

Bruno Nieckele Azevedo

**Escoamento de duas gotas através
de um micro capilar reto**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
Programa de Pós-graduação em Engenharia
Mecânica

Rio de Janeiro
Abril de 2014

Bruno Nieckele Azevedo

**Escoamento de duas gotas através de um
micro capilar reto**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Rio de Janeiro
Abril de 2014



Bruno Nieckele Azevedo

**Escoamento de duas gotas através de um
micro capilar reto**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Monica Feijo Naccache

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 16 de Abril de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Bruno Nieckele Azevedo

Graduou-se em Engenharia de Mecânica na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2011.

Ficha Catalográfica

Azevedo, Bruno Nieckele

Escoamento de duas gotas através de um micro capilar reto / Bruno Nieckele Azevedo; orientador: Marcio da Silveira Carvalho. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2014.

v., 68 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Mecânica – Tese. 2. Método de Level Set. 3. Micro Hidrodinâmica. 4. Emulsões. 5. Método de Elementos Finitos. I. Carvalho, Márcio da Silveira. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

À minha família, que sempre me deu todo o suporte em todos os momentos de minha vida.

À minha namorada e aos amigos, que sempre me apoiaram.

Aos meus professores, principalmente ao meu orientador Prof. Márcio da Silveira Carvalho cuja ajuda e orientação foi essencial para a realização deste trabalho.

E, ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

Azevedo, Bruno Nieckele; Carvalho, Márcio da Silveira. **Escoamento de duas gotas através de um micro capilar reto**. Rio de Janeiro, 2014. 68p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Emulsões podem ser usadas como agentes de controle de mobilidade em métodos de recuperação avançada de óleo de forma a conseguir um varrido mais eficiente do reservatório. A aplicação de tal técnica requer um entendimento completo de como as emulsões escoam em um material poroso. O comportamento macroscópico do escoamento deve ser determinado baseado no escoamento na escala de poros, em que as emulsões não podem ser tratadas como líquidos não Newtonianos monofásicos, uma vez que os diâmetros das gotas são da mesma ordem de magnitude das gargantas de poros. Experimentos realizados por Cobos *et al.*(1) sobre o escoamento de emulsões através de micro-capilares com garganta, que serviu como modelo para a geometria de uma garganta de poro conectando dois poros adjacentes, mostrou o efeito da fase dispersa na queda de pressão para diferentes condições de escoamento e características das emulsões. De forma a ampliar a faixa de número de capilaridade e tamanhos de gota explorados nos experimentos, determinar o efeito da tensão interfacial, razão de viscosidades, geometria do capilar e determinar características do escoamento com mais de uma gota, é estudado o escoamento de gotas suspensas em uma fase contínua escoando através de um micro-capilar. A evolução da interface das gotas é determinada pelo método de level-set, que é acoplado a solução das equações de Navier Stokes, baseada no método de elementos finitos. Foi investigado o efeito da distância inicial entre duas gotas, assim como o efeito da tensão interfacial na velocidade de cada uma das gotas. Os resultados obtidos fornecem uma descrição mais detalhada do escoamento de emulsões em gargantas de poros.

Palavras-chave

Método de Level Set; Micro Hidrodinâmica; Emulsões; Método de Elementos Finitos;

Abstract

Azevedo, Bruno Nieckele; Carvalho, Márcio da Silveira (Advisor).
Flow of two drops through a straight microcapillary. Rio de Janeiro, 2014. 68p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Emulsions can be used as mobility control agent in enhanced oil recovery methods in order to achieve a more efficient sweep of the reservoir. The application of such technique requires full understanding of how emulsions flow in a porous material. The macroscopic flow behavior can be determined based on the pore scale flow, at which emulsions cannot be treated as a single phase non Newtonian liquid, since the drop diameters are in the same order of magnitude of the pore throats. Experiments by Cobos *et al.*(1) of flow of emulsions through constricted micro capillaries, which served as a model to the geometry of a pore throat connecting two adjacent pore bodies, have shown the effect of the dispersed phase on the pressure drop for different flow conditions and emulsions characteristics. In order to widen the range of capillary number and drop size explored in the experiments and to determine the effect of interfacial tension, viscosity ratio, capillary geometry and determine the characteristics of the flow with more than one drop, we study the flow of a drops suspended in a continuous phase flowing through a constricted micro capillary. The evolution of the drop interface is determined by the level set method which is incorporated to a fully coupled implicit Navier Stokes solver based finite element method. We investigate the effect of an initial distance between the two drops, as well as the effects of the interfacial tension on the drops speed. The results provide a more detailed description of the flow of emulsions through pore throats.

Keywords

Level-Set Method; Capillary Hydrodynamics; Emulsions; Finite Element Method;

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Motivação	14
1.2	Revisão Bibliográfica	16
1.3	Objetivos do trabalho	19
1.4	Roteiro da dissertação	20
2	Modelagem matemática do problema	21
2.1	Descrição do problema	21
2.2	Formulação Matemática	22
3	Método de Solução	28
3.1	Formulação integral das equações de Navier-Stokes e Level-Set	28
3.2	Definição das funções base	36
4	Resultados	37
4.1	Parâmetros adimensionais	38
4.2	Escoamento de duas gotas através de um capilar reto	38
5	Considerações finais	64

Lista de figuras

1.1	Reservatório típico de petróleo e gás(2)	14
1.2	Varrido de água não uniforme	15
1.3	Ilustração do mecanismo de bloqueio de poros e do modelo do capilar com garganta(3)	16
1.4	Escoamento com mais de uma gota dentro do capilar(1)	19
2.1	Duas gotas escoando através de um capilar reto	21
2.2	Contornos do problema	22
2.3	Função Heaviside suavizada(3)	25
2.4	Delta de Dirac suavizado(3)	25
2.5	Definição de $c(x)$ em função de $d(x)$ (3)	27
2.6	Valor inicial da função de Level Set para uma gota.(4)	27
4.1	Função de level-set inicial de duas gotas separadas de $30\mu m$	38
4.2	Evolução da distancia δ_d para diferentes valores de Δt com $Ca \rightarrow \infty$	39
4.3	Volume total das gotas em diferentes passos de tempo com $Ca \rightarrow \infty$	40
4.4	Perfil de velocidade próximo às gotas ao longo do escoamento	40
4.5	Perfil de velocidade longe das gotas ao longo do escoamento	40
4.6	Evolução das gotas com $Ca = 0,75$ e $\delta_d = 30\mu m$	41
4.7	Deformação do campo da função de level set	41
4.8	Oscilação da velocidade com a redução do passo de tempo	42
4.9	Evolução das gotas com $Ca = 0,75$ e $\delta_d = 500\mu m$	43
4.10	Velocidade das extremidades das gotas com $Ca = 0,75$	44
4.11	Tamanho das gotas para $Ca = 0,75$ e diferentes distâncias iniciais	45
4.12	Evolução das gotas com $Ca = 0,25$ e $\delta_d = 30\mu m$	45
4.13	Evolução das gotas com $Ca = 0,25$ e $\delta_d = 500\mu m$	46
4.14	Velocidade das extremidades das gotas $Ca = 0,25$	46
4.15	Tamanho das gotas para $Ca = 0,25$ e diferentes distâncias iniciais	47
4.16	Evolução das gotas com $Ca = 0,10$ e $\delta_d = 30\mu m$	48
4.17	Evolução das gotas com $Ca = 0,10$ e $\delta_d = 500\mu m$	48
4.18	Velocidade das extremidades das gotas $Ca = 0,10$	49
4.19	Tamanho das gotas para $Ca = 0,10$ e diferentes distâncias iniciais	50
4.20	Evolução das gotas com $Ca \rightarrow \infty$ e $\delta_d = 30\mu m$	51
4.21	Evolução das gotas com $Ca \rightarrow \infty$ e $\delta_d = 500\mu m$	51
4.22	Tamanho das gotas para $Ca \rightarrow \infty$ e diferentes distâncias iniciais	52
4.23	Velocidade das gotas sem tensão interfacial	53
4.24	Influência do número de capilaridade	54
4.25	Arredondamento das gotas com o aumento da tensão interfacial	55
4.26	Os diferentes tamanhos de gotas utilizados e especificados na tabela 4.2	56
4.27	Gradiente de pressão adimensionalizado ao longo do capilar para diferentes tamanhos de gota e $Ca = 0,75$	56
4.28	Gradiente de pressão adimensionalizado ao longo do capilar para diferentes tamanhos de gota e $Ca = 0,10$	57

4.29	Velocidade das extremidades das gotas com diferentes razões de diâmetro e $Ca = 0,75$	58
4.30	Velocidade das extremidades de g_1, g_3 e g_5 e $Ca = 0.10$	59
4.31	Tamanho das gotas com $Ca = 0,75$	60
4.32	Tamanho das gotas com $Ca = 0,10$	61
4.33	Distância entre gotas	62

Lista de tabelas

- | | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Diferentes distâncias de gota usadas e suas relações com o diâmetro do capilar | 42 |
| 4.2 | Razão de diâmetros para diferentes geometrias de gotas | 56 |

Sumário de notações

Símbolos Gregos

Δt	Passo de tempo
δ_ε	Função Delta de Dirac suavizada
δ_d	Distância entre as gotas - Gap
κ	Curvatura da gota
λ	Razão de viscosidades
μ	Viscosidade de uma das fases
μ_w, μ_o	Viscosidade da água e do óleo
Ω	Domínio do problema
$\psi^m, \psi^{cm}, \psi^g, \psi^c$	Funções peso
ρ	Densidade dos fluidos
σ	Tensão interfacial
ε	Parâmetro de suavização da função de Heaviside
$\varphi_i^u, \varphi_i^p, \varphi_i^c, \varphi_i^g$	Funções base
ξ, η	Coordenadas elementares

Símbolos Romanos

$c(x)$	Campo escalar da função de Level Set
Ca	Número de capilaridade
$d(x)$	Função distância
D_{cap}	Diâmetro do capilar
D_{gota}	Diâmetro da gota

h	Escala de comprimento característico da malha de elementos finitos
H_ϵ	Função de Heaviside suavizada
h_e	Parâmetro da formulação SUPG
i	Índice das fases: w ou o
$k + 1, k$	Passos atual e anterior do Método de Newton
L_{gota}	Comprimento da parte central da gota
$n + 1, n$	Passos atual e anterior do Método de Euler
p	Campo de pressão
P^*	Gradiente de pressão adimensionalizado ao longo do escoamento
Q	Vazão média
r	Posição ao longo do raio do capilar
r, z, θ	Coordenadas cilíndricas
R_g	Raio equivalente ao raio de uma gota esférica
R_i	Raio de curvatura das extremidades da gota
R_i	Resíduo ponderado
R_{cap}	Raio do capilar
s	Coordenada ao longo da superfície
t	Variável independente tempo
u, v	Componentes da velocidade
V	Velocidade média do escoamento
W_i	Função peso vetorial genérica
$\dot{\mathbf{v}}$	derivada temporal do vetor \mathbf{v}
\mathbf{f}	Vetor dos parâmetros de entrada
\mathbf{f}_i	Força de corpo atuando em cada uma das fases

\mathbf{g}	campo do gradiente interpolado da função de level set
\mathbf{J}_{RP}	Matriz Jacobiana em Regime Permanente
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana
\mathbf{M}	Matriz massa
\mathbf{n}, \mathbf{t}	Vetores unitários normal e tangencial
\mathbf{R}	Vetor de resíduos ponderados
\mathbf{T}_i	Tensor das tensões para cada fase
\mathbf{u}_i	Campo vetorial de velocidade em cada fase
\mathbf{v}	Vetor solução
\mathbf{x}	Ponto qualquer pertencente ao domínio
\mathbf{x}_c	Ponto pertencente à interface
Sub-Índice	
o	Óleo
w	Água

1 Introdução

1.1 Motivação

O petróleo é um recurso natural que se tornou a principal fonte de energia do mundo moderno. Serve como base para a fabricação dos mais variados produtos como combustíveis (óleo diesel, gasolina, entre outros), fertilizantes, polímeros plásticos, tintas, borrachas, medicamentos, entre outros. Sua produção é, portanto, de extrema importância para a economia mundial.

Um reservatório de petróleo, frequentemente encontrado em altas profundidades, é um meio poroso limitado por camadas de rocha impermeável, como ilustrado na Fig. 1.1. É muito comum encontrar mais de um fluido, além do petróleo, dentro do reservatório, como água ou até mesmo gás.

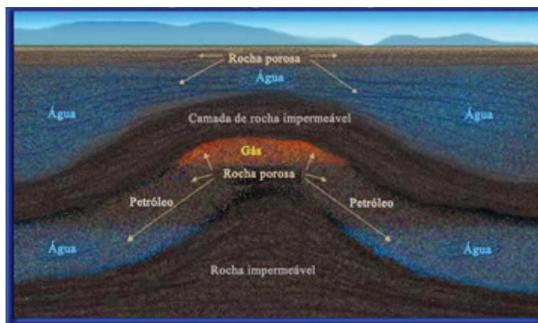


Figura 1.1: Reservatório típico de petróleo e gás(2)

Os reservatórios de petróleo encontram-se inicialmente pressurizados. Entretanto, somente uma pequena parcela pode ser recuperada diretamente com a abertura do poço. Durante essa produção, a pressão cai, o que afeta a produtividade do poço. Técnicas de recuperação secundárias, como a injeção de água, são utilizadas para manter a pressão do reservatório, além de ajudar o óleo a se deslocar, aumentando assim a produção.

No entanto, a água nem sempre varre o reservatório de maneira uniforme, encontrando caminhos preferenciais, de menor resistência, para escoar, como pode ser visto na Fig. 1.2. Com isso, muito óleo é deixado para trás no reservatório.

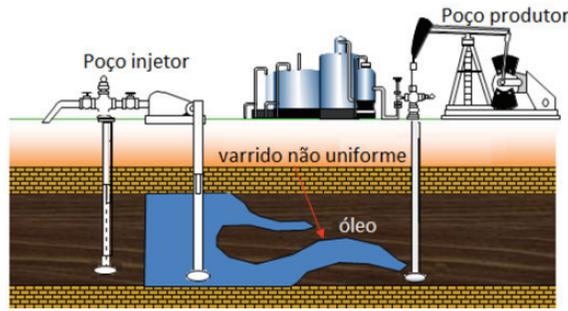


Figura 1.2: Varrido de água não uniforme

Além da utilização de métodos convencionais de recuperação secundária, pode-se usar métodos de recuperação avançada de óleo, ou *Enhanced Oil Recovery (EOR)*, como injeção de gás miscível, injeção de polímeros, injeção de emulsões, entre outros. (2)

A injeção de emulsões é uma alternativa interessante para aumentar a produção de óleo no reservatório, pois pode afetar a permeabilidade das zonas varridas pelo mecanismo de bloqueio de poros, ilustrado na Fig. 1.3.

Quando a água desloca o óleo, o varrido nem sempre é uniforme devido à heterogeneidade da rocha e à razão de mobilidade dos fluidos (Fig. 1.2). Quando emulsões de óleo em água são injetadas, elas entram nas zonas de maior permeabilidade, dificultando o posterior escoamento de água por essas regiões, criando o mecanismo de bloqueio de poros. Com isso, a água passa a escoar em zonas de menor permeabilidade (setas vermelhas), resultando em uma melhor eficiência de varrido, e produzindo mais óleo. (5)

O mecanismo de bloqueio de poros pode ser melhor compreendido estudando-se o escoamento bifásico na escala de poros. O escoamento de emulsões através de uma garganta de poro (Fig. 1.3) pode ser modelado como o escoamento de gotas de óleo suspensas em água através de um capilar reto ou com garganta.

Segundo a literatura, a eficiência de recuperação é função das eficiências de varrido horizontal e vertical e da eficiência de deslocamento, que é função do número de capilaridade Ca , definido como;

$$Ca = \frac{f_{viscosas}}{f_{capilares}} = \frac{\mu V}{\sigma} \quad (1-1)$$

onde $f_{viscosas}$ e $f_{capilares}$ são, respectivamente, as forças devido aos efeitos viscosos e da tensão interfacial, μ é a viscosidade de uma das fases (no trabalho foi usada a viscosidade da água), V é a velocidade média do escoamento e σ é a tensão interfacial entre as duas fases.

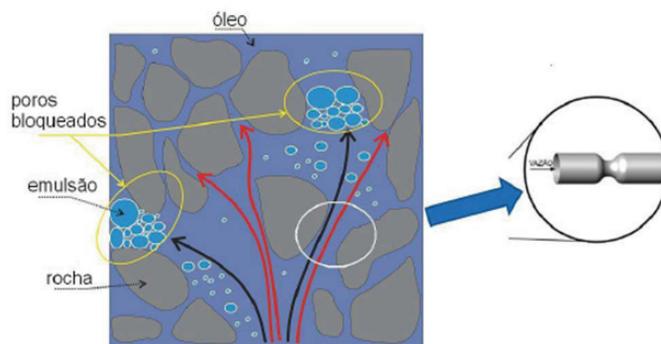


Figura 1.3: Ilustração do mecanismo de bloqueio de poros e do modelo do capilar com garganta(3)

1.2

Revisão Bibliográfica

A hidrodinâmica capilar bifásica possui três distinções consideráveis em relação ao escoamento bifásico em macro-sistemas:

- Existe um aumento na razão da área superficial das fases e do volume ocupado por elas;
- O escoamento é caracterizado por pequenos números de capilaridade, o que significa que as forças devido a tensão interfacial predominam sobre as forças viscosas;
- A micro-rugosidade e a molhabilidade da parede do microcanal exercem uma influencia considerável na formação do padrão de escoamento. (6)

Desenvolvimentos recentes em dinâmica de fluidos em micro canais podem ser encontradas em diversas aplicações como em micro-reatores (Kashid e Agar(7); Kashid *et al.*(8)), em processos de extração líquido-líquido (Kashid *et al.*(9)), em transporte de emulsões em meios porosos, que são relevantes em diversas aplicações como ciência ambiental (Ouyang *et al.*(10); Allan *et al.*(11)), bioengenharia, armazenamento de gases do efeito estufa, recuperação de óleo, entre outros (Hofman e Stein(12); Tallaskstad *et al.*(13); Idowu e Blunt(14)). Além disso, o escoamento de emulsões também é utilizado como modelo para escoamentos na escala de poros (Roca(3)).

A dinâmica do escoamento de gotas imiscíveis através de um tubo capilar com diâmetro que varia senoidalmente foi primeiramente estudado experimentalmente por Olbricht e Leal(15). Tsai e Miksis(16) investigaram o escoamento lento de uma gota suspensa em um líquido Newtoniano em um capilar com garganta utilizando um método integral de fronteiras. O foco da análise realizada foi na quebra das gotas que ocorrem em certas condições de operação.

A influência da fase dispersa na queda de pressão foi descrita por Cobos *et al.*(1). Foi mostrado que a relação da vazão com a diferença de pressão no escoamento através de capilares pode ser representada por um fator de redução de mobilidade, que é definido como a razão entre a queda de pressão do escoamento da fase contínua e a queda de pressão média do escoamento da emulsão, na mesma vazão.

Problemas de escoamento de gotas são problemas de superfície livre, onde o domínio físico não é conhecido a priori e faz parte da solução do problema, sendo resolvidos numericamente por diferentes métodos. Nos métodos Lagrangeanos, pontos da malha são pontos materiais que se movem com o escoamento. Desta forma, os pontos da malha estão sempre localizados sobre a interface entre os fluidos. A limitação mais importante deste tipo de método é a forte deformação que a malha pode sofrer ao longo da simulação.

Nos métodos Eulerianos, a malha é fixa e a interface deve ser capturada através de algum método. Estes métodos evitam a deformação excessiva da malha, no entanto podem introduzir erros na localização da interface e no cálculo da força capilar, que envolve o cálculo da curvatura da interface.

Diferentemente dos métodos com malha móvel, a formulação com malha fixa é mais fácil de implementar, generalizar para 3D e permite grandes deformações da interface. No entanto, existem importantes desvantagens com relação à perda de massa e à espessura finita da interface. É possível contornar o problema da perda de massa escolhendo-se tamanho de elementos de malha e passo de tempo adequados.

No método Euleriano conhecido como método de curva de nível (**Level Set**), a posição da interface é definida por uma curva de nível. Este método foi desenvolvido por Osher e Sethian(17) e utilizado por Sussman(18), em sua tese de doutorado, para determinar a interface de dois fluidos imiscíveis. Posteriormente, Sussman *et al.*(19) estudaram a simulação do escoamento ar-água com grandes diferenças de densidades, efeitos da tensão interfacial e da viscosidade.

Roca e Carvalho(4) estudaram o escoamento de uma única gota suspensa em uma fase contínua imiscível escoando através de um capilar com garganta. O problema do escoamento capilar transiente com superfície livre foi resolvido utilizando-se um método de level-set modificado acoplado a um método de elementos finitos totalmente implícito. Os resultados encontrados por Roca e Carvalho(4) levaram a um melhor modelo de escoamento na escala de poros, para uma maior faixa de parâmetros.

Na grande maioria de trabalhos relacionados com o método de Level Set ((20),(18),(21),(19), por exemplo), as fronteiras do domínio são paredes e as condições de contorno não são necessárias. Roca e Carvalho(4) utilizam um método, apresentado posteriormente neste trabalho, para contornar esse problema quando existem condições de contorno de entrada e saída de escoamento.

Para que o método de level set funcione corretamente, a função de level-set deve ser mantida como a função distância à interface entre os fluidos. No entanto, ao longo do escoamento esta condição deixa de ser verdade, causando uma grande distorção nos cálculos e causando a divergência do método, assim como pode ser visto no trabalho de Roca e Carvalho(4). Torna-se necessária a melhoria do método utilizado, introduzindo-se métodos de reinicialização para que a função de level-set se mantenha como uma função distância.

Alguns trabalhos que focam nessa reinicialização podem ser encontrados na literatura, baseados em métodos de diferenças finitas, como, por exemplo, no trabalho de Sussman e Fatemi(21). Um método iterativo para reinicializar a função de level set ϕ foi introduzido por Rouy e Tourin(22), em que evoluem a equação $\phi_t = 1 - |\nabla\phi|$ até que ϕ atinja o regime permanente. No entanto no método proposto por eles, é necessário que se encontre a interface, o que pode ser muito custoso.

Sussman *et al.*(19) propuseram uma maneira de resolver o problema sem a necessidade de se encontrar a interface. A equação a ser resolvida até o regime permanente é dada por $\phi_t = S(\phi_0)(1 - |\nabla\phi|)$ e $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x})$, sendo que S é uma função sinal e ϕ_0 é a função de level set no instante inicial da reinicialização.

Em complemento a este trabalho, Chang *et al.*(20) discutiram a introdução de um outro processo de reinicialização que foca em preservar a massa total ao longo do tempo. Esse processo de reinicialização envolve em resolver até o regime permanente, $\phi_t + (A_0 - A(t))(-P + \kappa)|\nabla\phi| = 0$ com $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x})$, que é uma equação perturbada de Hamilton-Jacobi.

Sussman *et al.*(19) mostraram que sem a reinicialização proposta da função de level set podem ocorrer perdas de massa significativas das gotas e as velocidades podem não atingir o regime permanente. Neste trabalho, assim como no trabalho de Roca e Carvalho(4), o problema da perda de massa foi contornado com a escolha do tamanho de elemento e do passo de tempo adequados.

Ao injetar uma emulsão, muitas gotas, que podem interagir entre si, escoam através dos capilares (Fig. 1.4). Esta interação (entre duas ou um trem de gotas) não é muito bem definida na literatura, apesar de existirem inúmeros trabalhos na área da microhidrodinâmica multifásica. Muitos trabalhos sobre sistemas gás-líquido podem ser encontrados (Schwartz *et al.*(23); Ratulowski e Chang(24)), outros estudos focam na hidrodinâmica de sistemas líquido-líquido com diferentes padrões de escoamento, como golfada (Jovanovic *et al.*(6); Bico e Quéré(25)) e escoamento de gotas (Danov *et al.*(26); Baroud *et al.*(27); Westborg e Hassager(28)). Apesar disso, a grande maioria dos estudos focam sua atenção no escoamento de uma única gota.

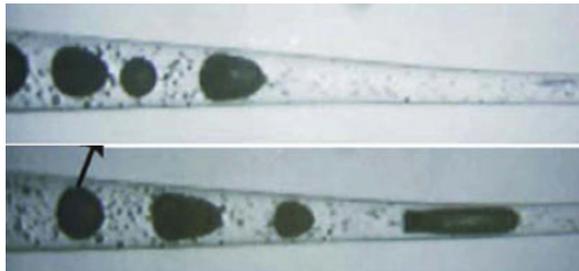


Figura 1.4: Escoamento com mais de uma gota dentro do capilar(1)

Na maioria dos casos em que mais de uma gota é considerada, a interação entre elas é levada em conta somente em estudos de coalescência, como pode ser visto nos trabalhos de Danov *et al.*(26) e Baroud *et al.*(27). No trabalho de Bico e Quéré(25) são descritos trens de gotas justapostas em um tubo, que se movem espontaneamente, em condições de molhabilidade do tubo, devido à assimetria das gotas, mas o foco principal do estudo era nas propriedades de revestimento do filme lubrificante deixado para trás pela primeira gota.

1.3

Objetivos do trabalho

Este trabalho tem objetivo estudar a interação entre duas gotas de óleo imersas em água escoando através de um micro-capilar reto. É analisada a influência da distancia inicial entre as gotas, da tensão interfacial e do tamanho das gotas no escoamento.

1.4 Roteiro da dissertação

No capítulo 2 é discutida a modelagem matemática do problema, ou seja, as equações que governam o escoamento estudado. Nele são apresentadas as equações de Navier-Stokes e a equação advectiva relacionada ao Método de Level Set utilizado, bem como as condições de contorno necessárias para a solução do problema.

Em seguida, no capítulo 3, são descritos os métodos de solução do problema. Utilizou-se o método dos Elementos Finitos para discretizar as equações, o método de Newton para resolver as não linearidades e o método de Euler implícito para solucionar o problema transiente.

Os resultados numéricos são apresentados no capítulo 4. Nele se discute a interação entre duas gotas de óleo que escoam através de um capilar reto. É neste capítulo em que é analisada a influência da distância inicial entre as gotas, da tensão interfacial e do tamanho das gotas no escoamento das mesmas.

As conclusões e comentários finais são apresentadas no último capítulo, além de algumas sugestões para trabalhos futuros.

2

Modelagem matemática do problema

O escoamento de uma ou mais gotas imersas em um fluido através de um tubo capilar é um problema transiente, não linear, bifásico com superfícies livres. Ele é descrito pela equação de Navier-Stokes com condições de contorno apropriadas.

2.1

Descrição do problema

O interesse do trabalho é estudar o escoamento de duas gotas de um líquido imersas em um outro líquido imiscível através de um capilar reto, verificando as influências de uma gota sobre a outra, da tensão interfacial entre os dois líquidos e do tamanho das gotas no escoamento.

Uma representação esquemática do escoamento das duas gotas, de diâmetros iguais, através do capilar reto é apresentada na Fig 2.1:

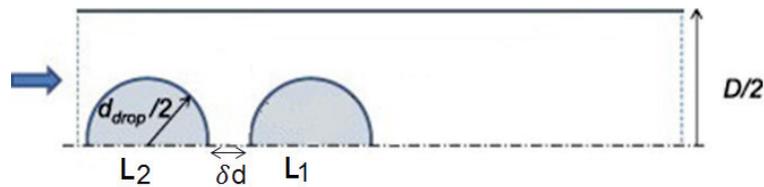


Figura 2.1: Duas gotas escoando através de um capilar reto

De forma a solucionar o problema, as seguintes considerações foram adotadas:

- Escoamento axissimétrico;
- Escoamento desenvolvido na seção de entrada;
- Fluidos incompressíveis e imiscíveis;
- Processo isotérmico;
- Ambas as fases possuem a mesma densidade ($\rho_o = \rho_w = \rho$), de forma a desprezar o efeito das forças gravitacionais, mantendo as gotas no centro do capilar;
- A distância entre gotas δ_d é a menor distância entre as intercessões das gotas com eixo de simetria, como mostrado na Fig 2.1.

2.2 Formulação Matemática

2.2.1 Equações de conservação de quantidade de movimento linear e de massa

Em cada uma das fases, os campos de velocidade e pressão devem satisfazer as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento linear. A simplificação realizada na equação de conservação de massa pode ser realizada graças às hipóteses adotadas para a solução do problema.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u}_i = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad (2-1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i \right] = \nabla \cdot \mathbf{T}_i + \mathbf{f}_i \quad (2-2)$$

onde ρ é a massa específica das fases (água e óleo), \mathbf{u}_i é o campo de velocidades, \mathbf{T}_i é o tensor das tensões e \mathbf{f}_i é uma força de corpo, para cada uma das fases.

Considerando os dois fluidos como Newtonianos e incompressíveis, o tensor das tensões é escrito como:

$$\mathbf{T}_i = -p_i \mathbf{I} + \mu_i [\nabla \mathbf{u}_i + (\nabla \mathbf{u}_i)^T] \quad (2-3)$$

onde p_i representa a pressão atuante em cada uma das fases e μ_i a viscosidade de cada uma delas.

Condições de contorno são necessárias para a formulação completa do problema. O domínio de escoamento é delimitado por planos de entrada e saída de escoamento, uma parede sólida e um eixo de simetria, representados na Fig.2.2. As condições de contorno ao longo da interface que separa os dois fluidos também precisam ser especificadas.

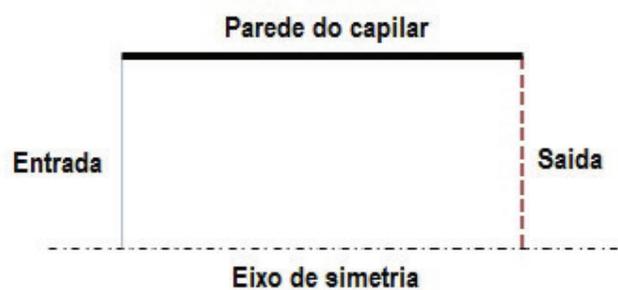


Figura 2.2: Contornos do problema

Afim de satisfazer a hipótese de escoamento desenvolvido na seção de entrada, foi imposto um perfil de velocidade parabólico, dado por:

$$\mathbf{u} = 2V \left[1 - \left(\frac{2r}{D_{cap}} \right)^2 \right] \quad (2-4)$$

em que V é a velocidade média da fase contínua.

No plano de saída foi imposta uma condição de escoamento completamente desenvolvido e a pressão (barométrica) de saída foi especificada como sendo atmosférica, ou seja:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \quad p = p_{saida} = 0. \quad (2-5)$$

Ao longo do eixo de simetria são impostas condições de simetria, ou seja, velocidade radial e tensão tangencial nulas:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{t} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_i) = 0. \quad (2-6)$$

Ao longo da parede do capilar foram impostas condições de não deslizamento e de impermeabilidade, ou seja,

$$\mathbf{u} = 0. \quad (2-7)$$

A posição da interface entre as duas fases é desconhecida, *a priori*. Para localizar a sua posição, é necessário que duas condições (balanço de forças e continuidade da velocidade) sejam satisfeitas ao longo da camada que separa as fases:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}_w - \mathbf{T}_o) = \sigma \frac{dt}{ds}, \quad \mathbf{u}_w = \mathbf{u}_o \quad (2-8)$$

em que \mathbf{n} e \mathbf{t} são, respectivamente, os vetores unitários normal e tangencial à interface, s é a coordenada ao longo da superfície livre, σ é a tensão interfacial e $\frac{dt}{ds}$ é a curvatura da interface.

A configuração da gota de óleo em cada instante de tempo não é conhecida *a priori* e, portanto, faz parte da solução do problema. Isto caracteriza este escoamento como um *problema de superfície livre*.

Uma maneira de resolver numericamente problemas de superfície livre é definindo malhas que se adaptam às interfaces. Estes métodos são geralmente classificados como *Métodos de Rastreamento de Interface*. No entanto, métodos de rastreamento são difíceis de serem aplicados quando a interface sofre deformações muito grandes ou mudanças de topologia.

Uma abordagem alternativa é baseada na captura da interface pela definição de um campo escalar. Uma dessas abordagens é o Método de *Level-Set* (curvas de nível), primeiramente introduzido por Osher e Sethian (17).

Neste trabalho é utilizada uma modificação desta abordagem, descrita na próxima subseção e também utilizada por, para resolver numericamente o problema de superfície livre.

2.2.2

Método Level Set

O método de Level Set é utilizado para capturar a interface entre os líquidos enquanto uma ou mais gotas escoam através do capilar. Nesta metodologia, cada fluido é identificado por um campo escalar suavizado $c(x)$ definido em todo o domínio, de modo que diferentes sinais sejam atribuídos para as diferentes fases (Ω). Ou seja, o valor de $c(x)$ define que fluido ocupa cada ponto do domínio.

$$\begin{cases} c < 0 \implies \text{óleo}(\Omega_1); \\ c = 0 \implies \text{interface}(\delta\Omega); \\ c > 0 \implies \text{água}(\Omega_2). \end{cases} \quad (2-9)$$

Tipicamente, a função de *Level Set* é inicialmente definida como a distância euclidiana $d(x)$ da interface, sendo definida como:

$$d(x) = \min(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \forall \mathbf{x}_c \in \text{interface} \quad (2-10)$$

A evolução da interface é descrita por uma equação advectiva do campo escalar $c(x)$, dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (2-11)$$

No método de Level Set, as equações de conservação de quantidade de movimento as duas fases podem ser expressas de maneira unificada considerando as propriedades dos fluidos em cada ponto do domínio como função da função de level set. Neste caso, a viscosidade em cada ponto do domínio pode ser escrita em função do campo escalar c :

$$\mu(c) = \mu_o + (\mu_w - \mu_o)H_\varepsilon(c) \quad (2-12)$$

onde μ_w e μ_o são, respectivamente, as viscosidades da água e do óleo. $H_\varepsilon(c)$ é a função de Heaviside suavizada, dada pela Eq. 2-13 e com a curva mostrada na Fig2.3. Ela é uma aproximação contínua da função de Heaviside que ajuda a melhorar a estabilidade numérica quando a viscosidade é interpolada ao longo da interface.

$$H_\varepsilon(c) = \frac{c + \varepsilon}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi c}{\varepsilon}\right) \quad (2-13)$$

onde ε é um parâmetro de suavização da função de Heaviside.

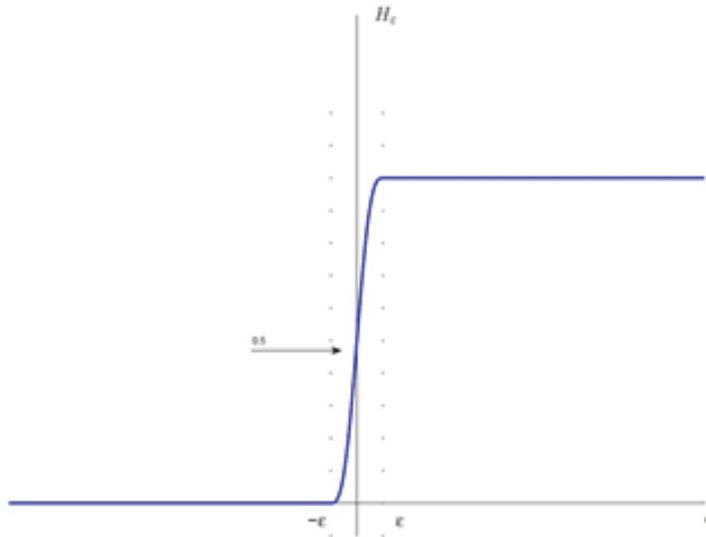


Figura 2.3: Função Heaviside suavizada(3)

De forma a fechar a equação unificada que descreve a equação de conservação de quantidade de movimento em cada fase e o balanço de forças ao longo da interface, a força capilar, que entra no balanço de forças da interface, Eq. (2-8), é expressa como uma força de corpo concentrada \mathbf{f}_c : (29)

$$\mathbf{f}_c = \sigma \kappa \nabla c \delta_\epsilon(c) \tag{2-14}$$

em que κ é a curvatura da interface, ∇c é o vetor normal à interface e $\delta_\epsilon(c)$ é uma aproximação contínua e suavizada da função Delta de Dirac (Fig 2.4), dada pela derivada da função de Heaviside:

$$\delta_\epsilon(c) = \frac{dH_\epsilon}{dc} = \frac{1}{2\epsilon} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi c}{\epsilon} \right) \right] \tag{2-15}$$

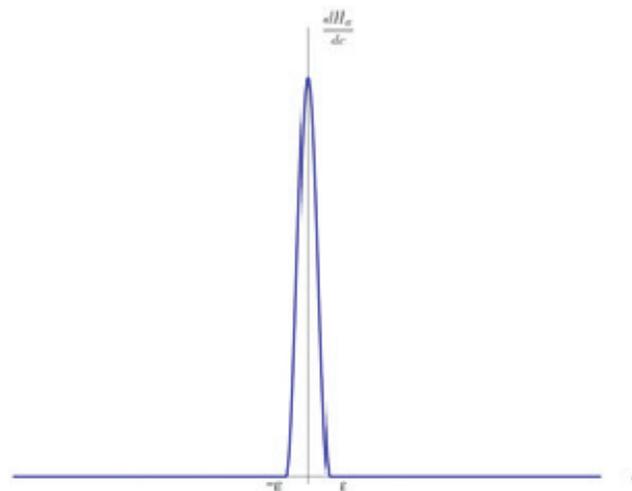


Figura 2.4: Delta de Dirac suavizado(3)

Esta força de corpo criada é identicamente nula longe da interface e representa o salto de pressão capilar ao longo da fina camada de espessura 2ε ao longo da interface entre os dois líquidos.

Desta forma, a equação unificada de conservação de momento para as duas fases é escrita como:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu(c)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \sigma \kappa \nabla c \delta_\varepsilon(c) \quad (2-16)$$

A curvatura κ da interface é avaliada em termos da função de Level Set,

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla c}{\|\nabla c\|}. \quad (2-17)$$

A maioria dos trabalhos encontrados na literatura que utilizam o método de Level Set, como o trabalho de (18), são de fluxos em caixas fechadas, onde a velocidade é nula em todas as fronteiras do domínio. Desta forma, não é necessário impor condições de contorno para a equação de level-set, uma vez que a equação que descreve a evolução desta função (Eq.2-11) é hiperbólica.

Como no problema analisado neste trabalho existe uma fronteira com fluxo de entrada, torna-se necessário que o valor da função de level set ao longo da mesma seja especificado a cada passo de tempo como uma condição de contorno. A distância de cada ponto da superfície de entrada para a interface em cada instante de tempo não é conhecida, logo não é possível definir a função de level set como uma função distância direcionada como normalmente é feito.

Uma alternativa para este problema é utilizar uma função distância suavizada e saturada, definida na Eq.2-18, cujo contorno é mostrado na Fig. 2.5:

$$c(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_c}{2}, & \min(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > \varepsilon_c, \forall \mathbf{x}_i \in \delta\Omega; \\ \frac{\varepsilon_c}{2} \left[\frac{d(\mathbf{x})}{\varepsilon_c} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi d(\mathbf{x})}{\varepsilon_c}\right) \right], & \|\min(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\| \leq \varepsilon_c, \forall \mathbf{x}_i \in \delta\Omega; \\ -\frac{\varepsilon_c}{2}, & \min(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) < \varepsilon_c, \forall \mathbf{x}_i \in \delta\Omega. \end{cases} \quad (2-18)$$

A função proposta aproxima a função distância, com sinal, apenas próximo da interface, ou seja, em $c = 0$, e possui valor constante ($c = \pm 1$) longe da mesma, como mostrado na Fig 2.6 para uma gota esférica colocada dentro de um capilar. O parâmetro ε_c define a faixa de transição entre os valores extremos de $c(x)$. Roca e Carvalho (4) definiram $\varepsilon_c = 5h$, onde h é uma escala de comprimento característico da malha de elementos finitos.

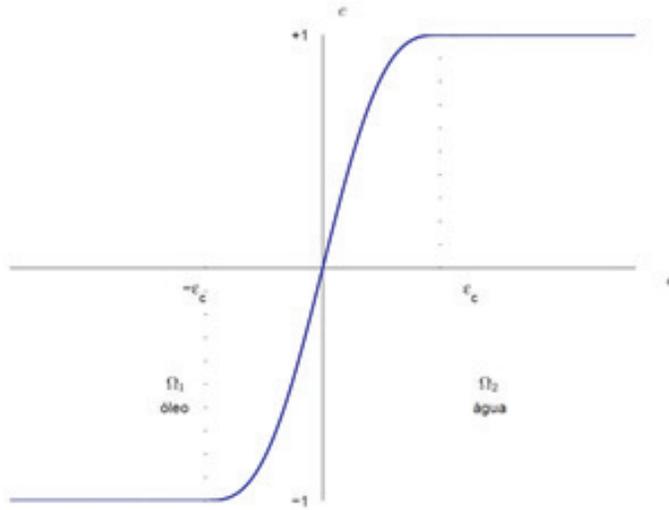


Figura 2.5: Definição de $c(x)$ em função de $d(x)$ (3)

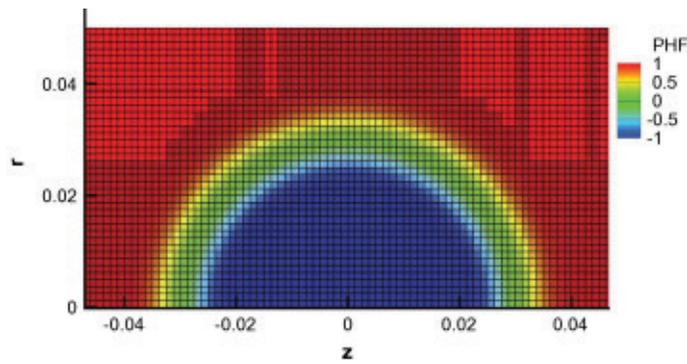


Figura 2.6: Valor inicial da função de Level Set para uma gota.(4)

Com a definição da função de Level Set modificada, a condição de contorno para a equação de level set ao longo da fronteira de entrada foi determinada como $c = 1$.

É mostrado no trabalho de Roca(3) que devido a grandes deformações das gotas, a função de level set é muito deformada e, juntamente com uma difusão numérica da Eq. 2-11, resultam numa representação imprecisa da interface e, conseqüentemente, em perda de convergência.

3 Método de Solução

O método de resíduos ponderados foi utilizado para discretizar as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, Eqs. (2-1) e (2-2), acopladas à equação de level-set, Eq. (2-11). Funções base de elementos finitos foram utilizadas para representar os campos desconhecidos e o domínio de escoamento foi dividido em elementos quadriláteros.

3.1 Formulação integral das equações de Navier-Stokes e Level-Set

Os campos de velocidade, pressão e função de level set foram aproximados por uma combinação linear de um número finito de funções base.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_j \tilde{\mathbf{u}}_j(t) \varphi_j^u = \sum_j [\tilde{u}_j(t), \tilde{v}_j(t)]^T \varphi_j^u, \\ p &= \sum_j \tilde{p}_j(t) \varphi_j^p, \quad c = \sum_j \tilde{c}_j(t) \varphi_j^c \end{aligned} \quad (3-1)$$

De forma a avaliar a curvatura κ em cada ponto do domínio, é necessário calcular a segunda derivada da função de level-set, como pode ser visto na Eq. (2-17). Uma vez que as derivadas das funções base de elementos finitos utilizadas para aproximar a função de level-set são descontínuas ao longo das fronteiras do elemento, a curvatura não pode ser calculada diretamente.

Um passo de projeção intermediário foi usado por Zahedi *et al* (30) com o objetivo de aproximar a função de level-set com elementos de ordem superior de forma a avaliar a curvatura da interface.

Roca e Carvalho (4) propuseram a utilização de uma variável adicional $\mathbf{g} = [g_z, g_r]$ para representar o gradiente da função de level-set como um campo independente e contínuo:

$$\mathbf{g} = \nabla c \quad (3-2)$$

Por sua vez, essa variável também é aproximada como uma combinação linear de um número finito de funções base contínuas.

$$\mathbf{g} = \sum_j \tilde{\mathbf{g}}_j(t) \varphi_j^g = \sum_j [\tilde{g}_{zj}(t), \tilde{g}_{rj}(t)]^T \varphi_j^g \quad (3-3)$$

Esta aproximação possibilita que a curvatura, κ , seja avaliada em termos de \mathbf{g} , sendo dada por:

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} = \frac{1}{r} \frac{g_r}{(g_z^2 + g_r^2)^{1/2}} + \frac{g_z^2 \frac{\partial g_r}{\partial r} - 2g_z g_r \frac{\partial g_z}{\partial r} + g_r^2 \frac{\partial g_z}{\partial z}}{(g_z^2 + g_r^2)^{3/2}} \quad (3-4)$$

Foram utilizados três tipos de funções base para expandir as variáveis independentes do problema:

- Polinomiais biquadráticas Lagrangeanas para a velocidade, φ^u , e função de level-set, φ^c ;
- Linear descontínuas para a pressão, φ^p ;
- Lagrangeana bilinear para o gradiente interpolado da função de level-set, φ^g .

A definição dessas funções é apresentada na seção 3.2. Os coeficientes das funções base ($\tilde{u}_j(t), \tilde{v}_j(t), \tilde{p}_j(t), \tilde{c}_j(t), \tilde{g}_{zj}(t)$ e $\tilde{g}_{rj}(t)$) representam as incógnitas do problema discretizado.

A formulação fraca do problema é obtida multiplicando-se as equações do sistema (Eqs.2-1,2-2,2-11 e 3-2), aproximadas pelas Eqs.(3-1) e (3-3), por funções peso apropriadas. Em seguida elas são integradas ao longo do domínio físico. O Teorema da Divergência é aplicado nos termos apropriados.

Utilizou-se o Método de Galerkin, em que as funções peso são iguais às funções base, nas equações de conservação de quantidade de movimento e de massa e na equação do gradiente interpolado da função de level set:

$$\psi^m = \varphi^u, \quad \psi^{cm} = \varphi^p, \quad \psi^g = \varphi^g \quad (3-5)$$

Foi utilizado para a equação da função de level-set o método Streamline-Upwind com funções peso de Petrov-Galerkin (SUPG):

$$\psi^c = \varphi^c + h_e \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla \varphi^c \quad (3-6)$$

em que h_e é o parâmetro de upwind utilizado para estabilizar o método.

Os resíduos ponderados pelo peso são escritos na forma genérica:

$$R_i = \int_0^1 R(x) W_i(x) dx = 0 \quad (3-7)$$

em que $W_i(x)$ são funções peso.

Em coordenadas cilíndricas (z, r) os vetores dos resíduos ponderados pelo peso são escritos segundo as Eqs. (3-8), (3-9), (3-10), (3-11), (3-12) e (3-13).

Os resíduos ponderados das equações de conservação de quantidade de movimento, nas direções axial (z) e radial (r) , são dados, respectivamente, por:

$$R_i^{mz} = \int_{\Omega} \left\{ \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] \varphi_i^m + \left[-p + 2\mu(c) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \frac{\partial \varphi_i^m}{\partial r} + \mu(c) \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \frac{\partial \varphi_i^m}{\partial r} + \sigma \kappa \frac{\partial c}{\partial z} \delta_{\epsilon}(c) \varphi_i^m \right\} d\Omega \quad (3-8)$$

$$R_i^{mr} = \int_{\Omega} \left\{ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right] \varphi_i^m + \mu(c) \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \frac{\partial \varphi_i^m}{\partial r} + \left[-p + 2\mu(c) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \frac{\partial \varphi_i^m}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[-p + 2\mu(c) \frac{v}{r} \right] + \sigma \kappa \frac{\partial c}{\partial r} \delta_{\epsilon}(c) \varphi_i^m \right\} d\Omega \quad (3-9)$$

O resíduo ponderado da equação de continuidade é dado por:

$$R_i^{cm} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right] \psi_i^{cm} d\Omega \quad (3-10)$$

O resíduo ponderado da equação da função de level-set é dado por:

$$R_i^c = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial c}{\partial r} \right] \psi_i^c d\Omega \quad (3-11)$$

Por sua vez, os resíduos ponderados das equações do gradiente interpolado, nas direções z e r , da função de level set são dados, respectivamente, por:

$$R_i^{gz} = \int_{\Omega} \left[g_z - \frac{\partial c}{\partial z} \right] \psi_i^g d\Omega \quad (3-12)$$

$$R_i^{gr} = \int_{\Omega} \left[g_r - \frac{\partial c}{\partial r} \right] \psi_i^g d\Omega \quad (3-13)$$

Condições de contorno essenciais foram impostam trocando-se a equação de resíduo ponderado correspondente pelas especificações desejadas de velocidade ou função de level-set. Condições de contorno naturais foram aplicadas através de integrais de contorno que surgiram a partir do Teorema da Divergência.

Uma vez que todas as variáveis são representadas em termos das funções base, o sistema de equações diferenciais parciais é reduzido a um conjunto de equações diferenciais ordinárias e de equações algébricas, que descrevem a evolução dos coeficientes com o tempo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{f}) = 0, \quad (3-14)$$

em que $\mathbf{R} \equiv [R_i^{mz}, R_i^{mr}, R_i^{cm}, R_i^c, R_i^{gz}, R_i^{gr}]^T$ é o conjunto de equações de resíduos ponderados, $\mathbf{v} \equiv [\tilde{u}_j(t), \tilde{v}_j(t), \tilde{p}_j(t), \tilde{c}_j(t), \tilde{g}_{zj}(t), \tilde{g}_{rj}(t)]^T$ é o vetor dos coeficientes das funções base, $\dot{\mathbf{v}}$ é a derivada temporal do vetor \mathbf{v} , e \mathbf{f} é o vetor que contém todos os parâmetros de entrada (propriedades físicas, geometria do escoamento e informações das condições de contorno).

A discretização temporal do conjunto de equações representados pela Eq. (3-14) seguiu um algoritmo preditor-corretor. O passo preditor consiste no método de Euler para frente e o passo corretor consiste no método de Euler totalmente implícito de primeira ordem, que é incondicionalmente estável.

O conjunto resultante de equações algébricas não lineares foi resolvido simultaneamente, em cada passo de tempo, pelo Método de Newton com uma estimativa inicial resultante de um passo de Euler explícito obtido a partir da solução nos dois passos de tempo anteriores:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{v}_{n+1}^{(k)}) \right) \delta \mathbf{v}^{(k+1)} = -\mathbf{R}(\mathbf{v}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{v}_n), \quad (3-15)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{v}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{v}^{(k+1)}; \quad (3-16)$$

os índices $k+1$ e k indicam os passos atual e anterior do passo do método de Newton. A iteração é repetida até a convergência.

Na Eq.3-15, \mathbf{J} é a matriz Jacobiana que mede a sensibilidade dos resíduos em relação às variáveis do problema, e \mathbf{M} é a matriz massa que mede a sensibilidade dos resíduos em relação às derivadas temporais das variáveis.

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}} \quad (3-17)$$

$$\mathbf{M} \equiv \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \quad (3-18)$$

Em cada iteração do método de Newton, o sistema de equações 3-15 é solucionado a partir de uma decomposição \mathbf{LU} obtida utilizando um solver frontal. Esta decomposição é feita de forma a economizar memória.

3.1.1

Cálculo do Vetor Resíduo e da Matriz Jacobiana

Como discutido anteriormente, o vetor resíduo é formado por seis partes, $\mathbf{R} \equiv [R_i^{mz}, R_i^{mr}, R_i^{cm}, R_i^c, R_i^{gz}, R_i^{gr}]^T$. A matriz jacobiana \mathbf{J} é formada pelas derivadas dos seis resíduos em relação aos seis campos não conhecidos, totalizando uma matriz com 36 sub-matrizes.

Como o problema é transiente, a matriz jacobiana \mathbf{J} é dividida em uma parte relacionada ao termo transiente e uma parte relacionada com o termo permanente:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{J}_{\mathbf{RP}} \quad (3-19)$$

A matriz \mathbf{M} é a matriz massa mencionada na seção anterior, dada pela Eq. 3-18. Como ela é formada pelas derivadas do vetor resíduo com relação à derivada temporal do vetor solução, ela possui apenas três termos não nulos:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int \rho \varphi_i \varphi_j d\Omega \\ M_{22} &= \int \rho \varphi_i \varphi_j d\Omega \\ M_{44} &= \int \psi_i \varphi_j d\Omega \end{aligned} \quad (3-20)$$

Assim como a matriz \mathbf{J} , a matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{RP}}$ é formada por 36 blocos. No entanto, nenhum dos termos dos resíduos possui o termo temporal nas suas equações. Isto é denotado por um asterisco (*) em cada um dos termos. $\mathbf{J}_{\mathbf{RP}}$ é dada por:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{RP}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{u}_j} & \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{v}_j} & \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{p}_j} & \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{c}_j} & \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} & \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} \\ \frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{u}_j} & \frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{v}_j} & \frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{p}_j} & \frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{c}_j} & \frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} & \frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} \\ \frac{\partial R_i^{cm*}}{\partial \tilde{u}_j} & \frac{\partial R_i^{cm*}}{\partial \tilde{v}_j} & \frac{\partial R_i^{cm*}}{\partial \tilde{p}_j} & \frac{\partial R_i^{cm*}}{\partial \tilde{c}_j} & \frac{\partial R_i^{cm*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} & \frac{\partial R_i^{cm*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} \\ \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{u}_j} & \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{v}_j} & \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{p}_j} & \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{c}_j} & \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} & \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} \\ \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{u}_j} & \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{v}_j} & \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{p}_j} & \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{c}_j} & \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} & \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} \\ \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{u}_j} & \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{v}_j} & \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{p}_j} & \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{c}_j} & \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} & \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

O cálculo detalhado de cada um dos 36 termos é mostrado a seguir. É importante lembrar que $\delta(c)$ presente em algumas das equações é dado pela Eq.2-15.

- Jacobiano de R_i^{mz*}

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{u}_j} &= \int_{\Omega} \left[\rho \left(u \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial z} + v \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial r} + \varphi_j^u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \varphi_i^u + \right. \\ &\left. \left(\left[2\mu \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial z} \right] \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial z} + \left[\mu \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial r} \right] \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial r} \right) \right] d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \end{aligned} \quad (3-22)$$

$$\frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{v}_j} = \int_{\Omega} \rho \varphi_j^u \frac{\partial u}{\partial r} \varphi_i^u d\Omega + \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial r} \right) d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-23)$$

$$\frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{p}_j} = - \int_{\Omega} \left(\varphi_j^p \frac{\partial \varphi_i^p}{\partial z} \right) d\Omega; i = 1, \dots, 9; j = 1, 2, 3 \quad (3-24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{c}_j} = \int_{\Omega} \left[2 \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^c}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j} \frac{\partial \varphi_i^c}{\partial r} + \right. \\ \left. \sigma \kappa \left(\frac{\partial \varphi_j^c}{\partial z} \delta_{\varepsilon}(c) + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{d\delta_{\varepsilon}(c)}{d\tilde{c}_j} \right) \right] d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \end{aligned} \quad (3-25)$$

em que $\frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j}$ e $\frac{d\delta_{\varepsilon}(c)}{d\tilde{c}_j}$ são dados por:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j} = (\mu_2 - \mu_1) \varphi_j^c \delta_{\varepsilon}(c); j = 1, \dots, 9 \quad (3-26)$$

$$\frac{d\delta_{\varepsilon}(c)}{d\tilde{c}_j} = - \frac{\pi \varphi_j^c}{2\varepsilon^2} \sin \left(\frac{\pi c}{\varepsilon} \right); j = 1, \dots, 9 \quad (3-27)$$

Em seguida,

$$\frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{zj}} \frac{\partial c}{\partial r} \varphi_i^g \delta_{\varepsilon}(c) d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-28)$$

em que $\frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{zj}}$ é dado pela Eq.3-29. É importante salientar que as variáveis com duas letras representam derivadas parciais em relação à segunda letra (por exemplo, $g_{rr} = \partial g_r / \partial r$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{zj}} = \left\{ (g_r^2 + g_z^2)^{\frac{3}{2}} \left(2g_z \varphi_j^g g_{rr} - 2g_r \left[\varphi_j^g g_{zr} + g_r \frac{\partial \varphi_j^g}{\partial r} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + g_r^2 \frac{\partial \varphi_j^g}{\partial z} \right) - 3(g_z^2 g_{rr} - 2g_r g_z g_{zr} + g_r^2 g_{zz}) (g_r^2 + g_z^2)^{\frac{1}{2}} (g_z \varphi_j^g) \right\} \\ / (g_r^2 + g_z^2)^3 - \frac{\varphi_j^g}{r} \frac{g_z g_r}{(g_r^2 + g_z^2)^{\frac{3}{2}}}; j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3-29)$$

$$\frac{\partial R_i^{mz*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{rj}} \frac{\partial c}{\partial z} \varphi_i^g \delta_{\varepsilon}(c) d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-30)$$

em que $\frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{rj}}$ é dado pela Eq.3-31:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{rj}} = \left\{ \left(g_z^2 \frac{\partial \varphi_j^g}{\partial r} - 2g_z \varphi_j^g g_{zr} + 2g_r \varphi_j^g g_{zz} \right) (g_r^2 + g_z^2)^{\frac{3}{2}} \right. \\ \left. - 3(g_z^2 g_{rr} - 2g_r g_z g_{zr} + g_r^2 g_{zz}) (g_r^2 + g_z^2)^{\frac{1}{2}} (g_r \varphi_j^g) \right\} \\ / (g_r^2 + g_z^2)^3 + \frac{\varphi_j^g}{r} \left[\frac{1}{(g_r^2 + g_z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{g_r^2}{(g_r^2 + g_z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]; j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3-31)$$

- Jacobiano de R_i^{mr*}

$$\frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{u}_j} = \int_{\Omega} \left[\rho \varphi_j^u \frac{\partial v}{\partial z} \varphi_i^u + \mu \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial z} \right] d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-32)$$

$$\frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{v}_j} = \int_{\Omega} \left[\rho \left(u \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial z} + v \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial r} + \varphi_j^u \frac{\partial v}{\partial r} \right) \varphi_i^u + \left(\mu \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial r} + \frac{1}{r} 2\mu \frac{\varphi_j^u}{r} \varphi_i^u \right) \right] d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-33)$$

$$\frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{p}_j} = - \int_{\Omega} \left(\varphi_j^p \frac{\partial \varphi_i^p}{\partial r} + \frac{1}{r} \varphi_j^p \varphi_i^p \right) d\Omega; i = 1, \dots, 9, j = 1, 2, 3 \quad (3-34)$$

$$\frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{c}_j} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j} \frac{\partial \varphi_i^c}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i^c}{\partial r} + 2 \frac{1}{r} \frac{v}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j} \varphi_i^c + \sigma \kappa \left(\frac{\partial \varphi_j^c}{\partial r} \delta_{\varepsilon}(c) + \frac{\partial c}{\partial r} \frac{d\delta_{\varepsilon}(c)}{d\tilde{c}_j} \right) \varphi_i^c \right] d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-35)$$

em que $\frac{\partial \mu}{\partial \tilde{c}_j}$ é dado pela Eq.3-26 e $\frac{d\delta_{\varepsilon}(c)}{d\tilde{c}_j}$ é dado pela Eq.3-27.

$$\frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{zj}} \frac{\partial c}{\partial r} \varphi_i^g \delta_{\varepsilon}(c) d\Omega; i = 1, \dots, 9; j = 1, \dots, 4 \quad (3-36)$$

em que a derivada da curvatura é dada pela Eq.3-29.

$$\frac{\partial R_i^{mr*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \kappa(g_z, g_r)}{\partial g_{rj}} \frac{\partial c}{\partial r} \varphi_i^g \delta_{\varepsilon}(c) d\Omega; i = 1, \dots, 9; j = 1, \dots, 4 \quad (3-37)$$

em que a derivada da curvatura é dada pela Eq.3-31.

- Jacobiano de R_i^{mc*} :

$$\frac{\partial R_i^{mc*}}{\partial \tilde{u}_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial z} \varphi_i^p d\Omega; i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 9 \quad (3-38)$$

$$\frac{\partial R_i^{mc*}}{\partial \tilde{v}_j} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_j^u}{\partial r} + \frac{\varphi_j^u}{r} \right) \varphi_i^p d\Omega; i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 9 \quad (3-39)$$

Todos os outros termos são nulos:

$$\frac{\partial R_i^{mc*}}{\partial \tilde{p}_j} = \frac{\partial R_i^{mc*}}{\partial \tilde{c}_j} = \frac{\partial R_i^{mc*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} = \frac{\partial R_i^{mc*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} = 0 \quad (3-40)$$

- Jacobiano de R_i^{c*} :

$$\frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{u}_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial z} \varphi_j^u \psi_i^c d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-41)$$

$$\frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{v}_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial r} \varphi_j^u \psi_i^c d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-42)$$

$$\frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{c}_j} = \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial \psi_j^c}{\partial z} + v \frac{\partial \psi_j^c}{\partial r} \right) \psi_i^c d\Omega; i, j = 1, \dots, 9 \quad (3-43)$$

Todos os outros termos são nulos:

$$\frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{p}_j} = \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} = \frac{\partial R_i^{c*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} = 0 \quad (3-44)$$

- Jacobiano de R_i^{gz*} :

$$\frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{c}_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_j^c}{\partial z} \varphi_i^g d\Omega; i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 9 \quad (3-45)$$

$$\frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} = - \int_{\Omega} \varphi_j^g \varphi_i^g d\Omega; i, j = 1, \dots, 4 \quad (3-46)$$

Todos os outros termos são nulos:

$$\frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{u}_j} = \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{v}_j} = \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{p}_j} = \frac{\partial R_i^{gz*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} = 0 \quad (3-47)$$

- Jacobiano de R_i^{gr*} :

$$\frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{c}_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_j^c}{\partial r} \varphi_i^g d\Omega; i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 9 \quad (3-48)$$

$$\frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{g}_{rj}} = - \int_{\Omega} \varphi_j^g \varphi_i^g d\Omega; i, j = 1, \dots, 4 \quad (3-49)$$

Todos os outros termos são nulos:

$$\frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{u}_j} = \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{v}_j} = \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{p}_j} = \frac{\partial R_i^{gr*}}{\partial \tilde{g}_{zj}} = 0 \quad (3-50)$$

3.2

Definição das funções base

As funções base utilizadas para expandir as variáveis independentes são:

- Funções polinomiais Lagrangeanas biquadráticas, ψ_j^m , tanto para a velocidade quanto para a função de level set, definidas como:

$$\begin{aligned}
 \psi_1^m(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)}{4} \\
 \psi_2^m(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1)}{4} \\
 \psi_3^m(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1)}{4} \\
 \psi_4^m(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1)}{4} \\
 \psi_5^m(\xi, \eta) &= \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)}{2} \\
 \psi_6^m(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2)}{2} \\
 \psi_7^m(\xi, \eta) &= \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta + 1)}{2} \\
 \psi_8^m(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2)}{2} \\
 \psi_9^m(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3-51}$$

em que ξ e η são coordenadas elementares.

- Funções lineares descontínuas, φ_i^{cm} , para a pressão. Como a variação da pressão em cada ponto é descrita como $P = P_1 + P_2\eta + P_3\xi$, as funções base são definidas da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^{cm}(\xi, \eta) &= 1 \\
 \varphi_2^{cm}(\xi, \eta) &= \eta \\
 \varphi_3^{cm}(\xi, \eta) &= \xi
 \end{aligned} \tag{3-52}$$

- Funções Lagrangeanas bilineares, φ_i^g , para o gradiente interpolado da função de level-set, representadas por:

$$\begin{aligned}
 \psi_1^g(\xi, \eta) &= +\frac{(\eta - 1)(\xi - 1)}{4} \\
 \psi_2^g(\xi, \eta) &= -\frac{(\eta - 1)(\xi + 1)}{4} \\
 \psi_3^g(\xi, \eta) &= +\frac{(\eta + 1)(\xi + 1)}{4} \\
 \psi_4^g(\xi, \eta) &= -\frac{(\eta + 1)(\xi - 1)}{4}
 \end{aligned} \tag{3-53}$$

4

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos no trabalho. Nele é mostrada a influência de diferentes parâmetros no escoamento de duas gotas de óleo imersas em água através de um capilar reto.

A formulação e o método de solução utilizados neste trabalho foram validados no trabalho de Roca e Carvalho (4), comparando as previsões de escoamento através de capilares retos com resultados disponíveis na literatura.

Os resultados foram obtidos utilizando-se uma malha de 15x150 elementos quadrangulares igualmente espaçados em cada uma das direções, utilizada por Roca(3) em sua dissertação de mestrado e por Roca e Carvalho(4). A geometria utilizada foi definida com raio de $50\mu m$ e comprimento de $1.0mm$. A origem do sistema de coordenadas se encontra no centro do capilar, sobre a linha de simetria.

A discretização da formulação de level set não assegura a conservação de massa. No entanto, o método totalmente acoplado e totalmente implícito utilizado para discretizar o conjunto de equações diferenciais minimiza este problema. Para isso, é necessário que se escolha tamanhos de elemento e passos de tempo apropriados. Como neste trabalho a malha já foi escolhida, significa que o tamanho dos elementos é fixo, sendo necessário escolher somente o tamanho do passo de tempo apropriado.

O passo de tempo máximo para assegurar a conservação de massa, dentro de uma precisão definida, é função da velocidade da interface, e portanto, da vazão imposta e do tamanho do elemento, como pode ser visto no trabalho de Roca e Carvalho (4). Foi mostrado que para manter a perda de massa menor que 10% da massa original, o passo de tempo deve ser menor que 1/10 do tempo de percurso da gota dentro de um único elemento.

4.1

Parâmetros adimensionais

Aqui são apresentados os parâmetros adimensionais relevantes ao problema estudado.

- **Número de Capilaridade, Ca**

O número de capilaridade foi definido na Eq. 1-1. Tanto a viscosidade das fases como a velocidade média do escoamento foram tratadas como constantes neste trabalho. Logo, uma variação no número de capilaridade representa uma variação na tensão interfacial. Vale lembrar que Ca e σ são inversamente proporcionais.

- **Razão de diâmetros da gota e do capilar, D_g/D_{cap}**
- **Razão da distância entre gotas e diâmetro do capilar, δ_d/D_{cap}**
- **Razão de viscosidades, $\lambda = \mu_o/\mu_w$**

Mantida constante neste trabalho

4.2

Escoamento de duas gotas através de um capilar reto

A Fig. 4.1 mostra o valor inicial do campo da função de level set relativo ao escoamento de duas gotas com uma distância prescrita entre elas.

As gotas possuem duas partes distintas em sua inicialização. A primeira corresponde às pontas arredondadas, com um raio fixo (R_i) de $30\mu m$. A outra parte corresponde ao centro da gota (L_{gota}), que varia de tamanho para que seja possível estudar o escoamento de gotas maiores.

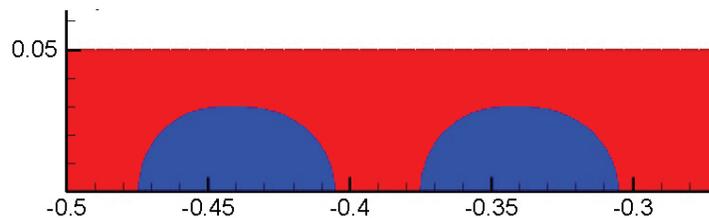


Figura 4.1: Função de level-set inicial de duas gotas separadas de $30\mu m$

As previsões apresentadas neste trabalho foram realizadas com uma razão de viscosidades $\lambda = \mu_o/\mu_w = 10$ e vazão imposta $Q = 0,03mL/h$, que corresponde a uma velocidade média da fase contínua de $V = 1,06mm/s$.

A evolução da configuração das gotas foi estudada em função do número de capilaridade (tensão interfacial entre as duas fases), da distância inicial entre as duas gotas e do tamanho das gotas.

Para cada caso estudado, variou-se o passo de tempo até que a solução se tornasse independente do seu valor. Um exemplo da análise da independência do passo de tempo é mostrado na Fig 4.2. A evolução da distância entre as gotas é plotada para diferentes passos de tempo. A solução se torna independente do passo para $\Delta t = 3 \times 10^{-4} s$. Neste exemplo, a distância inicial entre as gotas foi de $\delta_d = 30 \mu m$ e o efeito da tensão interfacial foi desprezado, ou seja, $Ca \rightarrow \infty$.

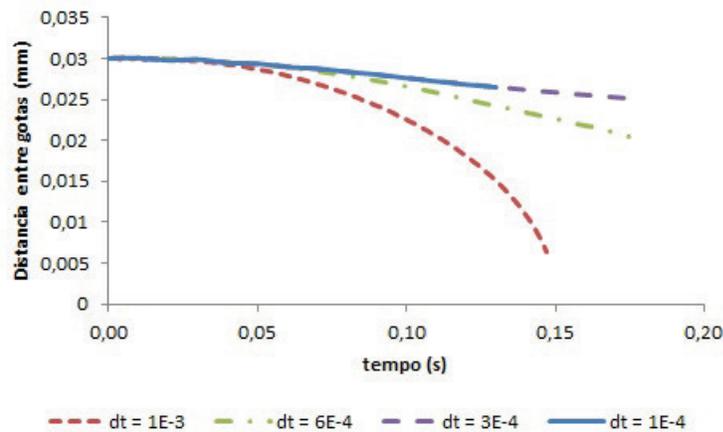


Figura 4.2: Evolução da distancia δ_d para diferentes valores de Δt com $Ca \rightarrow \infty$

Incluindo o efeito da tensão interfacial as características do escoamento mudam. Assim, é possível que o passo de tempo necessário para que a solução se torne independente do seu valor também mude.

De forma a avaliar o passo de tempo necessário quando o efeito da tensão interfacial é considerado, foram realizados testes com diferentes números de capilaridade ($Ca = 0,75$, $Ca = 0,25$ e $Ca = 0,10$, que são alguns dos números de capilaridade utilizados por Roca(3)). Para $Ca = 0,75$ e $0,25$, a solução se torna independente para um passo de tempo $\Delta t = 3,0 \times 10^{-4} s$. No caso de $Ca = 0,10$, a independência é encontrada apenas com $\Delta t = 1 \times 10^{-4} s$.

No entanto, o passo de tempo escolhido deve assegurar a conservação de massa. A evolução da massa das gotas para diferentes passos de tempo é mostrada na Fig. 4.3. Embora um passo de tempo maior seja necessário para que a solução seja independente, ele não assegura a conservação de massa. Desta forma, foi utilizado o passo de tempo $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ para todos os casos estudados nesta seção.

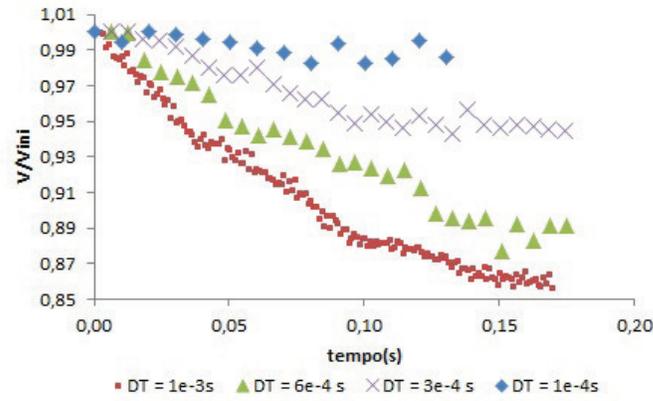


Figura 4.3: Volume total das gotas em diferentes passos de tempo com $Ca \rightarrow \infty$

As Figs 4.4 e 4.5 mostram que o método numérico utilizado funciona como esperado. Como as gotas possuem uma viscosidade muito maior que o líquido no qual estão suspensas, o perfil de velocidade dentro delas é praticamente constante, como pode ser visto na Fig 4.4.

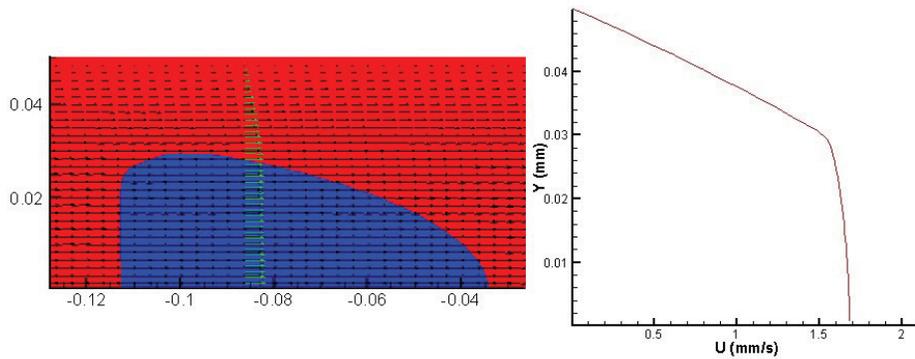


Figura 4.4: Perfil de velocidade próximo às gotas ao longo do escoamento

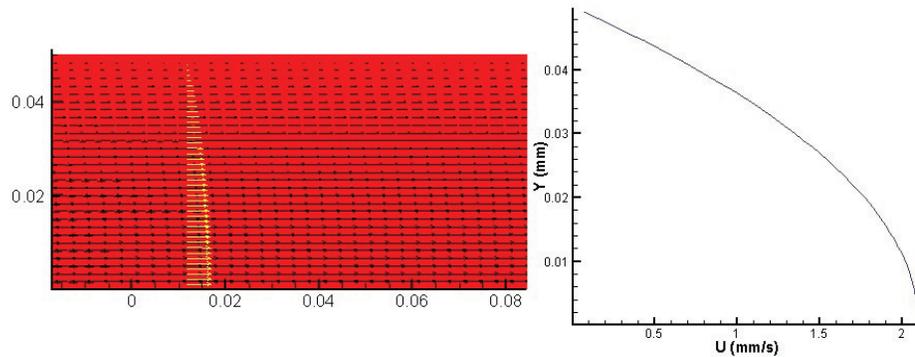


Figura 4.5: Perfil de velocidade longe das gotas ao longo do escoamento

Na Fig4.5 é mostrado o perfil da velocidade do escoamento longe das gotas. Este perfil é parabólico, como era esperado para o escoamento dentro de um duto.

O escoamento de duas gotas, inicialmente separadas de $\delta_d = 30\mu m$ com $Ca = 0,75$ em três instantes de tempo diferentes é mostrado na Fig 4.6. Pode-se perceber que a distância entre as gotas diminui, principalmente devido ao fato das gotas ficarem mais alongadas durante o escoamento. Esperando-se tempo suficiente as gotas podem colidir. O efeito da coalescência das gotas no escoamento não foi estudado neste trabalho.

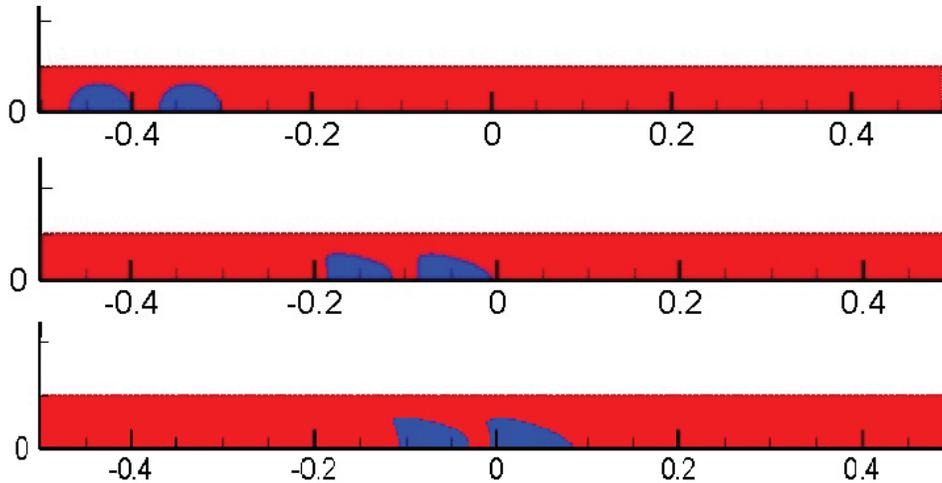


Figura 4.6: Evolução das gotas com $Ca = 0,75$ e $\delta_d = 30\mu m$

Convenciona-se que a numeração das gotas é dada por ordem cronológica de entrada no capilar. Logo, a gota à esquerda na Fig 4.6 é a segunda gota ou gota número dois e a gota à direita é a primeira gota ou gota número um, assim como foi mostrado no esquema da Fig2.1. O escoamento destas gotas é comparado com o escoamento de um única gota, utilizada como referência, através do capilar. A partir da posição das extremidades das gotas é possível calcular a velocidade destes pontos por diferença central.

O Método de Newton deixa de convergir em grandes deformações das gotas, como pode ser visto na Fig4.7. Com isso, o passo de tempo é reduzido para se tentar a convergência do método.

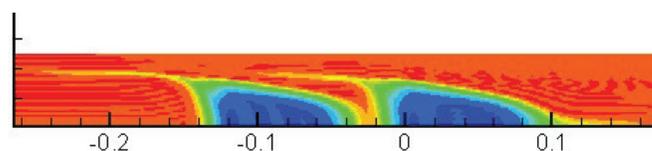


Figura 4.7: Deformação do campo da função de level set

Como resultado dessa redução do passo de tempo, o cálculo da velocidade se torna cada vez mais impreciso, causando oscilações, como pode ser visto na Fig.4.8, em que é mostrada a evolução da velocidade das extremidades de uma gota escoando através do capilar. Desta forma, torna-se necessária a utilização de métodos que combatam esta distorção da função de level set, como por exemplo métodos de reinicialização da função de Level Set.

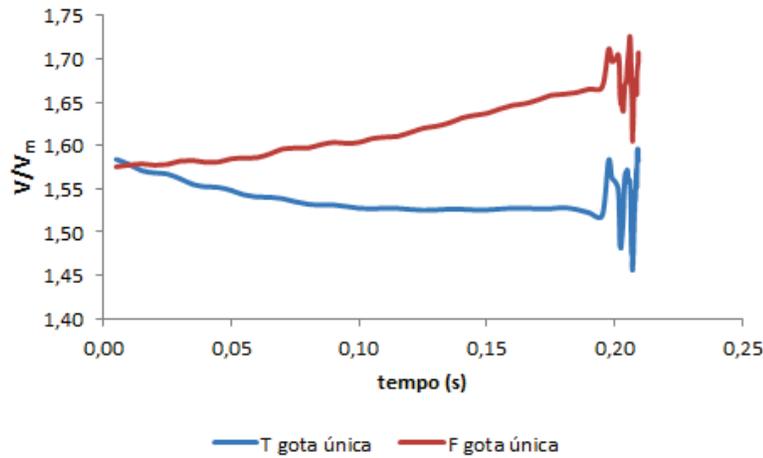


Figura 4.8: Oscilação da velocidade com a redução do passo de tempo

4.2.1

Efeito da distância inicial entre as gotas

Como já foi mencionado anteriormente, foram estudados quatro casos com número de capilaridade diferentes ($Ca = 0.75, Ca = 0.25, Ca = 0.10$ e $Ca \rightarrow \infty$). Em seguida serão mostrados os resultados de cada um dos casos separadamente, tanto para as gotas próximas como afastadas uma da outra. As distâncias entre gotas variam entre quatro tamanhos distintos, como pode ser visto na tabela 4.1 também representadas em termos do diâmetro do capilar.

$\delta_d [\mu m]$	30	50	100	500
	$0,3 \times D_{cap}$	$0,5 \times D_{cap}$	$1,0 \times D_{cap}$	$5,0 \times D_{cap}$

Tabela 4.1: Diferentes distâncias de gota usadas e suas relações com o diâmetro do capilar

Percebe-se que são duas distâncias entre gotas menores do que o diâmetro do capilar pelo qual as gotas escoam. Além disso, ainda foram estudados casos em que a distância entre gotas é exatamente igual ao diâmetro do capilar. E, para completar, um último caso em que $\delta_d \gg D_{cap}$.

- $Ca = 0,75$:

A evolução do escoamento das duas gotas próximas foi mostrado na Fig4.6 com uma distância entre gotas pequena. A Fig4.9 mostra a evolução no tempo do escoamento de gotas muito longe uma da outra ($\delta_d = 500\mu m$).

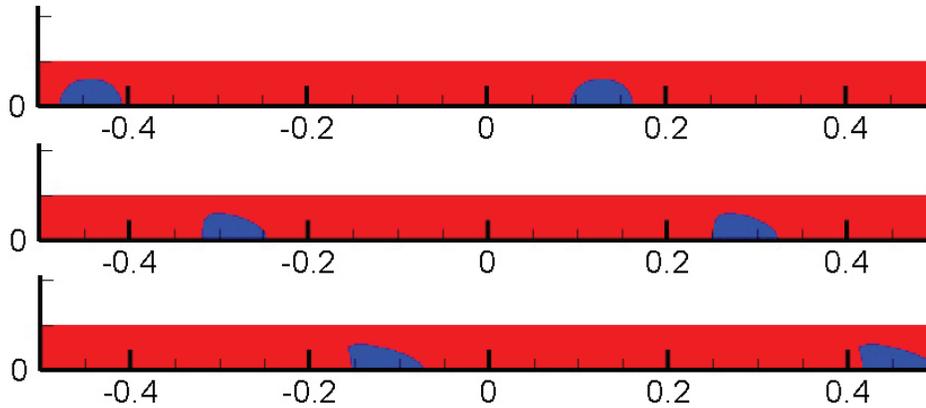


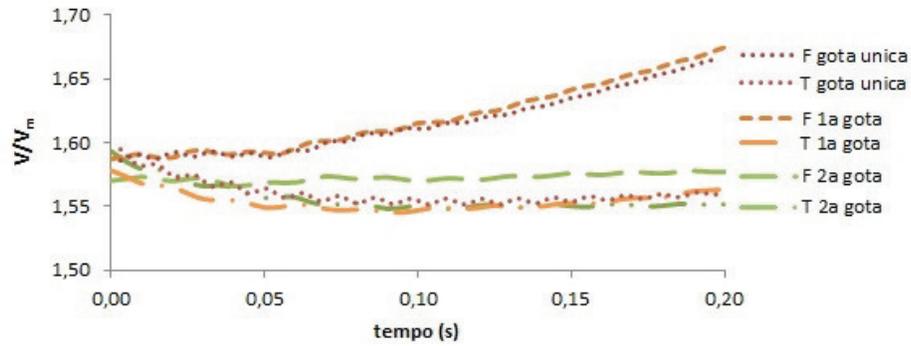
Figura 4.9: Evolução das gotas com $Ca = 0,75$ e $\delta_d = 500\mu m$

Comparando as duas figuras (Fig4.6 e 4.9) percebe-se, pelo menos qualitativamente, que a segunda gota sofre influência da primeira gota quando elas estão próximas, já que o formato das duas é um pouco diferente. Para verificar este fato, o escoamento das duas gotas através do capilar é comparado com o escoamento de uma única gota, utilizado como referência no estudo. A evolução da velocidade das extremidades das três gotas é mostrada, em termos da velocidade média do escoamento, na Fig. 4.10.

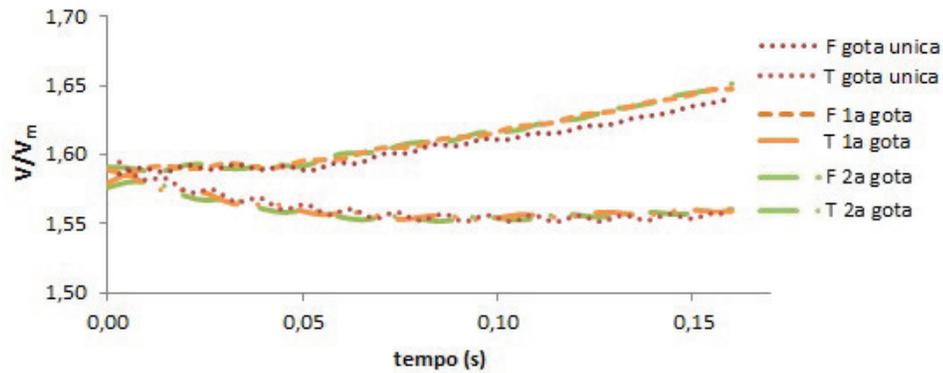
Primeiramente, é possível notar que as gotas escoam com velocidade superior à velocidade média do escoamento. Além disso, a parte frontal das gotas escoam com velocidade superior à velocidade da parte posterior, o que indica um aumento de tamanho das gotas ao longo do escoamento.

Percebe-se que para distâncias entre gotas suficientemente grandes, como em (Fig 4.10(b)), que possui $\delta_d = 500\mu m$ ou $\delta_d/D_{cap} = 5$, as duas gotas escoam da mesma maneira, como se fossem gotas únicas. No entanto, ao reduzir a distância inicial entre elas, a segunda gota passa a sofrer influência do escoamento da primeira. A presença da primeira gota impede que a frente da gota subsequente acelere, não alcançando a velocidade da gota de referência, como é visto na Fig 4.10(a).

Como consequência dessa diferença de velocidade das extremidades das gotas, elas ficam maiores, mais alongadas com o decorrer do escoamento. A Fig 4.11 mostra a evolução do tamanho das duas gotas para diferentes distâncias iniciais, em termos do diâmetro da gota esférica de volume equivalente ao da gota no início do escoamento.



4.10(a): $\delta_d = 30\mu m$

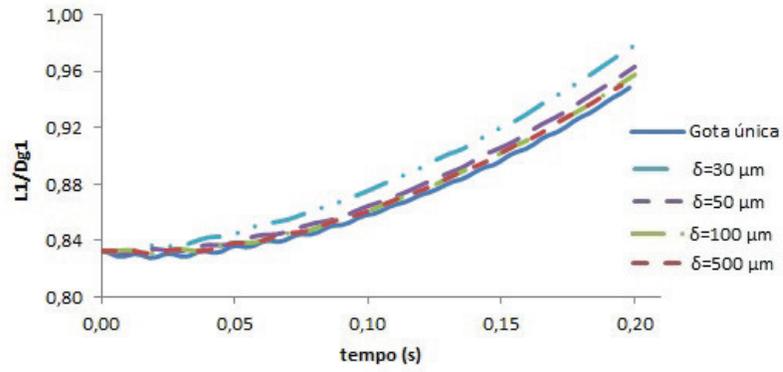


4.10(b): $\delta_d = 500\mu m$

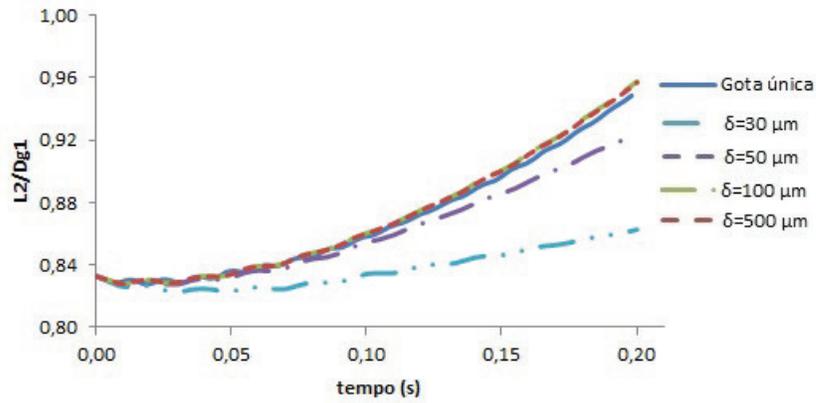
Figura 4.10: Velocidade das extremidades das gotas com $Ca = 0,75$

Assim como mostrado para a velocidade das gotas, a evolução do tamanho das mesmas é influenciado por pequenas distâncias iniciais. A primeira gota permanece inalterada, não sofrendo influência muito significativa da segunda gota (Fig 4.11(a)), para qualquer δ_d entre as duas. Ela se comporta como se estivesse sozinha no escoamento. Por outro lado, a segunda gota cresce mais lentamente quando δ_d é menor, tipicamente $\delta_d < 100\mu m$ ($\delta_d < D_{cap}$), como pode ser visualizado na Fig 4.11(b).

Ao longo do escoamento as gotas crescem se aproximando do diâmetro da gota esférica de volume equivalente. No entanto, vale ressaltar que o que está sendo computado é a distância dos pontos das gotas no eixo de simetria. Como o volume das gotas é mantido, enquanto as extremidades, no eixo de simetria, crescem, outras partes das gotas devem necessariamente diminuir de tamanho.



4.11(a): Gota 1



4.11(b): Gota 2

Figura 4.11: Tamanho das gotas para $Ca = 0,75$ e diferentes distâncias iniciais

- $Ca = 0,25$:

O escoamento de duas gotas, tanto próximas quanto afastadas uma da outra, através de um capilar reto para o caso de $Ca = 0,25$ é mostrado nas Fig4.12 e Fig4.13.

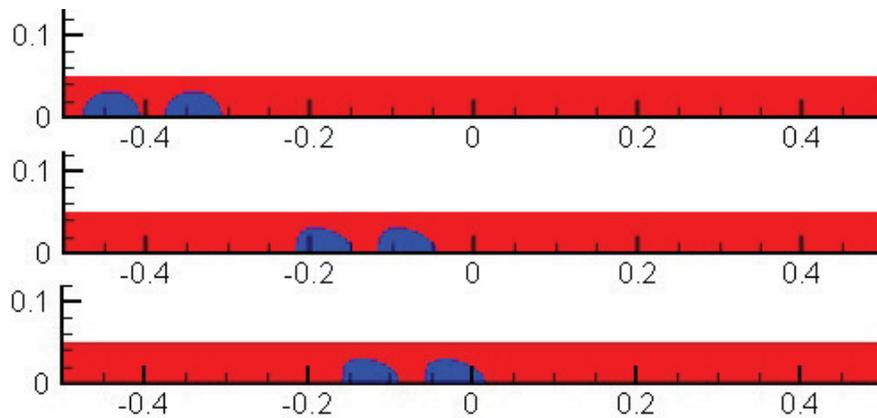


Figura 4.12: Evolução das gotas com $Ca = 0,25$ e $\delta_d = 30\mu m$

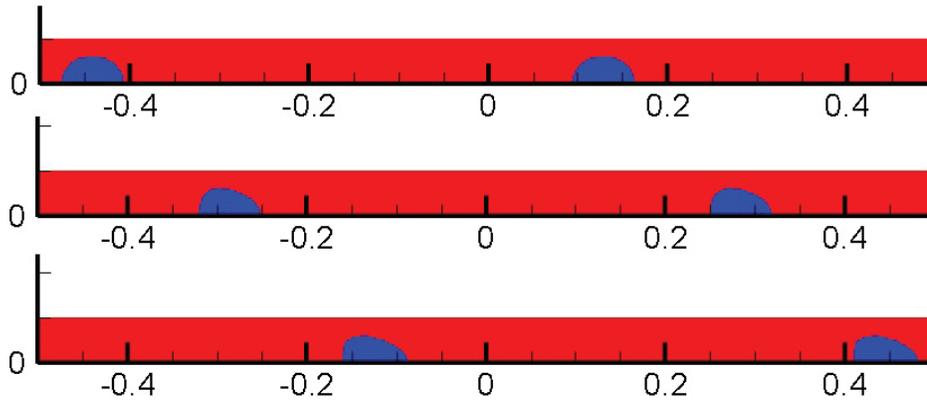
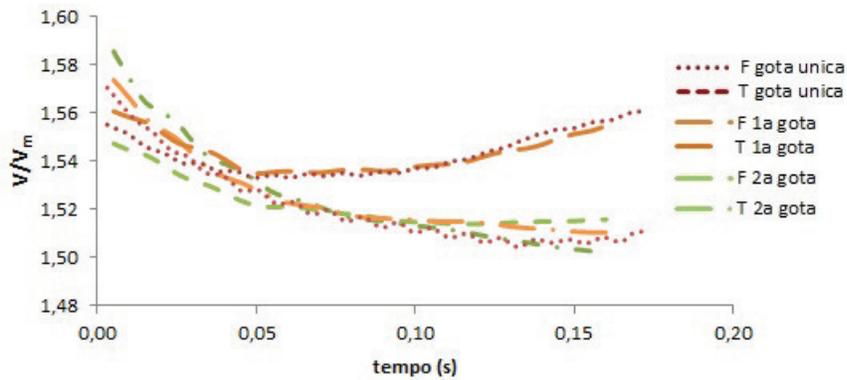
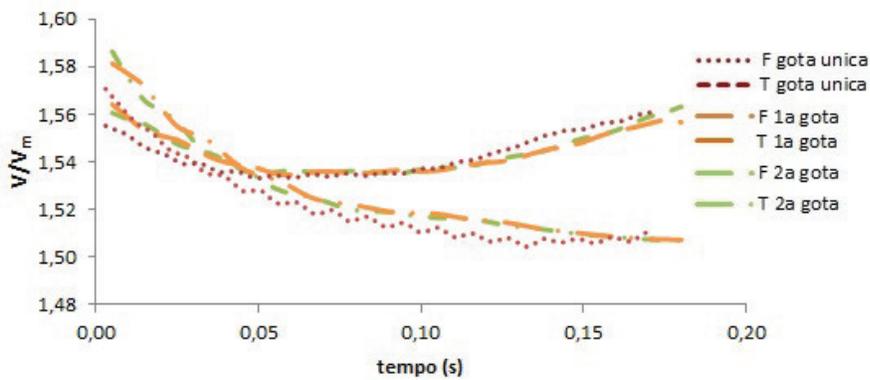


Figura 4.13: Evolução das gotas com $Ca = 0,25$ e $\delta_d = 500\mu m$

Visualmente nota-se, assim como no caso anterior ($Ca = 0,75$), uma pequena alteração no formato da segunda gota quando elas estão próximas. Este fato não ocorre quando elas estão suficientemente afastadas uma da outra. Numericamente estes dois fatos podem ser melhor visualizados na Fig4.14, em que é mostrada a evolução da velocidade dos pontos nas extremidades das gotas, tanto próximas quanto afastadas com $Ca = 0,25$.



4.14(a): $\delta_d = 30\mu m$

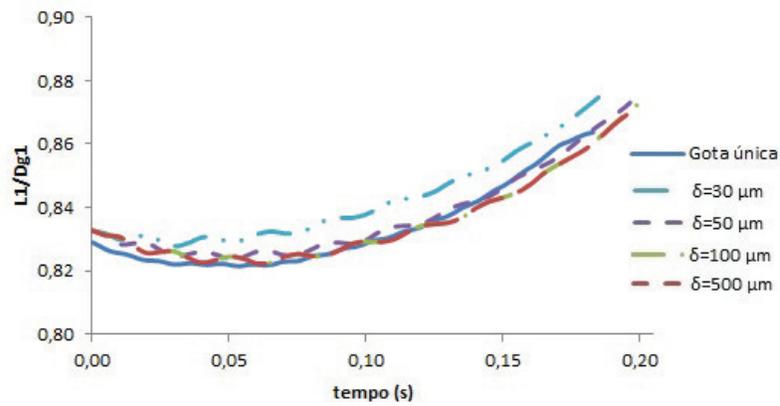


4.14(b): $\delta_d = 500\mu m$

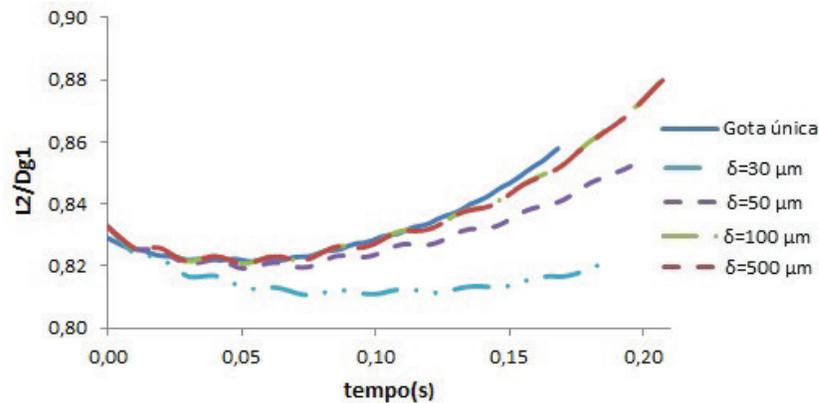
Figura 4.14: Velocidade das extremidades das gotas $Ca = 0,25$

É possível perceber que com o aumento da tensão interfacial as gotas começam a escoar com a parte posterior mais rápida do que a parte anterior. Em pouco tempo, a velocidade da parte da frente volta a ser maior e as gotas passam a crescer, assim como acontecia no caso anterior. Isto é consequência do aumento da tensão interfacial, que começa a forçar as gotas a assumirem uma configuração mais esférica.

A influência da primeira gota sobre a segunda pode ser melhor visualizado na velocidade da parte frontal desta última que é não atinge as velocidades da primeira e da gota de referência, escoando mais lentamente. A evolução da velocidade das extremidades causa uma variação no tamanho das gotas no eixo de simetria, que pode ser visualizada na Fig4.15.



4.15(a): Gota 1



4.15(b): Gota 2

Figura 4.15: Tamanho das gotas para $Ca = 0,25$ e diferentes distâncias iniciais

Assim como anteriormente, a primeira gota quase não sofre influência do δ_d entre elas, a exceção ficando para o caso de $\delta_d/D_{cap} = 0,3$ em que, nos dois casos ($Ca = 0,75$ e $Ca = 0,25$), existe uma pequena variação do crescimento das gotas se comparadas com a gota escoando sozinha no capilar.

A maior influência de uma gota sobre a outra é melhor visualizada na segunda gota (Fig4.15(b)), sendo notada nos casos com $\delta_d < D_{cap}$ (no trabalho, $\delta_d < 100\mu m$).

Nota-se também que, em comparação com os outros casos, ambas as gotas aumentam menos de tamanho ao longo do eixo de simetria. Por exemplo, enquanto para o caso $Ca \rightarrow \infty$, apresentado mais à frente no trabalho, o crescimento da segunda gota varia 14,7% entre δ_d grande e δ_d pequeno, para o caso $Ca = 0,25$ a variação é de 4%.

- $Ca = 0,10$:

O escoamento das duas gotas em diferentes instantes de tempo, com δ_d pequeno e δ_d grande, é mostrado, respectivamente, nas Figs 4.16 e 4.17.

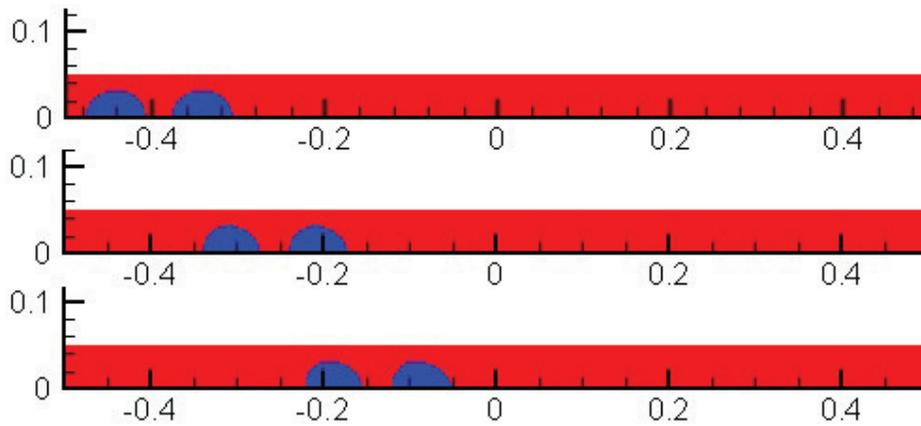


Figura 4.16: Evolução das gotas com $Ca = 0,10$ e $\delta_d = 30\mu m$

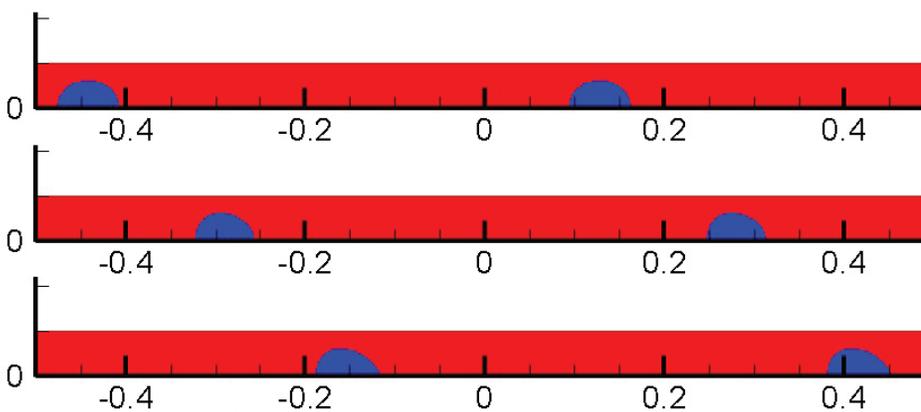
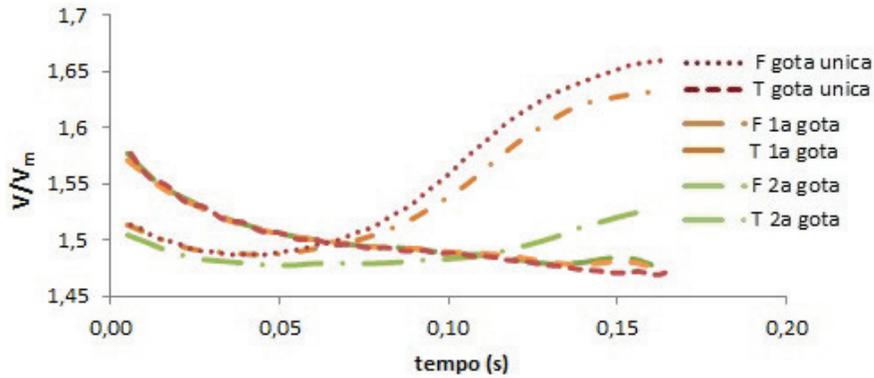
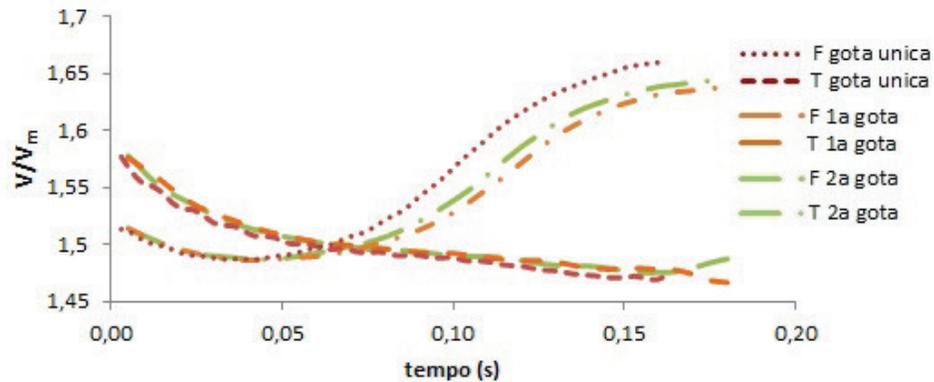


Figura 4.17: Evolução das gotas com $Ca = 0,10$ e $\delta_d = 500\mu m$

Assim como em casos anteriores, percebe-se uma diferença de formato da segunda gota quando ambas estão próximas, ficando menor do que a gota a sua frente. Por outro lado, com δ_d grande o formato da segunda gota se assemelha ao da primeira. Este efeito é melhor observado ao analisar a velocidade das extremidades das gotas (Fig4.18).



4.18(a): $\delta_d = 30\mu m$



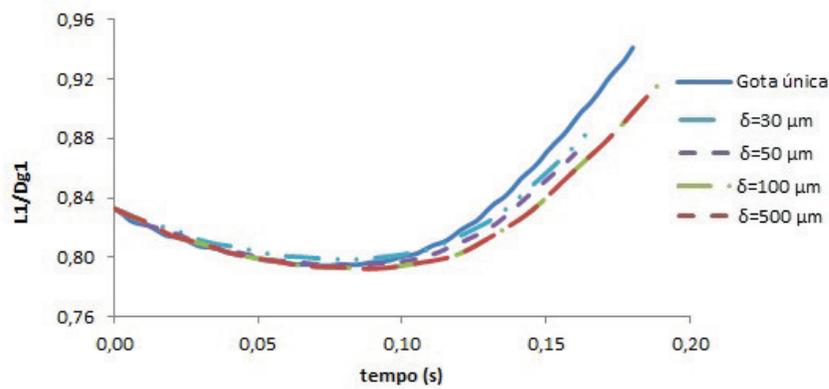
4.18(b): $\delta_d = 500\mu m$

Figura 4.18: Velocidade das extremidades das gotas $Ca = 0,10$

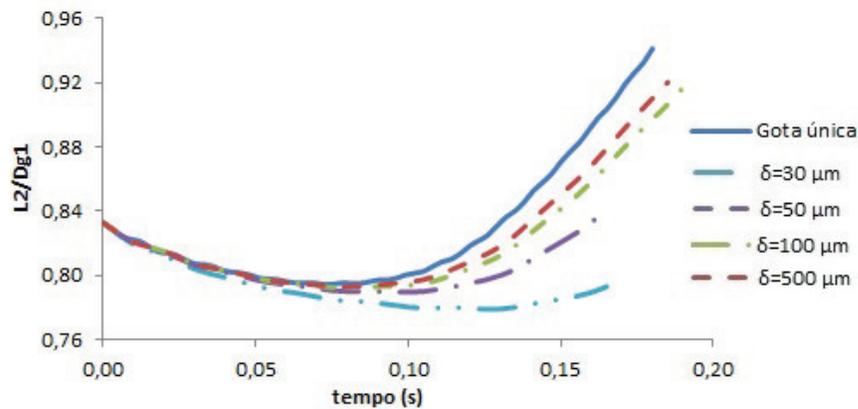
O fenômeno que começa a ocorrer com as velocidades das gotas com $Ca = 0,25$ ocorre com mais clareza com o aumento da tensão interfacial. A Fig4.18 mostra as curvas das velocidades das extremidades das gotas para o caso de $Ca = 0,10$.

Esta troca de magnitudes da velocidade das extremidades é devido a uma acomodação da configuração das gotas devido à condição inicial imposta. Ela ocorre com mais clareza com uma tensão interfacial maior, pois a força capilar é maior, fazendo com que haja uma maior resistência ao escoamento. Por este motivo, a velocidade da parte frontal das gotas no início do escoamento é menor do que em casos anteriores.

A influência da primeira gota sobre a segunda é vista, assim como nos outros casos, na velocidade da parte frontal da segunda gota, como pode ser visto na Fig4.18(a), quando δ_d é pequeno. A velocidade atingida neste caso é muito menor do que as velocidades das partes frontas da primeira gota e da gota escoando sozinha.



4.19(a): Gota 1



4.19(b): Gota 2

Figura 4.19: Tamanho das gotas para $Ca = 0, 10$ e diferentes distâncias iniciais

Nota-se que a velocidade da parte frontal das duas gotas também não segue a evolução da parte frontal da gota de referência quando δ_d é suficientemente grande, apesar de serem quase iguais. Esta diferença ocorre devido à alta tensão interfacial.

Como a velocidade das gotas pode ser dividida em duas partes distintas, conseqüentemente, o seu crescimento também pode ser (Fig4.19). Na primeira parte ambas as gotas diminuem de tamanho, devido à acomodação mencionada anteriormente, influenciada pela tensão interfacial. Na segunda parte, passam a crescer junto com o escoamento. Esta variação de tamanho coincide com as velocidades das gotas se alternando.

É possível perceber que o crescimento das gotas, mesmo com $\delta_d > D_{cap}$, não se iguala ao da gota de referência, diferentemente do que acontecia nos casos com tensão interfacial menor. A segunda gota continua sofrendo uma maior influência, mas, neste caso, a primeira gota também sofre. É notada uma diferença de 4,6% no crescimento da primeira gota com relação à gota de referência para os casos de $\delta_d > D_{cap}$.

- $Ca \rightarrow \infty$:

O escoamento de duas gotas, sem tensão interfacial, em diferentes instantes de tempo, para δ_d pequeno e δ_d grande, é mostrado, respectivamente, pelas Figs4.20 e 4.21.

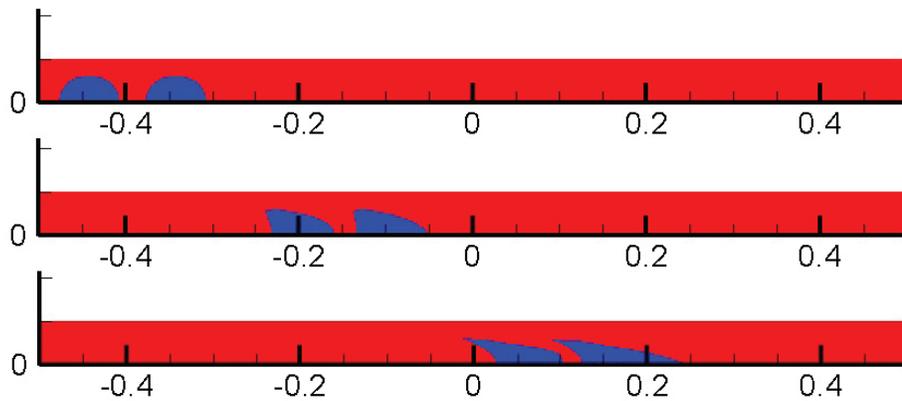


Figura 4.20: Evolução das gotas com $Ca \rightarrow \infty$ e $\delta_d = 30\mu m$

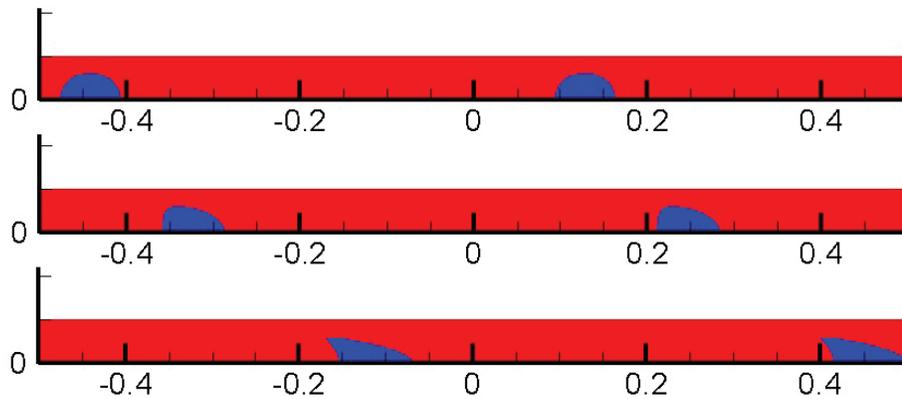
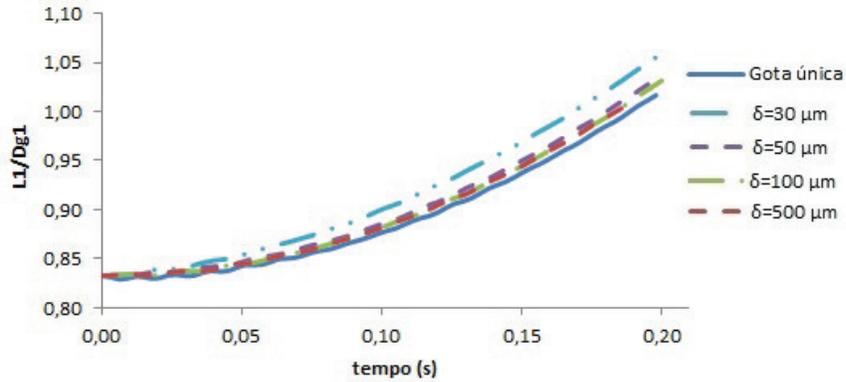


Figura 4.21: Evolução das gotas com $Ca \rightarrow \infty$ e $\delta_d = 500\mu m$

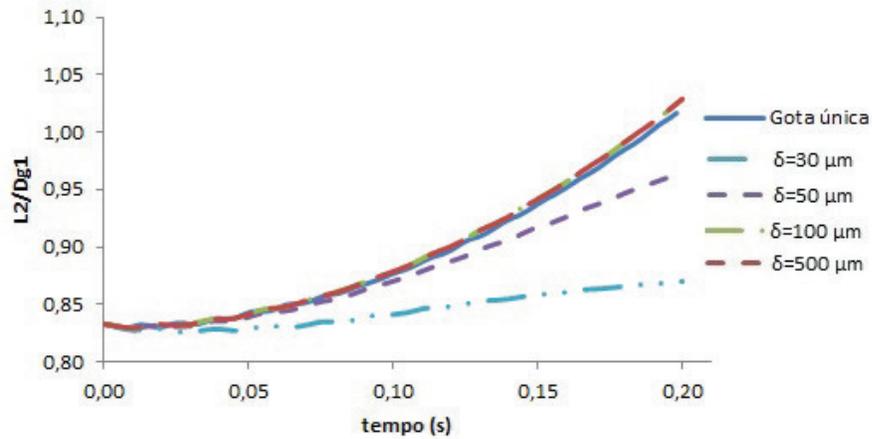
Sem tensão interfacial, as gotas se deformam mais facilmente (Fig4.22), se tornando mais alongadas (Fig4.20, por exemplo). Como não há resistência ao seu crescimento, ao final do mesmo tempo elas estão mais alongadas que

nos outros casos, algo em torno de 6,6% maior do que o caso em que ocorre a segunda maior deformação.

Este é o único caso em que as gotas deformaram o suficiente para atingir o diâmetro da gota esférica de volume equivalente ao da gota no início do escoamento.



4.22(a): Gota 1

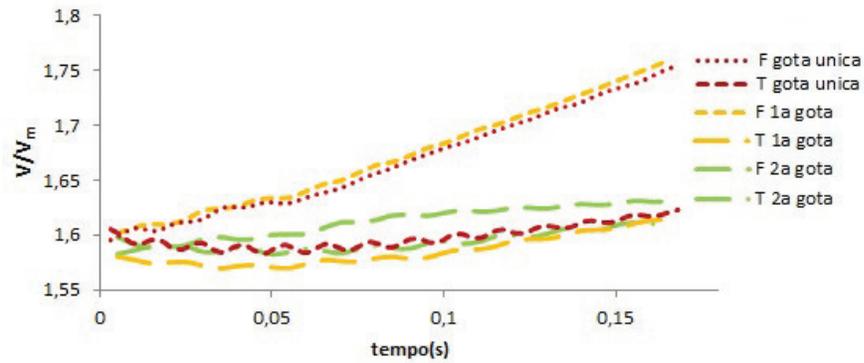


4.22(b): Gota 2

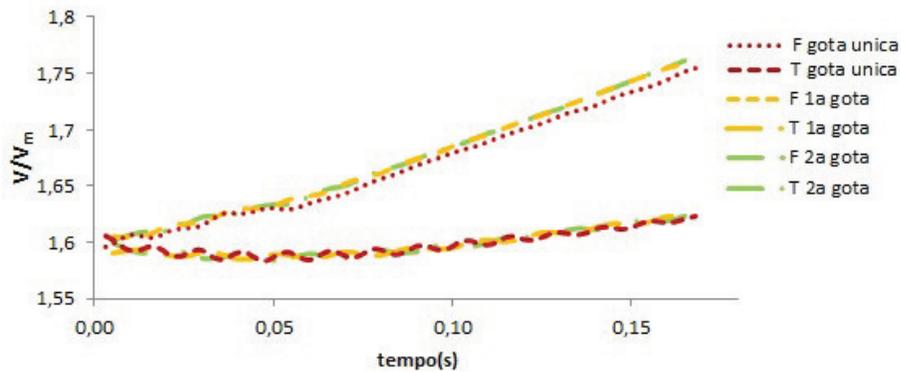
Figura 4.22: Tamanho das gotas para $Ca \rightarrow \infty$ e diferentes distâncias iniciais

Esta falta de resistência da tensão interfacial é também refletida na velocidade que as gotas atingem, como pode ser visto na Fig4.23, em que a velocidade atingida no mesmo instante de tempo chega a ser aproximadamente 6% maior que nos outros casos estudados.

Assim como nos outros casos estudados, para δ_d suficientemente pequenos, a frente da segunda gota não atinge as velocidades da frente da primeira e da gota única, sendo aproximadamente 8,5% menor ao final do escoamento.



4.23(a): $\delta_d = 30\mu m$



4.23(b): $\delta_d = 500\mu m$

Figura 4.23: Velocidade das gotas sem tensão interfacial

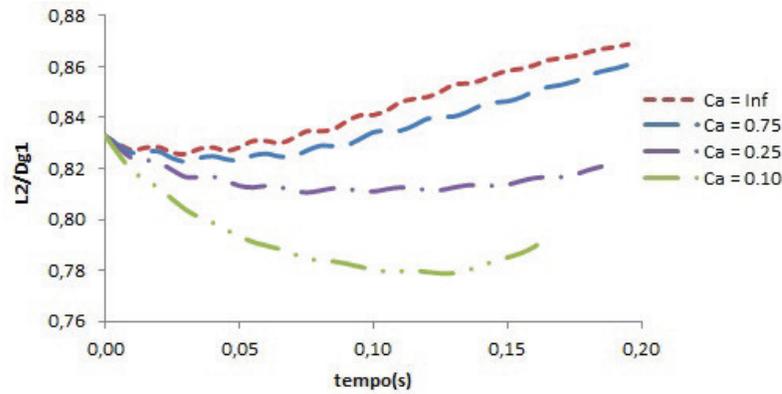
Mesmo a frente da segunda gota, que escoam mais lentamente quando δ_d é pequeno, atinge velocidades maiores do que nos casos com tensão interfacial. O padrão encontrado para o caso de $Ca = 0,75$ permanece com a primeira gota não sendo afetada pelo escoamento da segunda. Esta, por sua vez, percebe uma influência da primeira gota para $\delta_d < D_{cap}$. Além disso, ambas as gotas escoam como gotas únicas dentro do capilar para δ_d suficientemente grande ($\delta_d > D_{cap}$).

4.2.2

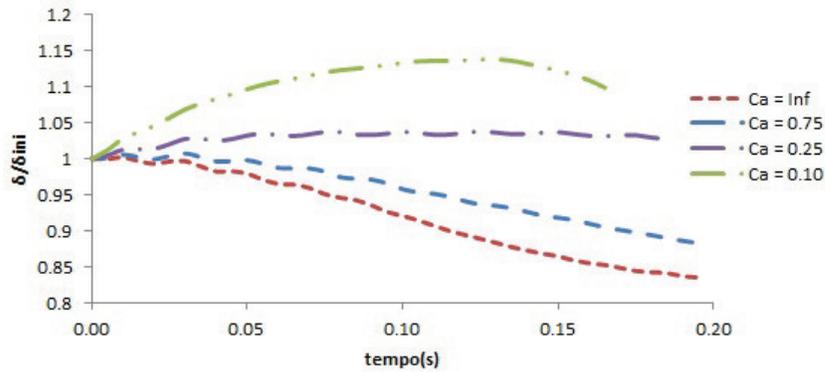
Efeito do número de capilaridade

Percebe-se que para os diferentes casos estudados, a primeira gota não sofre influência do escoamento da segunda gota, independentemente da distância inicial entre elas. No entanto, o aumento da tensão interfacial modifica a forma com o tamanho das gotas se desenvolve com o tempo

A Fig.4.24 mostra a influência do número de capilaridade na evolução do tamanho e da distância inicial entre as gotas durante o escoamento.



4.24(a): Tamanho da gota



4.24(b): Distancia inicial entre gotas

Figura 4.24: Influência do número de capilaridade

O crescimento da segunda gota nos quatro casos estudados é mostrado na Fig4.24(a). O aumento da tensão interfacial faz com que o crescimento da gota seja atenuado, chegando a reduzir de tamanho, antes de voltar a crescer quando $Ca = 0,10$. Esta redução de tamanho é devido à acomodação da configuração das gotas devido à condição inicial imposta.

O efeito inverso é percebido na evolução do δ_d , mostrado na Fig4.24(b). A distância entre as gotas aumenta se o tamanho das gotas diminui e vice-versa.

Para $Ca = 0,25$, a variação tanto do tamanho das gotas quanto da distância entre elas varia muito pouco. Isto se deve ao fato da deformação devido ao escoamento ser compensada pela deformação devido à tensão interfacial.

A redução da taxa de crescimento da gota coincide com uma diminuição mais lenta ou mesmo um aumento do δ_d entre elas. Esta diminuição deve-se ao fato de que as forças interfaciais mais elevadas estarem forçando a interface a ficar mais arredondada, o que acarreta numa contração das extremidades, procurando atingir um equilíbrio, se acomodando em sua configuração ótima. Este arredondamento das gotas pode ser visto na Fig4.25.

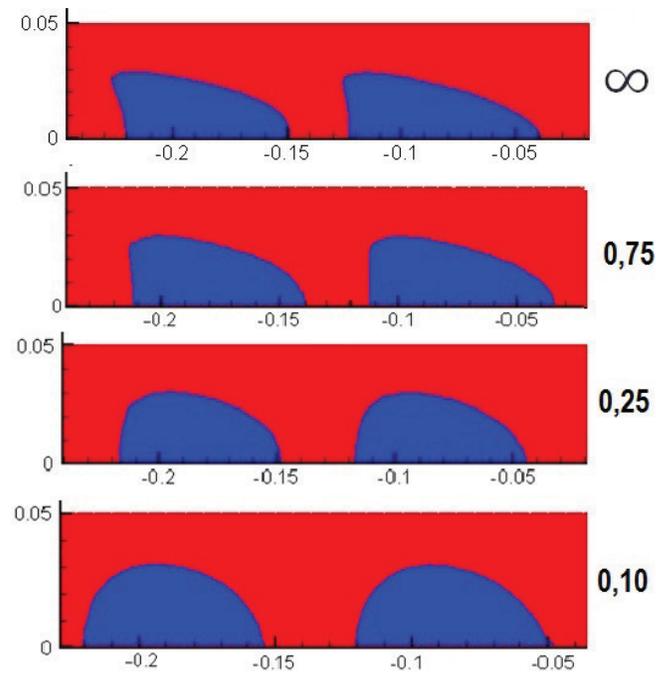


Figura 4.25: Arredondamento das gotas com o aumento da tensão interfacial

A presença desta força interfacial mais elevada explica o comportamento da velocidade das extremidades das gotas em tensões interfaciais mais elevadas. Como na parte da frontal da gota a força é contrária, a velocidade se torna menor. Este efeito acontece até as gotas se acomodarem em uma posição mais arredondada.

4.2.3

Efeito do tamanho das gotas

Até o momento, todas as gotas nos casos estudados tiveram sempre o mesmo volume descrito pela razão entre os raios da gota esférica, de volume equivalente, e do capilar, $g_1 = R_{g_1}/R_c = 0,84$. De forma a estudar a influência do tamanho das gotas no seu escoamento através do capilar, foram realizados testes com gotas com razões de raios maiores, $g_2 = 0,89$, $g_3 = 0,95$, $g_4 = 1,01$ e $g_5 = 1,09$, mostrados na tabela (4.2). Em todos os casos estudados ambas as gotas possuem o mesmo tamanho, mantido padrão de casos anteriores. A distância inicial entre elas foi mantida em $30\mu m$.

A razão de raios utilizada considera gotas esféricas de volume equivalente ao das gotas inicializadas na simulação, que são mais alongadas, como um cilindro com bordas arredondadas. Gotas maiores são mais alongadas, como pode ser visto na Fig4.26.

caso	R_i [mm]	L_{gota} [mm]	R_g/R_{cap}
g_1	0,030	0,070	0,84
g_2	0,030	0,091	0,89
g_3	0,030	0,120	0,95
g_4	0,030	0,150	1,01
g_5	0,030	0,200	1,09

Tabela 4.2: Razão de diâmetros para diferentes geometrias de gotas

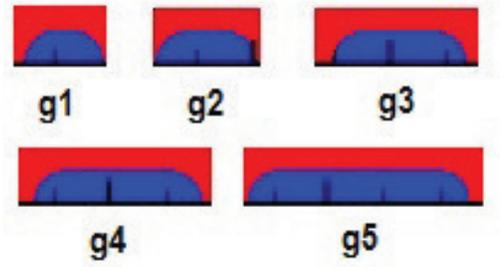


Figura 4.26: Os diferentes tamanhos de gotas utilizados e especificados na tabela 4.2

A Fig.4.27 mostra o gradiente de pressão adimensionalizado ao longo do capilar para os casos com diferentes tamanhos de gotas. Essa pressão P^* é dada pela Eq.4-1.

$$P^* = \frac{\Delta P/L}{\mu \bar{V}/RL} \tag{4-1}$$

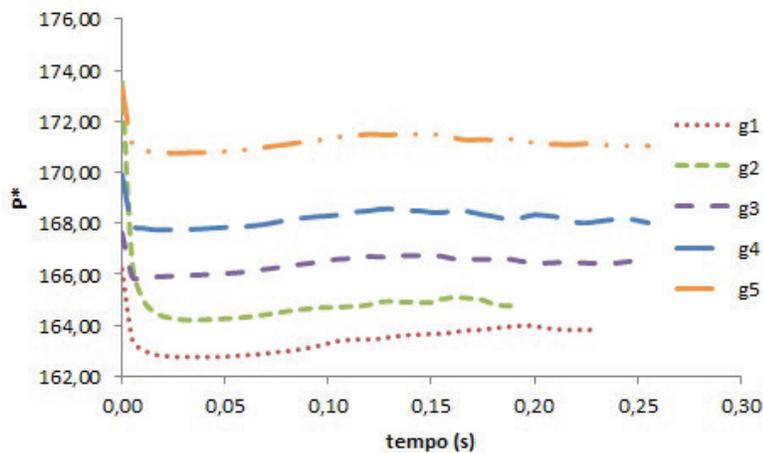


Figura 4.27: Gradiente de pressão adimensionalizado ao longo do capilar para diferentes tamanhos de gota e $Ca = 0,75$

O aumento do tamanho das gotas faz com que seja necessário um maior gradiente de pressão para que elas escoem. Em um dado momento, o sistema entra em regime permanente, fato evidenciado quando P^* se torna constante.

Nos outros casos estudados, o gradiente de pressão adimensionalizado ao longo do capilar continua aumentando. Isto significa que o sistema não entra em regime permanente até o momento em que a simulação termina (Fig4.28), indicando que as gotas ainda estão se deformando em busca de sua configuração ideal.

Isto mostra novamente a necessidade de se utilizar funções de reinicialização da função de level set, para que a solução possa convergir e o sistema consiga entrar em equilíbrio, atingindo o regime permanente.

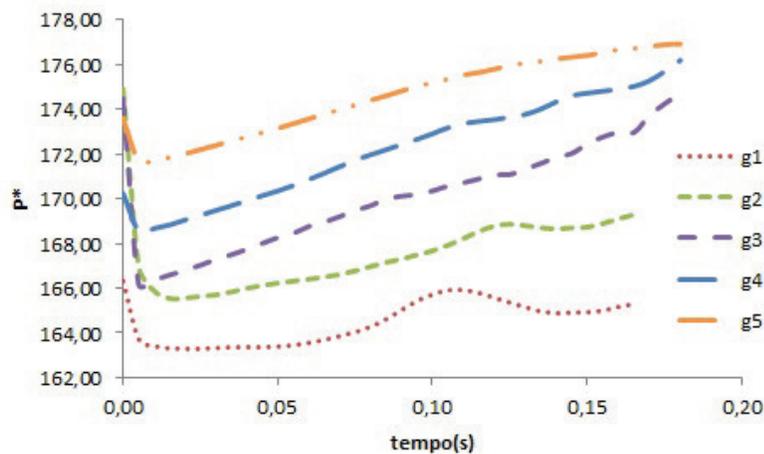
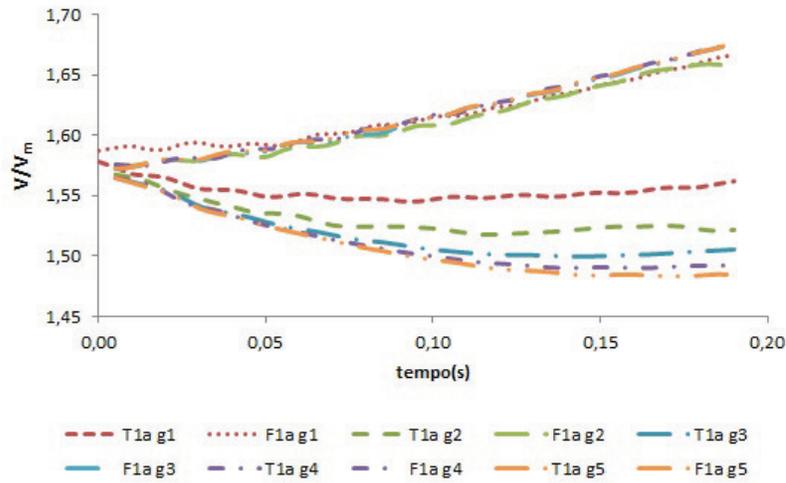


Figura 4.28: Gradiente de pressão adimensionalizado ao longo do capilar para diferentes tamanhos de gota e $Ca = 0,10$

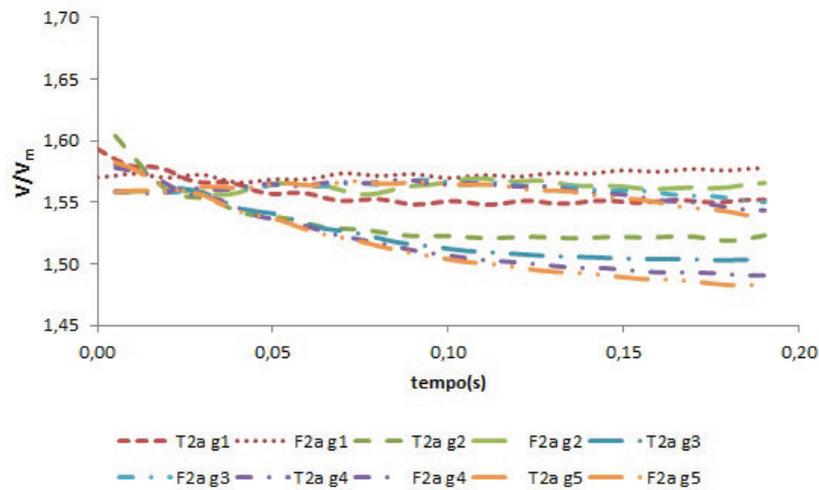
Ao analisar as Figs.4.27 e 4.28 percebe-se que o aumento da tensão interfacial faz com que seja necessária uma P^* maior ao longo do tempo. Isto ocorre por causa das forças interfaciais contrárias ao escoamento que forçam a interface a ficar mais arredondada.

A Fig4.29 mostra a evolução da velocidade das extremidades das duas gotas escoando através do capilar para os diferentes tamanhos de gota estudados. Na legenda da figura, T significa a parte traseira das gotas e F a parte frontal das mesmas.

Percebe-se a influência da primeira gota sobre a segunda na magnitude das velocidades finais alcançadas. Independentemente do seu tamanho, a segunda gota atinge velocidades máximas inferiores às da gota da frente.



4.29(a): Gota 1



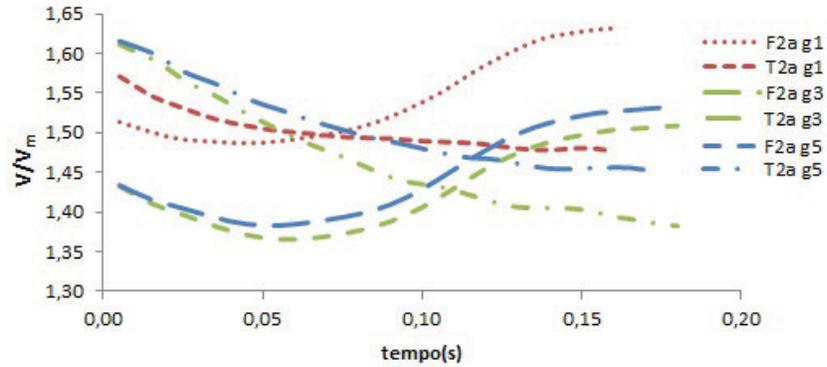
4.29(b): Gota 2

Figura 4.29: Velocidade das extremidades das gotas com diferentes razões de diâmetro e $Ca = 0,75$

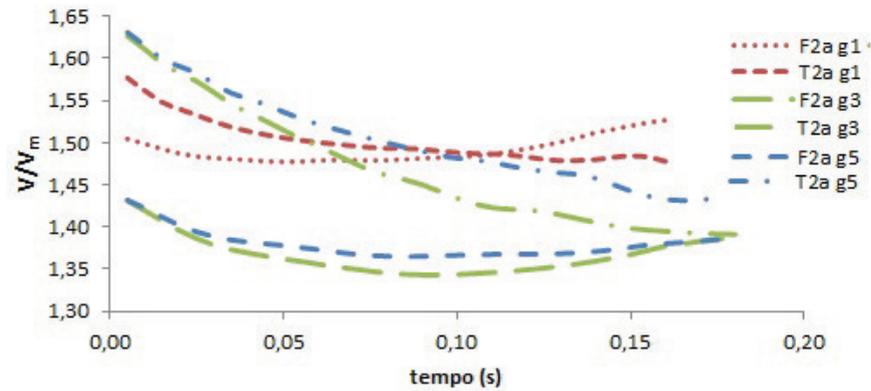
A velocidade da frente da primeira gota não sofre influência do tamanho das gotas. Por outro lado, a velocidade da frente da segunda gota começa a apresentar uma queda na velocidade ao longo do tempo quando o raio da gota esférica equivalente ao raio das gotas se aproxima do raio do capilar ($R_g/R_{cap} = 1$).

A maior influência do tamanho das gotas se dá na velocidade da sua parte posterior. Nesta região, percebe-se que para $R_g/R_{cap} < 1$, quanto maior o tamanho da gota, mais lenta se torna esta extremidade. A partir de $R_g/R_{cap} \cong 1$, a velocidade desta extremidade praticamente não varia, independentemente do tamanho da gota. Isto ocorre, provavelmente, devido a interações das gotas com as paredes do capilar.

É mostrada na Fig4.30 a evolução da velocidade da extremidades das gotas para o caso de $Ca = 0,10$ e diferentes tamanhos de gotas. Afim de evitar confusão na visualização das curvas são apresentados somente os resultados para três tamanhos de gota, g_1, g_3 e g_5 .



4.30(a): Gota 1



4.30(b): Gota 2

Figura 4.30: Velocidade das extremidades de g_1, g_3 e g_5 e $Ca = 0.10$

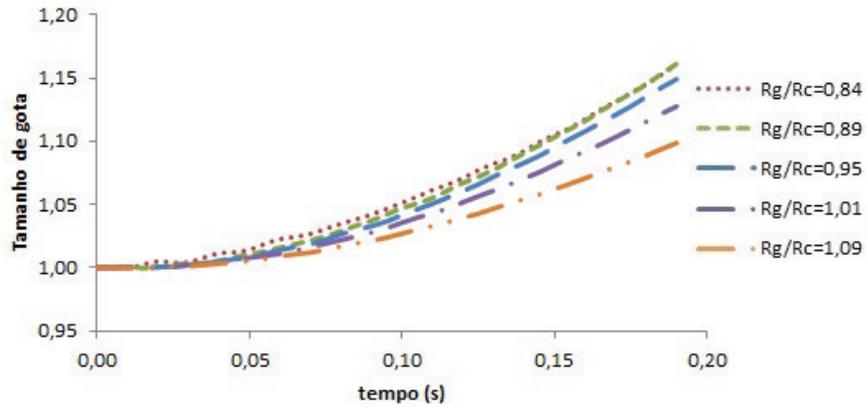
No caso da primeira gota, a variação de tamanhos não altera o formato das curvas das velocidades, mostradas anteriormente para $R_g/R_c = 0,84$. No entanto, não é possível perceber um padrão de tendência como o visualizado no caso $Ca = 0,75$.

Percebe-se primeiramente que é necessário um tempo maior para que haja a acomodação da configuração do formato de gotas maiores devido à condição inicial imposta, representada pelo cruzamento das velocidades das partes anterior e posterior das gotas.

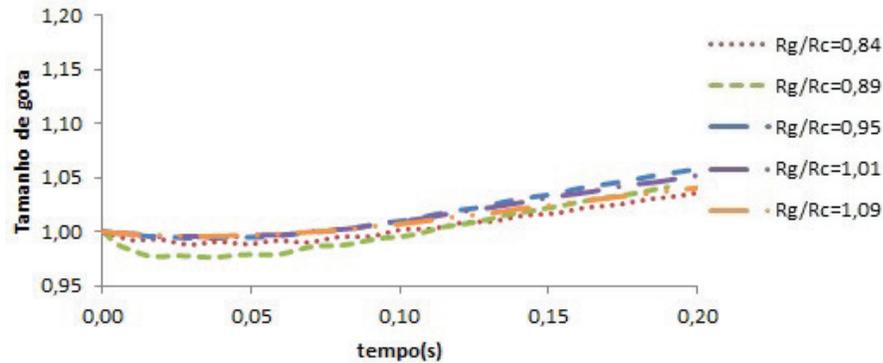
Nota-se também a influência da primeira gota sobre a segunda, não importando o tamanho das gotas, já que δ_d entre elas é pequeno. Ocorre um atraso da acomodação da configuração das gotas mencionada anteriormente. Isto fica evidente no fato de que as gotas maiores não chegam a completar esta

acomodação ao final da simulação. Ao comparar gotas de tamanhos iguais, a segunda gota se acomoda depois da primeira.

A evolução do tamanho das gotas é uma consequência direta da velocidade das suas extremidades. A Fig4.31 mostra a evolução do tamanho das gotas no caso de $Ca = 0,75$. Este tamanho de gota é dado pela razão do tamanho das gotas ao longo do tempo com o tamanho inicial das mesmas.



4.31(a): Gota 1



4.31(b): Gota 2

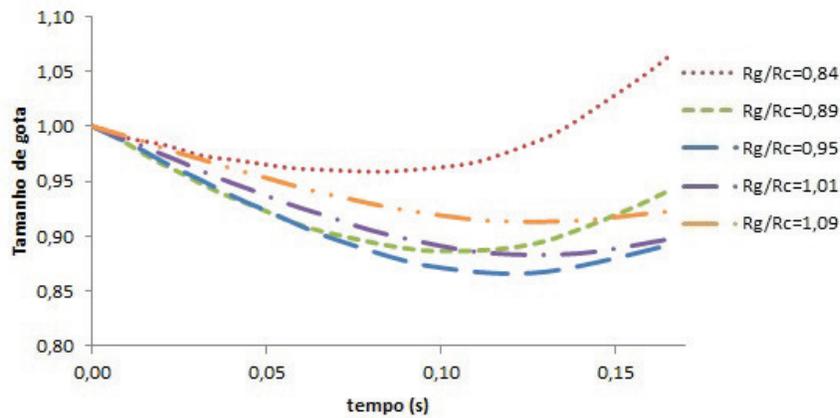
Figura 4.31: Tamanho das gotas com $Ca = 0,75$

Para gotas em que $R_g/R_{cap} < 1$, o seu crescimento não é afetado pelo aumento de tamanho das gotas. Por outro lado, nos casos em que $R_g/R_{cap} > 1$, elas crescem menos. Isto ocorre pois estas gotas interagem com as paredes do capilar e por isto crescem menos. Comparando a gota menor com as menores do que o capilar, o crescimento destas últimas chega a ser 15% maior.

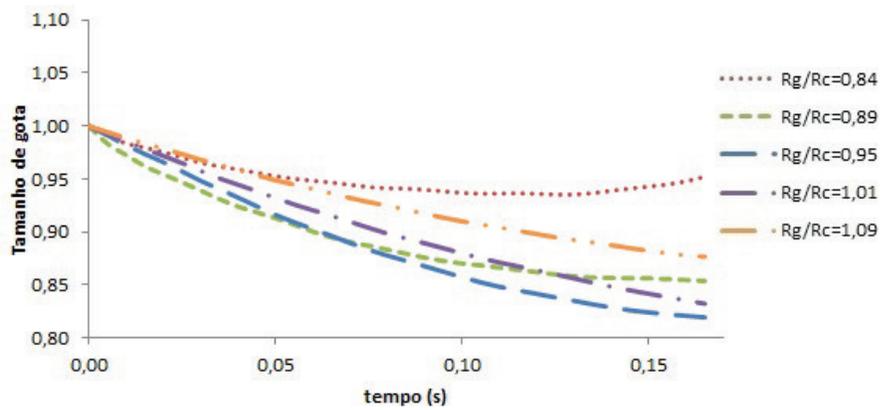
A segunda gota não sofre uma variação significativa do aumento do tamanho das gotas. A diferença entre a gota que mais cresce para a que menos cresce é de 1,6%. O δ_d pequeno impede que a gota cresça mais e assim sinta com mais intensidade dos efeitos da variação de R_g/R_{cap} .

No entanto, o aumento da tensão interfacial faz com que a diferenças

do comportamento das gotas de diferentes tamanhos se acentuem. A Fig4.32 mostra a evolução do tamanho das gotas para $Ca = 0,10$.



4.32(a): Gota 1



4.32(b): Gota 2

Figura 4.32: Tamanho das gotas com $Ca = 0,10$

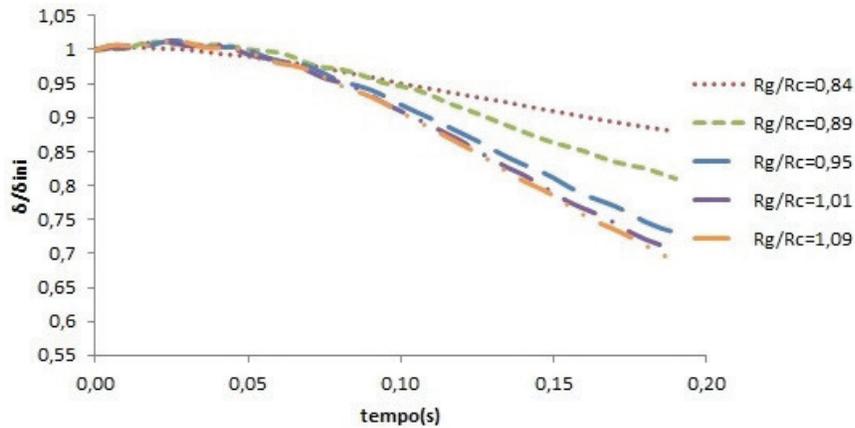
O comportamento das curvas de crescimento das gotas ao longo do tempo para diferentes tamanhos de gotas pode ser dividido em duas partes, com a divisão em $R_g/R_{cap} = 1$.

Para $R_g/R_{cap} < 1$, quanto maior a gota, menor é o seu tamanho ao final do escoamento, independentemente se teve ou não tempo suficiente para se acomodar em sua configuração ideal. Essa diferença da primeira para a segunda gota é devido ao δ_d entre elas, que atrasa a conformação das gotas devido à condição inicial imposta.

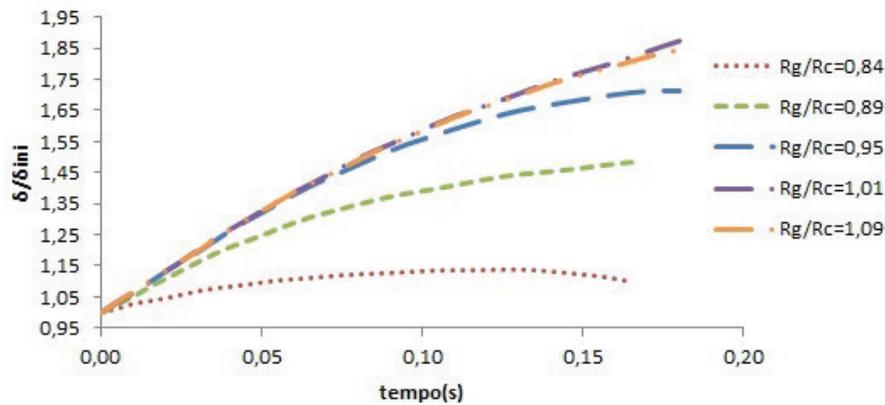
Por sua vez, para $R_g/R_{cap} > 1$, quanto maior a gota, menor é seu tamanho ao final da simulação. Elas não seguem o comportamento apresentado por gotas menores devido à sua interação com a parede do capilar, já que possuem o diâmetro equivalente maior do que o diâmetro do capilar.

A variação da distância δ_d entre as gotas também é afetada pelo aumento do tamanho das gotas estudadas. Esta variação apresenta comportamentos

distintos para baixas e altas tensões interfaciais. A Fig4.33 mostra a variação da distância entre as gotas no tempo, em função da distância inicial entre as mesmas. É mostrada a variação de δ/δ_{ini} para o cinco diferentes tamanhos de gota e dois números de capilaridade diferentes ($Ca = 0,75$ e $Ca = 0,10$).



4.33(a): $Ca = 0,75$



4.33(b): $Ca = 0,10$

Figura 4.33: Distância entre gotas

Levando-se em conta o caso com baixa tensão interfacial (Fig4.33(a)), percebe-se um padrão de decréscimo da distância entre as gotas com o aumento do tamanho das mesmas. Enquanto $R_g/R_{cap} < 1$, quanto maiores forem as gotas, menor se torna a distância entre elas. Isto ocorre, pois as gotas se deformam ao longo do escoamento, se aproximando uma da outra.

No entanto, nos casos de gotas maiores do que o capilar, a variação da distância entre as gotas é a mesma. Isto se deve ao fato de as gotas, sendo maiores do que o capilar, interagirem com as paredes do mesmo.

Como já foi discutido anteriormente, o aumento da tensão interfacial faz com que as forças interfaciais atuem com mais intensidade na interface das gotas. Com isso a parte frontal das mesmas cresce mais devagar, já que a velocidade desta extremidade é menor. É a acomodação da configuração inicial já mencionada anteriormente.

Com isso, a evolução da distância entre gotas se torna diferente do caso anterior. Na Fig4.33(b) percebe-se um aumento da distância entre as gotas. Nota-se que quanto maior a gota, maior também se torna o δ_d entre as gotas. No entanto, isto acontece somente para $R_g/R_{cap} < 1$.

A partir do momento em que o diâmetro das gotas atinge o diâmetro do capilar, a distância entre as gotas cresce de forma igual, assim como acontecia no caso com menor tensão interfacial.

É possível notar que, a partir do momento em que as gotas se conformam em sua posição ótima de escoamento, a distância entre elas começa a diminuir, assim como ocorria para $Ca = 0,75$.

Para que este fato seja visualizado mais claramente, é preciso que a simulação atinja mais do que 0,20 segundos de escoamento. Para que isto ocorra, são necessárias implementações de métodos que permitam uma melhor convergência do método de Newton utilizado.

5

Considerações finais

O escoamento de duas gotas de óleo imersas em água através de um capilar reto foi estudado nesta dissertação com o objetivo de avaliar a interação das duas gotas durante o escoamento, verificando o efeito da distância inicial entre as gotas, tamanhos de gotas e tensão interfacial.

O problema bifásico com superfície livre foi resolvido empregando-se o método de curvas de nível (*Level Set*). O sistema de equações diferenciais resultante foi resolvido aplicando-se o Método de Elementos Finitos. Foram utilizadas modificações do método de *Level Set* usual que permitem os estudos de escoamentos com fluxo de entrada e a inclusão de forças capilares.

Os resultados foram obtidos utilizando um capilar de $50\mu m$ de raio e $1.0mm$ de comprimento. A vazão foi mantida constante em $Q = 0.03ml/h$, que corresponde a uma velocidade média da fase contínua de $V = 1,06mm/s$, e a razão de viscosidades entre fase dispersa e fase contínua em $\lambda = 10$. Além disso, em todas as previsões as duas gotas possuem sempre o mesmo tamanho.

O efeito da distância inicial entre as gotas é percebido com mais intensidade na segunda gota. No entanto, para distâncias entre gotas maiores que $100\mu m$, ou seja, $\delta_d > D_{cap}$, a influência de uma gota sobre a outra deixa de ser percebida. A primeira gota, por sua vez, escoava como se estivesse sozinha dentro do capilar, não sentindo influência muito significativa da outra gota.

O aumento da tensão interfacial faz com que a distância entre as gotas diminua mais lentamente do que em casos com tensões interfaciais menores. Isto está relacionado com o fato de que a tensão interfacial força a interface das gotas a se tornarem mais esféricas por mais tempo, criando dificuldades na interação entre as gotas.

O aumento do tamanho das gotas acarreta num aumento do gradiente de pressão ao longo do capilar. Para números de capilaridades maiores, o escoamento entra em regime permanente e o gradiente de pressão se torna constante ou varia muito pouco. Por outro lado, diminuindo-se o número de capilaridade, o gradiente de pressão ao longo do capilar continua crescendo ao longo do tempo, não atingindo o regime permanente nos casos apresentados.

Gotas com $R_g/R_{cap} > 1$ se comportam de maneira diferente do que gotas menores, devido à interação das mesmas com a parede do capilar. Esta interação reduz a velocidade da parte posterior das gotas e em alguns momentos também da parte frontal. Com isso, afeta a variação de tamanho das gotas e da distância entre elas.

A função de *Level Set* é inicializada como a distancia euclidiana à interface. No entanto, ao longo do tempo ela deixa de ser representada como a função distancia. Isto pode, a longo prazo, provocar problemas de convergência do método de Newton utilizado. Uma sugestão para trabalhos futuros é a implementação e utilização de funções de reconstrução do método de level set, como sugerido na literatura, mas adaptadas para o uso com o método de elementos finitos. Com isso, é possível não só estender os resultados obtidos nesta dissertação, como reproduzir e estender os resultados obtidos por Roca(3).

Além disso, ainda pode ser sugerido como trabalhos futuros utilizar uma faixa maior de números de capilaridade, tanto maiores quanto menores, já que existem trabalhos na literatura em que são utilizados números de capilaridade menores do que os utilizados neste trabalho.

Outras sugestões seriam avaliar a influência da variação da razão de viscosidades dos fluidos, trabalhar com outras razões de diâmetro da gota com o do capilar, utilizar capilares com garganta. O estudo de um trem de gotas, tanto em um capilar reto como em um capilar com garganta também seria interessante.

Referências Bibliográficas

- [1] S Cobos, M S Carvalho, and V Alvarado. Flow of oil water emulsions through a constricted capillary. *International Journal of Multiphase Flow*, 35:151 – 169, 2009.
- [2] A J ROSA, DE SOUZA CARVALHO R, and J A D XAVIER. *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Editora Interciencia.
- [3] J F Roca. Análise numérica do escoamento de emulsões através de capilares retos e capilares com garganta. Master's thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- [4] J F Roca and M S Carvalho. Flow of a drop through a constricted micro capillary. *Computer and Fluids*, in press, 2013.
- [5] C D McAuliffe. Oil-in-water emulsions and their flow properties in porous media. *Journal of Petroleum Technology*, 25:727 – 733, 1973.
- [6] J Jovanovic, W Zhou, E V Rebrov, and T A Nijhuis. Liquid-liquid slug flow: Hydrodynamics and pressure drop. *Chemical Engineering Science*, 66:42 – 54, 2011.
- [7] M N Kashid and D W Agar. Hydrodynamics of liquid-liquid slug flow capillary microreactor: Flow regimes, slug size and pressure drop. *Chemical Engineering Journal*, 131:1 – 13, 2007.
- [8] M N Kashid, I Gerlach, S Goetz, J Franzke, J F Acker, F Platte, D W Agar, and S Turek. Internal circulation within the liquid slugs of liquid-liquid slug flow capillary microreactor. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 44:5003 – 5010, 2005.
- [9] M N Kashid, Y M Harshe, and D W Agar. Liquid-liquid slug flow in a capillary: An alternative to suspended drop or film contracoctrs. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46:8420 – 8430, 2007.

- [10] Y Ouyang, R S Mansell, and R D Rhue. Emulsion-mediated transport of nonaqueous-phase liquid in porous-media - a review. *Critical Reviews in Environmental Science and Technology*, 25:269 – 290, 1995.
- [11] F M Allan, M T Kamel, T A Mughrabi, and M H Hamdan. Infiltration of oil into porous sediments. *Applied Mathematics and Computation*, 177:659 – 664, 2006.
- [12] J A Hofman and H N Stein. Permeability reduction of porous media on transport of emulsions through them. *Colloids and Surfaces*, 61:317 – 329, 1991.
- [13] K T Tallaskstad, H A Knudsen, T Ramstad, G Løvoll, and K J Måløy. Steady-state two-phase flow in porous media: Statistics and transport proprieties. *Physical Review Letters*, 102:074502, 2009.
- [14] N A Idowu and M J Blunt. Pore-scale modelling of rate effects in waterflooding. *Transport in Porous Media*, 83:151 – 169, 2010.
- [15] W L Olbricht and L G Leal. The creeping motion of immiscible drops through a converging/diverging tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 134:329 – 355, 1983.
- [16] M Tsai and M J Miksis. Dynamics of a drop in a constricted capillary tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 274:197 – 217, 1994.
- [17] S Osher and J A Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12 – 49, 1988.
- [18] M Sussman. *A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, 1994.
- [19] M Sussman, P Smereka, and S Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114:146 – 159, 1994.
- [20] Y C Chang, T Y Hou, B Merriman, and S Osher. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 124:449 – 464, 1996.
- [21] M Sussman and E Fatemi. An efficient, interface preserving level set re-distance algorithm and its applications to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM Journal on Scientific Computing (SISC)*, 20.

- [22] E Rouy and A Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29.
- [23] L W Schwartz, H M Princen, and A D Kiss. On the motion of bubbles in capillary tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 172:259 – 275, 1986.
- [24] J Ratulowski and H-C Chang. Transport of bubbles in capillaries. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1:1642 – 1655, 1989.
- [25] J Bico and D Quéré. Liquid trains in a tube. *Europhysics Letters*, 51(5):546 – 550, 2000.
- [26] K D Danov, D S Valkovska, and P A Kralchevsky. Hydrodynamics instability and coalescence in trains of emulsion drops or gas bubbles moving through a narrow capillary. *Journal of Colloid and Interface Science*, 267:243 – 258, 2003.
- [27] C N Baroud, F Gallaire, and R Danga. Dynamics of microfluidic droplets. *LAB ON A CHIP*, 10(16):2032 – 2045, 2010.
- [28] H Westborg and O Hassager. Creeping motion of long bubbles and drops in capillary tubes. *Journal of Colloid and Interface Science*, 133:135 – 147, 1989.
- [29] J U Brackbill, D B Kothe, and C Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100:335 – 354, 1992.
- [30] S Zahedi, M Kronbichler, and G Kreiss. Spurious currents in finite element based level set methods for two-phase flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69:1433 – 1456, 2012.