição de carregamento ilustrada na Figura 2.3(b), a solução assintótica de tensões próximas a ponta da trinca para o modo II é

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$K_{II}$  é definido para uma placa infinita com um comprimento de trinca  $2a$  sob um carregamento remoto de tensões de tração com direção paralela à trinca. Assim,  $K_{II} = \tau_\infty \sqrt{\pi a}$ . Os deslocamentos assintóticos em torno da ponta da trinca causados pelo modo II são

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ u_y &= \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \kappa + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

para uma placa infinita.

Finalmente, o problema do modo III difere dos dois primeiros modos previamente apresentados. Esse modo não é um problema plano de elasticidade, já que as forças de cisalhamento atuam perpendicular ao plano da placa, conforme ilustrado na Figura 2.3(c). Desta forma, em um problema em modo III de fratura,

só existem duas componentes de tensões  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  e uma componente de deslocamento  $u_z = w(x, y)$ . Assim, a solução assintótica em torno da ponta da trinca é

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde  $K_{III} = \tau_{\infty} \sqrt{\pi a}$ . O deslocamento é

$$u_z = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\tag{2.7}$$

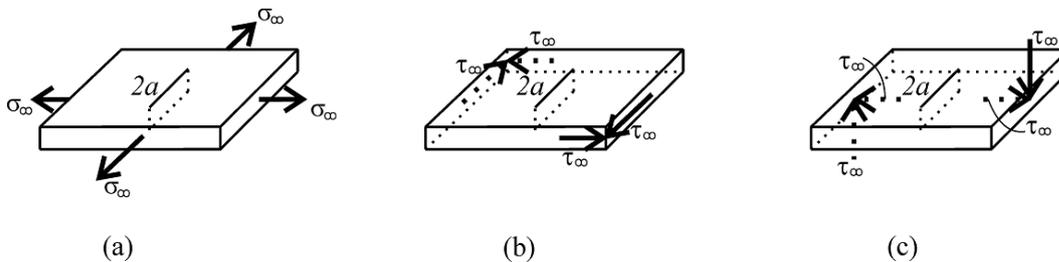


Figura 2.3 – Carregamento remoto aplicado para os três modos de fratura.

### 2.3. Trincas passantes e trincas de superfícies

Nesta seção são apresentadas as diferenças gerais entre trincas passantes e trincas de superfícies. Embora estes dois tipos de trincas apresentem suas faces perpendiculares às superfícies da peça, as geometrias das suas frentes de trinca são diferentes.

As trincas passantes normalmente ocorrem em peças finas e suas possíveis geometrias de frentes são ilustradas na Figura 2.4 (1), (2) e (3). Na Figura 2.4 (1) é ilustrada uma frente de trinca perpendicular às superfícies da peça, que ocorre sob carregamento remotamente aplicado de tração quando se utiliza as hipóteses de MFLE. Entretanto, dependendo do material e da espessura da peça, ainda sob

este carregamento, a frente da trinca pode-se tornar ligeiramente curva, conforme ilustrado na Figura 2.4 (2).

Usualmente, essas duas geometrias de frentes de trincas (Figura 2.4 (1) e Figura 2.4 (2)) são aproximadas por uma ponta de trinca e suas faces são simplificadas por linhas (arestas). Quando a frente da trinca é ligeiramente curva, o comprimento adotado é a média dos comprimentos medidos ao longo da espessura e o incremento de trinca é assumido constante. Por esta razão, o FIT pode ser simplificado por um único valor para cada comprimento  $a$ . Além disso, o problema pode ser modelado como um problema bidimensional.

Entretanto, quando a frente da trinca, ainda que passante, apresenta bastante inclinação, o problema deve ser tratado como um problema tridimensional, pois o comportamento das tensões é tridimensional. Isto implica que o FIT varia ao longo de toda a frente da trinca.

Esse caso, que é ilustrado na Figura 2.4 (3), ocorre, por exemplo, com a adição de carregamentos remotos de flexão aos carregamentos remotos de tração. Desta forma, essa frente de trinca é curva e deve ser descrita ao longo de um plano, pois varia de comprimento em relação à espessura da placa. Por esta razão, ela é chamada de trinca bidimensional ou trinca de superfície. Além disso, caso a trinca não atravesse toda a espessura da peça, também pode ser chamada de trinca parcialmente passante, configurando assim um caso particular de trinca de superfície.

A trinca parcialmente passante ocorre em peças espessas sob carregamento de tração e/ou flexão. Em geral, ela tem menor comprimento do que uma trinca passante. As diversas geometrias de frentes de trincas parcialmente passantes são ilustradas na Figura 2.4 (4), (5), (6) e (7). Na Figura 2.4 (5) e na (7) são ainda exibidas trincas parcialmente passantes, que também são chamadas de trincas de canto.

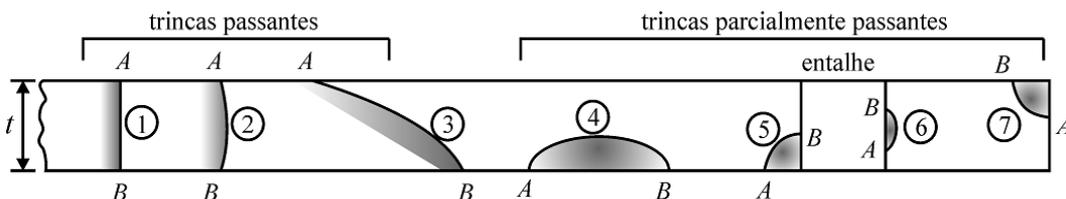


Figura 2.4 – Diferentes geometrias de frente de trinca  $AB$  para trincas passante e trincas parcialmente passantes (Schijve, 2009).

Adicionalmente, a geometria da trinca tem nomenclatura diferente em problemas bidimensionais e problemas tridimensionais. Na Figura 2.5 e na Figura 2.6 são ilustradas, respectivamente, nomenclatura de trinca passante e nomenclatura de trinca de superfície. A geometria da trinca de superfície ilustrada é compatível com o problema estudado nesta tese. Essa geometria é uma combinação de trinca passante-reta com trinca parcialmente passante.

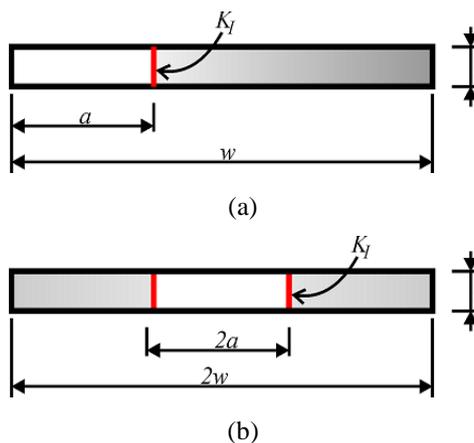


Figura 2.5 – Nomenclatura da trinca em problemas bidimensionais: (a) trinca de borda e (b) trinca central.

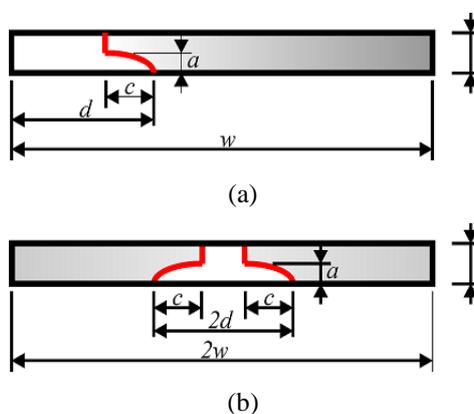


Figura 2.6 – Nomenclatura da trinca em problemas tridimensionais utilizando a geometria dos corpos-de-prova ensaiados: (a) trinca de borda e (b) trinca central.

Ressalta-se que existem duas atribuições para  $a$ , que pode ser o comprimento da trinca passante (ver Figura 2.5) ou a profundidade da trinca parcialmente passante (ver Figura 2.6).

## 2.4. FIT em peças com dimensões finitas em trincas retas e passantes

A solução do FIT é estritamente definida analiticamente para placas infinitas. Entretanto, a geometria de um corpo-de-prova com dimensões finitas influencia o campo de tensões em torno da ponta da trinca. Conseqüentemente, as expressões de FIT se modificam. Em problemas práticos é adicionado um fator de correção para capacitar o uso dessa solução.

Uma forma geral da expressão modificada de FIT é a solução clássica de Irwin, que é escrita em problemas 2D como

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{w}\right), \quad (2.8)$$

onde  $\sigma$  é a tensão máxima do carregamento remotamente aplicado,  $a$  é o comprimento da trinca e  $w$  é a largura do corpo-de-prova. A função de geometria  $f(a/w)$  é determinada por análise de tensões.

Há poucas formas fechadas para a expressão de  $f(a/w)$ , sendo que aproximações de resultados discretos obtidos por métodos numéricos são utilizadas na maioria das expressões de  $f$ . Os resultados são normalmente apresentados em gráficos que mostram  $f$  variando ao longo de razões geométricas  $a/w$ .

## 2.5. FIT em trincas bidimensionais

Como discutido no Capítulo 1 (Seção 1.3.1), Newman & Raju (1981) conseguiram representar de forma simples as geometrias de frentes de trincas bidimensionais usando curvas elípticas. Complementarmente, diversas soluções de FIT em trincas de superfície foram publicadas na literatura relacionando as distribuições de FIT com o ângulo  $\phi$  (Newman & Raju, 1981; Lin & Smith, 1999b; Perez et al., 1990).

Neste trabalho, as geometrias das frentes das trincas encontradas nos corpos-de-prova ensaiados são trincas de canto (ver Figura 2.4 (5)) no trecho da trinca que cresceu durante o ensaio (trecho sob tração). Trincas de canto,

usualmente, são aproximadas por curvas quarto-elípticas concêntricas. Entretanto, neste trabalho, uma melhor aproximação da geometria dos corpos-de-prova ensaiados, foi obtida com curvas quarto-elípticas não concêntricas, propondo-se uma expressão para obter o centro de cada curva.

Com os FITs nos pontos  $A$  e  $C$ , ver na Figura 2.7, e centro da elipse pode-se determinar a geometria da trinca no passo subsequente de uma propagação. Por esta razão, as expressões de FIT são determinadas em  $A$  ( $\phi = \pi/2$ ), em  $C$  ( $\phi = 0$ ) e, complementarmente, no trecho curvo entre  $A$  e  $C$  onde  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ . Os formatos das expressões genéricas para FITs nas frentes de trincas tratadas neste trabalho são mostradas a seguir. O FIT localizado em  $C$  é chamado de  $K_{I,c}$  (Figura 2.8(a)), o FIT em  $A$  é denominado  $K_{I,a}$  (Figura 2.8(b)) e o FIT entre  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  é  $K_I$ .

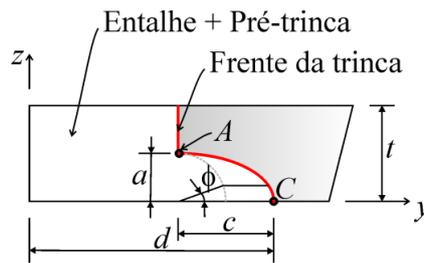


Figura 2.7 – Parâmetros usados na determinação do FIT na geometria de trinca de canto.

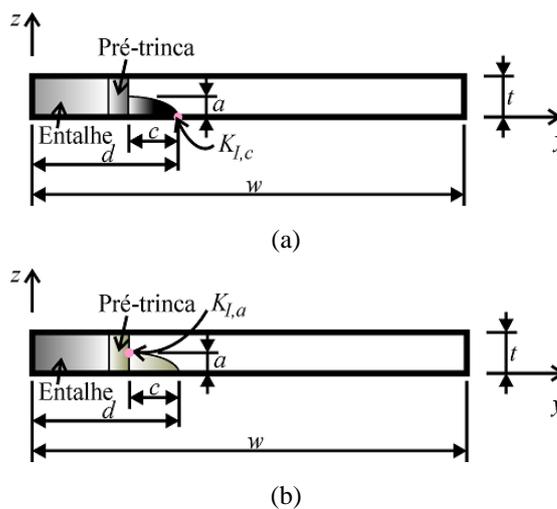


Figura 2.8 – Fator de intensidade de tensão na trinca curva: (a)  $K_{I,c}$ ; e (b)  $K_{I,a}$ .

O melhor ajuste da expressão de FIT em  $C$  é

$$K_{I,c} = \sigma \sqrt{\pi d} f(d/w), \quad (2.9)$$

onde  $\sigma$  é a tensão máxima do carregamento remotamente aplicado.  $d$  é o comprimento indicado na Figura 2.7 e na Figura 2.8.  $f$  é a função de geometria obtida com o ajuste de FIT normalizado e  $d/w$ .  $w$  é a largura da placa. Note que o FIT normalizado é determinado numericamente reproduzindo as condições de contorno e geometria do problema estudado.

Em  $A$ , o FIT é escrito como

$$K_{I,a} = \sigma \sqrt{\pi a} f(a/t). \quad (2.10)$$

onde  $t$  é a espessura da placa e  $a$  é a profundidade da trinca de canto. As demais variáveis foram previamente introduzidas.

Adicionalmente, na Figura 2.9 é indicado o ângulo  $\phi$  na geometria da trinca atual  $i$  e na geometria subsequente  $i+1$ . A expressão do FIT de  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  é

$$K_I(a/t, d/w, a/c, \phi) = \sigma \sqrt{\pi a} f(a/t, d/w, a/c, \phi). \quad (2.11)$$

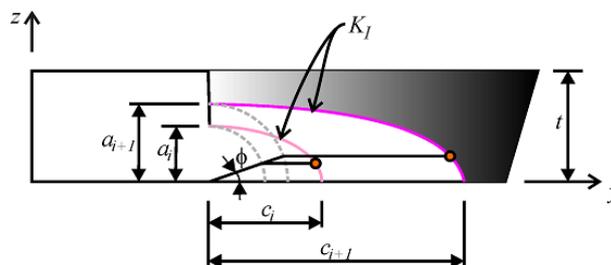


Figura 2.9 -  $K_I$  ao longo de toda a frente da trinca.

## 2.6. Cálculo numérico de FIT em problemas 3D

Dois métodos numéricos estão disponíveis no programa FRANC3D (FRANC3D, 2010) para se determinar o FIT: método da integral- $M$  e método de correlação de deslocamentos. O método da integral- $M$  é mais preciso para

determinar FIT. Por esta razão, ele foi usado inicialmente neste trabalho. Esse método utiliza os resultados de tensões e deslocamentos na frente da trinca.

Entretanto, usando este método, a distribuição do FIT calculada no trecho em contato foi negativa, ao invés de nula. Isto indicava pressões de superfície ( $p_N$ ) diferentes no trecho das faces da trinca em contato, indicando valores incorretos dessas pressões (ver Apêndice 6).

Esses valores incorretos são oriundos da concentração de elementos gerando resultados incorretos de tensões no programa de elementos finitos, o ABAQUS (Hibbitt et al., 1996). Todavia, no método de correlação de deslocamentos, os resultados de tensões não são usados. Por este motivo, o método de correlação de deslocamentos é empregado na determinação do FIT em todas as análises executadas neste trabalho.

### 2.6.1. Tensões singulares em elementos finitos

Na mecânica da fratura linear elástica (MFLE), o campo de tensões na frente da trinca é singular. Representa-se eficientemente este campo de tensões com uso de elementos finitos que contenham essas singularidades. Assim, diversos elementos foram projetados, mas um elemento muito simples foi encontrado para se reproduzir essas singularidades.

Esse elemento é obtido com a mudança do nó intermediário de um elemento isoparamétrico quadrático para a posição de 1/4 da aresta próxima à frente da trinca. Por isso, esse elemento finito é chamado de *quarter-point*.

Desta forma, o elemento *quarter-point* é aplicado com muito sucesso na MFLE, pois ele contém uma singularidade de deformação de  $1/\sqrt{r}$  das expressões do campo de tensões à frente de uma trinca em modos I, II e III (equações (2.2), (2.4), (2.6)). Por causa desse elemento, em análises de elementos finitos, a frente da trinca é disposta por uma roseta (ver Figura 2.10 (a)). Em problemas tridimensionais, a seção transversal do elemento perpendicular à frente da trinca pode ser quadrada ou triangular. No programa FRANC3D, são usadas seções triangulares do elemento na frente da trinca.

Para melhorar o refinamento da malha, podem ser utilizadas diversas camadas de elementos em torno da frente da trinca, mas apenas a primeira camada, mais próxima à frente da trinca, é composta por elementos *quarter-points*. Mais detalhes desta formulação podem ser encontrados, por exemplo, em Bathe (1996).

Como é uma análise tridimensional, a seção transversal na frente da trinca é uma roseta e essa roseta acompanha a geometria da frente, conforme ela é ilustrada na Figura 2.10 (b) em uma frente semi-elíptica. A roseta de um problema bidimensional é ilustrada na Figura 2.10 (a) e a seção transversal da roseta em um problema tridimensional é ilustrada na Figura 2.10 (b).

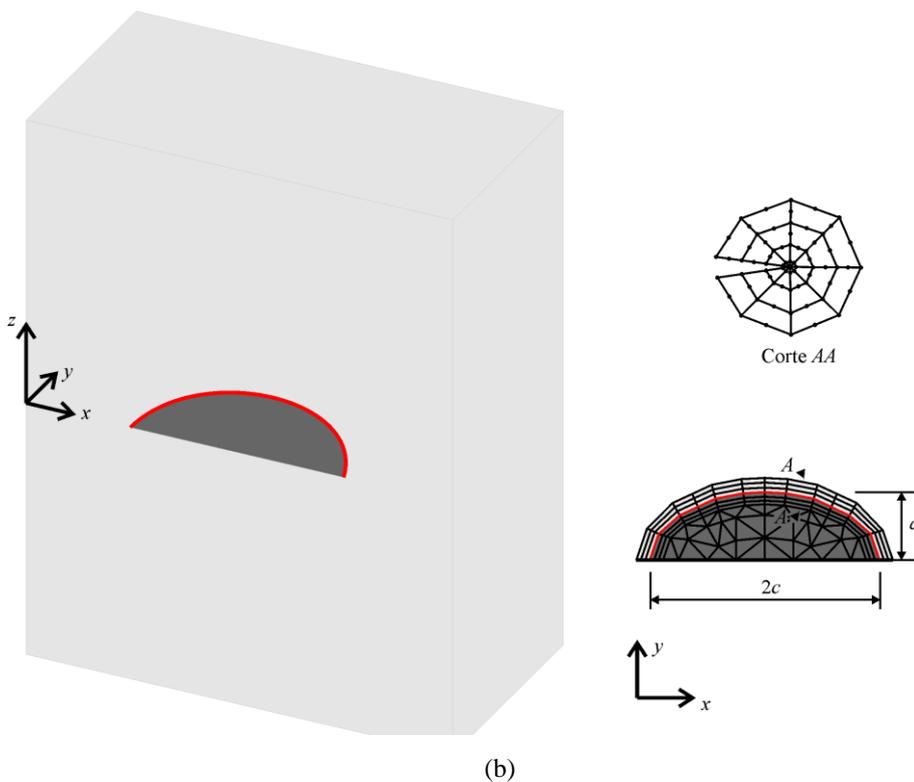
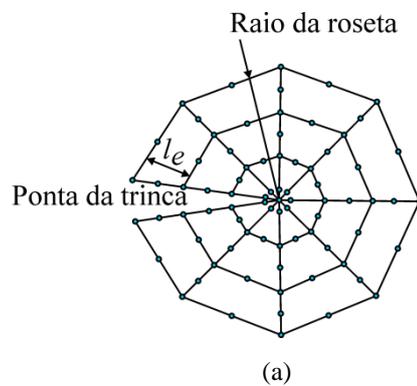


Figura 2.10 – Roseta: (a) seção transversal em problemas bidimensional e tridimensional e (b) trajetória da roseta em um problema tridimensional.

### 2.6.2. Método da integral - $M$

Nesta seção é introduzida a formulação tridimensional do método da integral- $M$  (Yau et al., 1980 e Li et al., 1985). A aplicação da integral- $M$  é mais geral do que a integral- $J$ , pois enquanto a integral- $J$  tem bons resultados só quando ocorrem carregamentos puramente em um modo de fratura (Budiansky & Rice, 1973), o método da integral- $M$  estabelece mais precisamente o FIT em peças trincadas carregadas em modos misturados.

A formulação da integral- $M$  parte de conceitos da integral- $J$ , que são conceitos bem conhecidos na mecânica da fratura. A integral- $J$  relaciona o alívio de energia potencial com extensões da trinca em material linear e não-linear (Rice, 1968). Assim, a integral- $J$  foi definida por Rice (1968) em geometrias 3D como

$$J = \int_{\Gamma} \left( W n_1 - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) ds. \quad (2.12)$$

$\Gamma$  é um contorno de integração em um caminho arbitrário em torno da trajetória no plano perpendicular a esta trajetória.  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  é um vetor unitário normal a  $\Gamma$ . O vetor  $\mathbf{T}$  é  $\sigma_{ij} n_j$ , onde o índice  $j$  varia de 1 a 3.  $ds$  é um incremento ao longo de  $\Gamma$ . Esses parâmetros são ilustrados na Figura 2.11. Note que, apenas nesta seção, a notação indexada é usada para descrever as coordenadas do eixo. Assim, no lugar de  $x$ ,  $y$  e  $z$  tem-se  $x_i$  com índice  $i$  variando entre 1 a 3.

A densidade de energia de deformação  $W$  é determinada por

$$W = W(x_1, x_2, x_3) = W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (2.13)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}\}$  é o tensor de deformação infinitesimal.

O contorno da integral- $J$  deve ser apresentado como uma integral de área equivalente em problemas 2D ou como uma integral de volume em 3D (Li et al., 1985), pois é mais preciso e estável no contexto de método dos elementos finitos.

Assim, a integral- $J$  é transformada em uma integral de área, utilizando o teorema de Green

$$J = \int_A \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} - W \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (2.14)$$

em que  $\delta_{1j}$  é o delta Kronecker,  $A$  é a área anular mostrada na Figura 2.11, e  $q$  é uma função suficientemente suave em  $A$ , que é unitária no contorno  $C_1$  e nula no contorno  $C_2$ , além de ser diferenciável ao longo da área  $A$ .

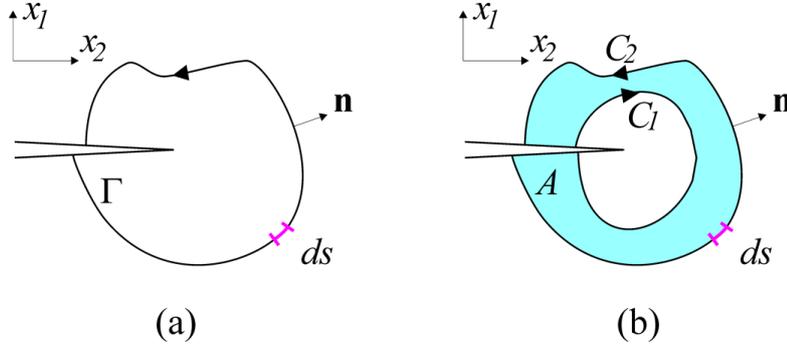


Figura 2.11 – Ponta da trinca em problemas 2D: (a) uma curva arbitrária e (b) uma área arbitrária  $A$ .

A formulação da integral- $J$  em problemas tridimensionais foi apresentada em Banks-Sills & Sherman (1992). Dois estados de equilíbrio independentes de um corpo elasticamente deformável são considerados. Às variáveis associadas a esses dois estados são atribuídos sobrescritos 1 e 2. Usando a superposição desses dois estados de equilíbrio, a integral- $J$  é obtida com

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)}, \quad (2.15)$$

onde  $J^{(1)}$  é a integral- $J$  devido ao estado de equilíbrio 1,  $J^{(2)}$  é a integral- $J$  do estado de equilíbrio 2 e  $M^{(1,2)}$  é a integral- $M$  devido aos estados de equilíbrio 1 e 2. Desta forma, a integral- $M$  é dada por

$$M^{(1,2)} = \int_V \left( \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_k} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_k} \right] - W^{(1,2)} \delta_{kj} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dV \quad (2.16)$$

em que  $W^{(1,2)} = C_{ijml} u_{i,j}^{(1)} u_{m,l}^{(2)} = C_{ijml} u_{i,j}^{(2)} u_{m,l}^{(1)}$ . As propriedades do material são definidas no tensor de rigidez  $C_{ijml}$  e  $u_i$  são as componentes dos deslocamentos.

As integrais  $J^{(1)}$  e  $J^{(2)}$  são

$$J^{(1)} = \int_V \left( \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_k} - W^{(1)} \delta_{kj} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dV \quad (2.17)$$

$$J^{(2)} = \int_V \left( \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_k} - W^{(2)} \delta_{kj} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dV, \quad (2.18)$$

onde  $\partial q_k / \partial x_j = n_j$ . A função- $q_k$  ainda não foi normalizada, por isso as expressões (2.16), (2.17) e (2.18) devem ser normalizadas pelas integrais da função  $q$ ,

$$J = \frac{J^{(1)}}{V_q} + \frac{J^{(2)}}{V_q} + \frac{M^{(1,2)}}{V_q}, \quad (2.19)$$

onde  $V_q = \int_V \partial q_k / \partial x_j dV$  (Banks-Sills & Sherman, 1992).

Por outro lado, Yau et al. (1980) apresentou um método para avaliar individualmente as soluções de FIT para cada modo de fratura da trinca sob modo misto de abertura em material isotrópico elástico. Esse procedimento é descrito a seguir.

Sob condições de escoamento de pequena escala, a integral- $J$  é igual à taxa de alívio de energia  $G$ . Para problema de deformação tridimensional, Rice (1968) definiu

$$G = J = \alpha \left( K_I^2 + K_{II}^2 \right) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.20)$$

em um carregamento geral, onde  $\alpha = \begin{cases} \frac{(1-\nu^2)}{E} & \text{(estado plano de deformação)} \\ \frac{1}{E} & \text{(estado plano de tensão)} \end{cases}$ .

O FIT pode ser determinado por superposição, assim, ele é escrito como

$$K_I = K_I^{(1)} + K_I^{(2)}, K_{II} = K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \text{ e } K_{III} = K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)}. \quad (2.21)$$

No programa FRANC3D são considerados dois estados de equilíbrio independentes. A expressão (2.21) é substituída na expressão (2.20) para se determinar a integral- $J$

$$G = J = \alpha \left( \left[ K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \right]^2 + \left[ K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \right]^2 \right) + \frac{1+\nu}{E} \left[ K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)} \right]^2. \quad (2.22)$$

Mais explicitamente, a expressão (2.22) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 G = J = & \left[ \alpha \left( K_I^{(1)} \right)^2 + \alpha \left( K_{II}^{(1)} \right)^2 + \frac{1+\nu}{E} \left( K_{III}^{(1)} \right)^2 \right] + \\
 & + \left[ \alpha \left( K_I^{(2)} \right)^2 + \alpha \left( K_{II}^{(2)} \right)^2 + \frac{1+\nu}{E} \left( K_{III}^{(2)} \right)^2 \right] + \quad . \quad (2.23) \\
 & + 2 \left[ \alpha K_I^{(1)} K_I^{(2)} + \alpha K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)} \right]
 \end{aligned}$$

Uma comparação direta entre a equação (2.15), (2.20) e (2.23), revela que

$$M^{(1,2)} = 2 \left[ \alpha K_I^{(1)} K_I^{(2)} + \alpha K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)} \right]. \quad (2.24)$$

A integral- $M$  definida nas expressões (2.16) e (2.24) pode ser usada diretamente para resolver problemas de trinca em modo misto em um sólido elástico-linear. As soluções independentes indicadas pelo sobrescrito dois (2) são as soluções de Williams, apresentadas na Seção 2.2. Já as soluções denotadas pelo sobrescrito 1 são as soluções obtidas pelo programa tridimensional de elementos finitos.

O FIT adotado na solução 2 é  $K_I^{(2a)} = K_{II}^{(2b)} = K_{III}^{(2c)} = 1$ , e

$$\begin{aligned}
 K_{II}^{(2a)} &= K_{III}^{(2a)} = 0 \\
 K_I^{(2b)} &= K_{III}^{(2b)} = 0 \quad . \\
 K_I^{(2c)} &= K_{II}^{(2c)} = 0
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Na reprodução do campo de deslocamentos e campo de tensões da frente da trinca com as soluções de Williams, são atribuídas amplitudes de FITs unitárias, pois se deseja determinar apenas a amplitude (o FIT) com as soluções de elementos finitos.

Substituindo essa solução 2 em (2.25)

$$\begin{aligned}
 M^{(1,2a)} &= \left[ 2\alpha K_I^{(1)} \right] \\
 M^{(1,2b)} &= \left[ 2\alpha K_{II}^{(1)} \right] \quad . \\
 M^{(1,2c)} &= \left[ 2 \frac{1+\nu}{E} K_{III}^{(1)} \right]
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para essas três configurações de equilíbrio, o FIT no programa tridimensional de mecânica da fratura é obtido com as seguintes expressões

$$\begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_I^{(1)} \\ K_{II}^{(1)} \\ K_{III}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M^{(1,2a)}/A_q \\ M^{(1,2b)}/A_q \\ M^{(1,2c)}/A_q \end{Bmatrix}, \quad (2.27)$$

onde

$$M = \int_V \left( \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_k} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_k} \right] - W^{(1,2)} \delta_{kj} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dV. \quad (2.28)$$

### 2.6.3. Método de correlação de deslocamentos

O método de correlação de deslocamentos para geometrias tridimensionais foi apresentado em Ingraffea & Manu (1980). Eles utilizaram um elemento finito hexaédrico do tipo *Serendipity*, com interpolação quadrática de deslocamentos, com 20 nós, e com uma face degenerada em uma aresta. Embora o programa FRANC3D utilize o elemento finito sólido C3D15 do ABAQUS, a interpolação dos deslocamentos nesses elementos (hexaédrico com face degenerada e C3D15) é semelhante. Contudo, a formulação do elemento C3D15 é diferente, como pode ser encontrado em Hibbitt et al. (1996).

A configuração do elemento C3D15 em coordenadas cartesianas com *quarter-point* é exibida na Figura 2.12(a) e na Figura 2.12 (b) é ilustrada a localização dos nós usados nas expressões de FIT.

Para um caso geral, com geometria não simétrica e/ou carregamento não simétrico em que ambas as faces das trincas não são restritas, os FITs são determinados como

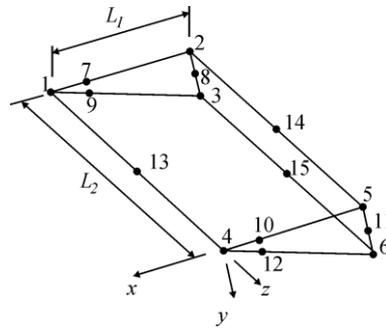
$$\begin{aligned} K_I = & \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} \left[ 2u_{yB} - u_{yC} + 2u_{yE} - u_{yF} + u_{yD} - 2u_{yB'} + u_{yC'} - 2u_{yE'} + u_{yF'} - u_{yD'} \right. \\ & + \frac{1}{2} \eta \left( -4u_{yB} + u_{yC} + 4u_{yE} - u_{yF} + 4u_{yB'} - u_{yC'} - 4u_{yE'} + u_{yF'} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} \eta^2 \left( u_{yF} + u_{yC} - 2u_{yD} - u_{yF'} - u_{yC'} + 2u_{yD'} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
 K_{II} = & \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} \left[ 2u_{xB} - u_{xC} + 2u_{xE} - u_{xF} + u_{xD} - 2u_{xB'} + u_{xC'} - 2u_{xE'} + u_{xF'} - u_{xD'} \right. \\
 & + \frac{1}{2} \eta (-4u_{xB} + u_{xC} + 4u_{xE} - u_{xF} + 4u_{xB'} - u_{xC'} - 4u_{xE'} + u_{xF'}) \\
 & \left. + \frac{1}{2} \eta^2 (u_{xF} + u_{xC} - 2u_{xD} - u_{xF'} - u_{xC'} + 2u_{xD'}) \right] \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

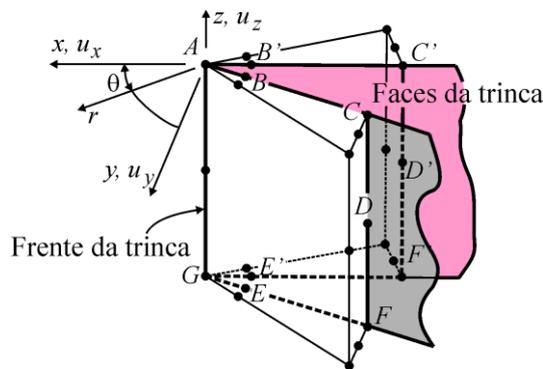
e

$$\begin{aligned}
 K_{III} = & \frac{E}{4(1+\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} \left[ 2u_{zB} - u_{zC} + 2u_{zE} - u_{zF} + u_{zD} - 2u_{zB'} + u_{zC'} - 2u_{zE'} + u_{zF'} - u_{zD'} \right. \\
 & + \frac{1}{2} \eta (-4u_{zB} + u_{zC} + 4u_{zE} - u_{zF} + 4u_{zB'} - u_{zC'} - 4u_{zE'} + u_{zF'}) \\
 & \left. + \frac{1}{2} \eta^2 (u_{zF} + u_{zC} - 2u_{zD} - u_{zF'} - u_{zC'} + 2u_{zD'}) \right], \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

onde  $\eta = -(2z/L_2 + 1)$ ,  $L_1$  e  $L_2$  são comprimentos do elemento no plano  $xz$  e o comprimento do elemento direção da frente da trinca, respectivamente. O vetor deslocamento é  $\mathbf{u} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T$ .



(a)



(b)

Figura 2.12 – Numeração do elemento e sistema de coordenadas: (a) Elemento *quarter-point* C3D15 em sistema de coordenadas cartesiano; e (b) Disposição dos elementos e convenção dos nós.