

2

Modelagem do Veículo

2.1

Introdução

Os projetos de metodologias de controle como por exemplo, prevenção do capotamento, sistema de controle eletrônico de estabilidade, entre outros, estão baseados em modelos matemáticos. Portanto, o primeiro passo neste sentido é obter um modelo adequado aos requisitos do projeto. Frequentemente, são necessários vários modelos para diferentes propósitos, tais como, controle, projeto e simulação. Neste capítulo são desenvolvidos alguns modelos que fornecem o correto entendimento do comportamento dinâmico do veículo.

A modelagem do veículo tem dois áreas bem definidas: o modelo do pneu e do chassis. A modelagem dos pneus estuda as forças que surgem devido ao contato com o solo. A modelagem do chassis se encarrega de determinar qual é o comportamento do veículo quando está sujeito às forças produzidas pelos pneus. Para a modelagem dos pneus, se utiliza o modelo semi-empírico conhecido como a Formula Mágica [20].

2.2

Modelo do Pneu

Os pneus são os responsáveis da produção das forças que movimentam o veículo, então, estas forças são tratadas como entradas que excitam o sistema. Devido à grande importância dos pneus na análise da dinâmica veicular, sua modelagem deve ser feita adequadamente de acordo com os requisitos da aplicação.

Existem dois tipos de métodos principais para o estudo deste sistema, os empíricos e os físicos. Os empíricos amplamente estudados em [20], [27] e [28], são funções que aproximam o comportamento real dos pneus, tanto para as forças e momentos que este produz. O enfoque físico [29] explica os mecanismos que determinam o comportamento do pneu. Estes modelos são mais exatos, porém requerem um alto custo computacional para sua análise. Nesta seção é apresentado o modelo semi-empírico da Formula Mágica [20].

2.2.1 Deslizamento

O deslizamento do pneu é a medida pela qual pode-se determinar as forças e momentos que atuam sobre este sistema. O deslizamento ocorre em diferentes planos de movimento do pneu. Considere-se inicialmente o deslizamento longitudinal. Quando se tem uma roda rodando livremente, ou seja, sem forças de frenagem nem tração, o *raio de rolamento efetivo* r_e pode ser determinado como:

$$r_e = \frac{v_x}{\omega_0} \quad (2-1)$$

na qual v_x é a componente longitudinal da velocidade v , e ω_0 é a velocidade angular do pneu.

A Figura 2.1 mostra o sistema de coordenada local do pneu. Um pneu exerce força longitudinal no veículo somente se existe um deslizamento longitudinal, e este está presente somente se um torque de tração ou frenagem é aplicado à roda.

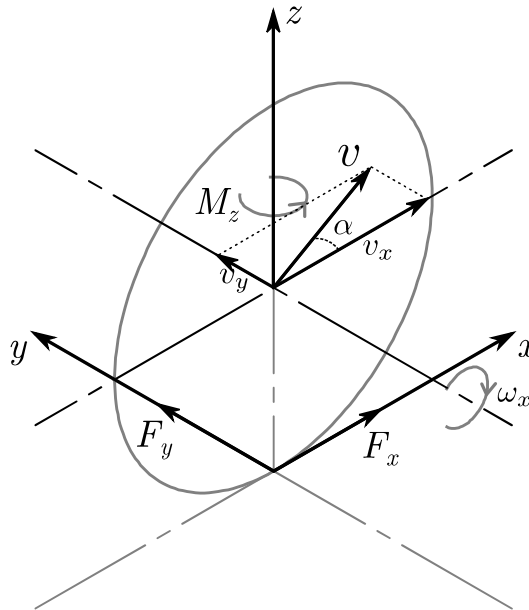


Figura 2.1: Diagrama da roda mostrando seu eixo local de referência, as forças que atuam no ponto de contato, a velocidade angular ω e a velocidade absoluta v .

O deslizamento longitudinal [30] pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{v_x - r_e\omega}{v_x} \\ &= -\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}\end{aligned}\quad (2-2)$$

na qual ω é a velocidade angular do pneu. O deslizamento longitudinal λ é definido tal que seja positivo para uma força positiva (torque de tração). Da definição apresentada acima, observa-se que o valor do deslizamento longitudinal pode ser maior que 1. Então pode-se definir o deslizamento de uma forma alternativa, com ω no denominador, o que daria um valor máximo de 1 para o deslizamento.

O deslizamento lateral [30] é a relação da velocidade lateral v_y e longitudinal v_x do pneu, e pode ser definido pelo ângulo de deslizamento lateral α :

$$\tan \alpha = -\frac{v_y}{v_x} \quad (2-3)$$

Esta definição é tal que, para valores positivos da força lateral tem-se valores positivos do ângulo de deslizamento lateral.

Um conceito adicional de deslizamento é conhecido como giro, e é causado pela rotação do pneu em torno do eixo z . O ângulo de inclinação conhecido como ângulo de Camber, γ , definido como o ângulo entre o plano xz do pneu e o vertical, tem influência sobre este deslizamento [30].

2.2.2 Sistema Pneu

Os pneus podem ser considerados como um sistema que tem como entrada os diferentes tipos de deslizamento que este experimenta, e as forças e momentos produzidos são considerados como as saídas deste sistema [20], tais que:

$$\begin{aligned}F_x &= F_x(\lambda, \alpha, \gamma, F_z) \\ F_y &= F_y(\lambda, \alpha, \gamma, F_z) \\ M_z &= M_z(\lambda, \alpha, \gamma, F_z)\end{aligned}$$

na qual F_z é a carga normal do pneu. A força normal é definida positiva quando sua direção é para acima. Também para reduzir a dependência destas forças e momento com relação apenas às variáveis de deslizamento, considera-se $\gamma = 0$.

2.2.3

Deslizamento Puro e Combinado

O conceito de deslizamento puro se utiliza quando um dos fenômenos de deslizamento apresenta-se de forma isolada, ou seja, quando as outras variáveis de deslizamento são nulas. Para derivar as expressões das saídas do sistema pneu (F_x , F_y e M_z), primeiro considera-se o caso de deslizamento puro e em seguida o deslizamento combinado.

Para o caso de deslizamento puro, uma aproximação linear é utilizada. Estas aproximações só são válidas para pequenos valores do deslizamento e são definidas como:

$$F_x \approx C_\lambda \lambda \quad (2-4)$$

$$F_y \approx C_\alpha \alpha \quad (2-5)$$

$$M_z \approx -C_{M\alpha} \alpha \quad (2-6)$$

nas quais C_λ é a rigidez de deslizamento longitudinal, C_α é a rigidez de deslizamento lateral e $C_{M\alpha}$ a rigidez de alinhamento do pneu.

A força lateral do pneu exerce uma maior influência que as outras grandezas (F_x e M_z), portanto deve de ser calculada com uma maior precisão. Utiliza-se a chamada Formula Mágica [20], que fornece uma melhor aproximação da força lateral do pneu, dada por:

$$F_y = D \sin[C \arctan B\alpha - E(B\alpha - \arctan(B\alpha))] \quad (2-7)$$

na qual:

$$B = \frac{C_\alpha}{CD} \text{ é o fator de rigidez } [1/rad]$$

$$D = \mu F_z = F_{y,pico} \text{ é o fator pico } [N]$$

$$C_\alpha = c_1 \sin(2 \arctan(\frac{F_z}{c_2})) [N/rad]$$

$$C, E \text{ são os fatores de forma } [-]$$

$$c_1 \text{ é a rigidez máxima de curva } [N/rad]$$

$$c_2 \text{ é a carga a máxima rigidez nas curvas } [N]$$

A Figura 2.2 descreve a relação da força lateral F_y com o deslizamento lateral α para o deslizamento puro do pneu. O deslizamento combinado é quando o pneu experimenta múltiplos fenômenos de deslizamento ao mesmo tempo. Uma forma de tratar a existência destes deslizamentos é considerando

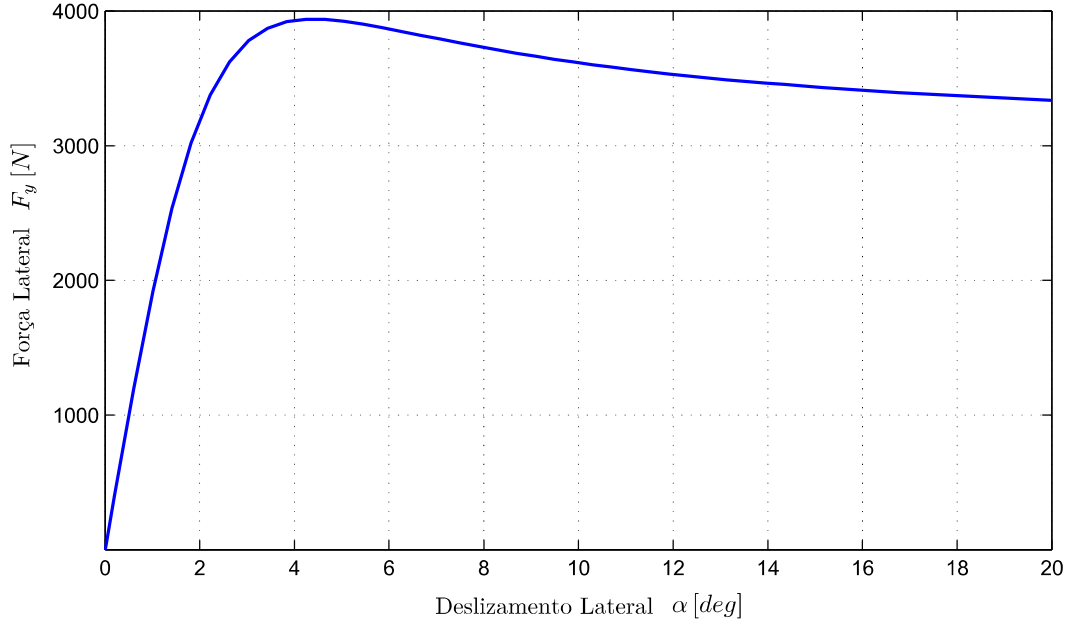


Figura 2.2: Relação entre a força lateral F_y e o deslizamento lateral α obtido pela Formula Mágica, Equação (2-7) com $D = 3939,5$, $C = 1,44$, $B = 20,37$ e $E = -0,62$.

uma elipse de aderência, como mostra a Figura 2.3. A hipótese da Elipse de Aderência é que as forças longitudinais e laterais não podem exceder seus valores máximos ($F_{x,max}$, $F_{y,max}$) e as componentes da resultante tem que seguir a seguinte relação:

$$\left(\frac{F_x}{F_{x,max}}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_{y,max}}\right)^2 = 1 \quad (2-8)$$

A Elipse de Aderência, mostrada na Figura 2.3, é comprovada plotando as curvas das forças F_x e F_y para diferentes valores dos deslizamentos [31]. A força lateral máxima $F_{y,max}$ é obtida mediante a formula mágica, equação (2-7). E a máxima força longitudinal é obtida multiplicando o coeficiente de atrito entre o pneu e o solo μ e a carga normal do pneu F_z :

$$F_{x,max} = \mu F_z$$

2.3

Modelo do Chassis

A modelagem do pneu apresentada na seção anterior descreve as forças produzidas pela interação entre este sistema e o solo. Estas forças são consideradas como a entrada do sistema dinâmico veículo, posteriormente utilizadas

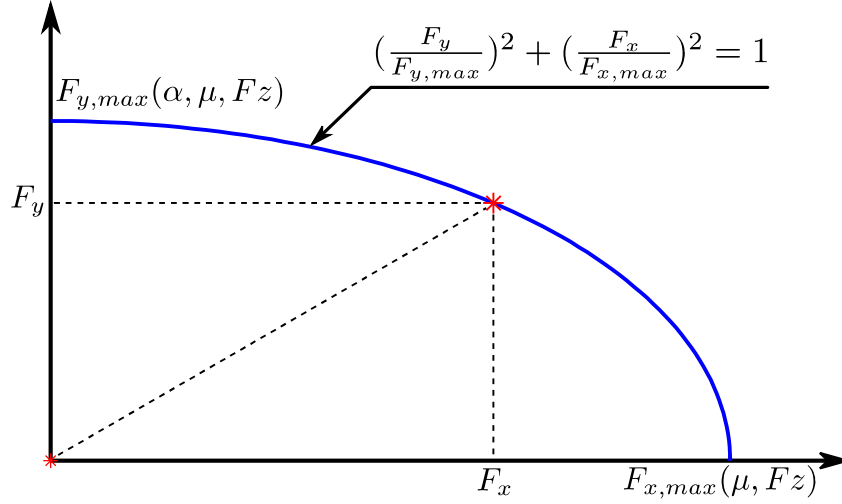


Figura 2.3: Elipse de aderência, amostra os máximos valores das forças longitudinais e laterais.

para determinar seu movimento. Nesta seção, diversos modelos do chassi são construídos considerando que a precisão do modelo depende da aplicação desejada.

2.3.1 Sistema de Coordenadas

Para facilitar a derivação das equações dinâmicas do veículo, é útil definir certos sistemas de coordenadas. Isto permite uma abordagem mais sistemática para a modelagem, o que é particularmente importante quando se trata de modelos complexos. A Figura 2.4 mostra as sequências de rotação dos sistemas de coordenadas do veículo. Os ângulos de rolagem, arfagem e guinada são definidos como rotações em torno aos eixos x , y e z respectivamente.

Na Figura 2.4 S_I , é o sistema de referência inercial. S_v é o sistema de coordenadas do veículo que gira em torno ao eixo z do S_I com uma velocidade angular $\omega_i^v = (0, 0, \dot{\psi})$ e também se translada com uma velocidade $v = (v_x, v_y, 0)$. S_c é o sistema de coordenadas do chassi que gira em torno do eixo y do S_v com rotação denotada por θ . Finalmente tem-se o sistema de coordenadas S_b que é determinado pela rotação em torno do eixo x do S_c com uma velocidade angular $\omega_c^b = (\dot{\phi}, 0, 0)$.

Para determinar as equações dinâmicas do veículo, é necessário fazer transformações entre estes sistemas de coordenadas. Para isto é preciso conhecer suas matrizes de transformação. A matriz de transformação do S_I para S_v ,

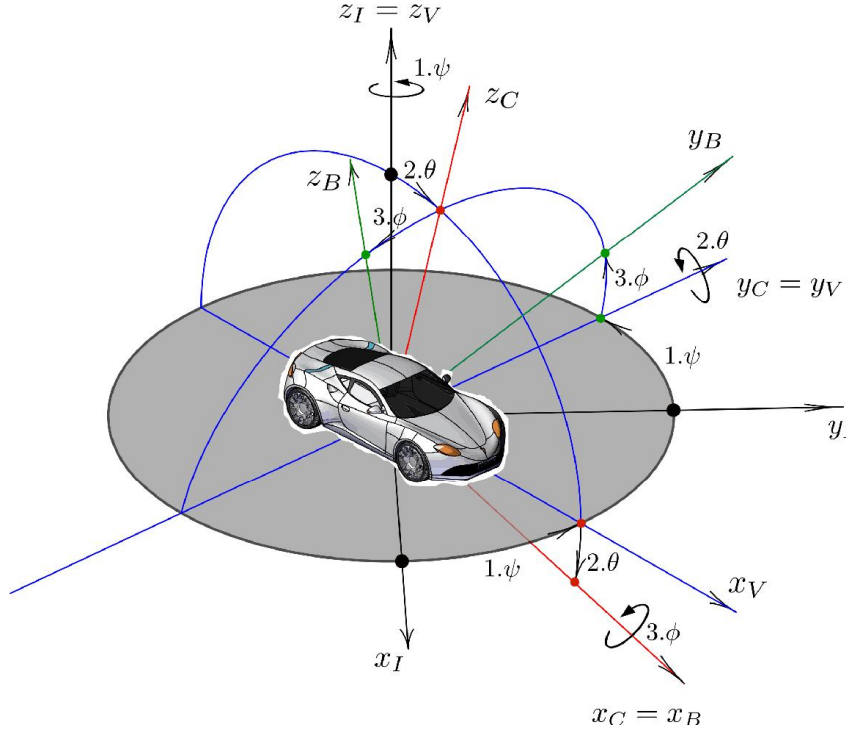


Figura 2.4: Sequência de rotação dos sistemas de coordenadas do veículo.

é definida como:

$$R_i^v(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

Logo, a matriz de transformação do S_v para S_c , é definida como:

$$R_v^c(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

Por último, a matriz de transformação do sistema de coordenadas S_c para o S_b :

$$R_c^b(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

A matriz de transformação global do sistema de coordenadas S_b para o S_I , é obtida multiplicando as matrizes correspondentes:

$$R_b^i(\psi, \theta, \phi) = R_i^v(\psi) \times R_v^c(\theta) \times R_c^b(\phi) \quad (2-12)$$

2.3.2

Movimento no Chassis

Sabe-se que S_I é o sistema de referência inercial e S_v é o sistema de referência não inercial em rotação com velocidade angular $\bar{\omega}_v$ e como velocidade de translação de $\bar{v}_0$. Logo para qualquer vetor $\bar{q}$ se sabe:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_i \bar{q} = \left(\frac{d}{dt}\right)_v \bar{q} + \bar{\omega}_i \times \bar{q} \quad (2-13)$$

na qual $\times$ é o produto vetorial. Sabe-se que a velocidade de um ponto P expresso em S_I , é igual à soma da velocidade de translação de S_v , e a derivada no tempo da posição do ponto P ($\bar{r}_p$). Então, pode-se expressar a velocidade como:

$$\bar{v}_p = \bar{v}_0 + \left(\frac{d}{dt}\right)_i \bar{r}_p = \bar{v}_0 + \left(\frac{d}{dt}\right)_v \bar{r}_p + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_p = \bar{v}_0 + \dot{\bar{r}}_p + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_p \quad (2-14)$$

Logo, obtém-se a equação da aceleração do ponto P , utilizando as Equações (2-13) e (2-14):

$$\begin{aligned} \bar{a}_p &= \left(\frac{d}{dt}\right)_i \bar{v}_p = \left(\frac{d}{dt}\right)_v (\bar{v}_0 + \dot{\bar{r}}_p + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_p) + \bar{\omega}_i \times (\bar{v}_0 + \dot{\bar{r}}_p + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_p) \\ &= \ddot{\bar{v}}_0 + \bar{\omega}_i \times \bar{v}_0 + \dot{\bar{\omega}}_i \times \bar{r}_p + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}_p) + 2\bar{\omega}_i \times \dot{\bar{r}}_p + \ddot{\bar{r}}_p \end{aligned} \quad (2-15)$$

2.3.3

Modelo de Bicicleta

Este enfoque deste modelo é uns dos mais simples e ajuda o entendimento da dinâmica do veículo. O modelo de bicicleta é obtido por aproximação dos pares de rodas traseiro e dianteiro como únicas rodas, ou seja, desconsidera-se as bitolas (largura do eixo dianteiro ou traseiro) do veículo. Este modelo é mostrado na Figura 2.5. Assumindo que o ângulo de direção do veículo é pequeno, as equações de movimento são obtidas por [20]:

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_y + v_x \dot{\psi}) &= F_{yD} + F_{yT} \\ I_{zz} \ddot{\psi} &= aF_{yD} - bF_{yT} \end{aligned}$$

na qual F_{yT} e F_{yD} são as forças laterais traseira e dianteira respectivamente, I_{zz} é o momento de inércia em torno ao eixo z , a , b são as distâncias do centro de gravidade até o eixo dianteiro e traseiro respectivamente, e $\dot{\psi}$ é a velocidade angular de guinada. Os ângulos de deslizamento traseiro e dianteiro podem ser

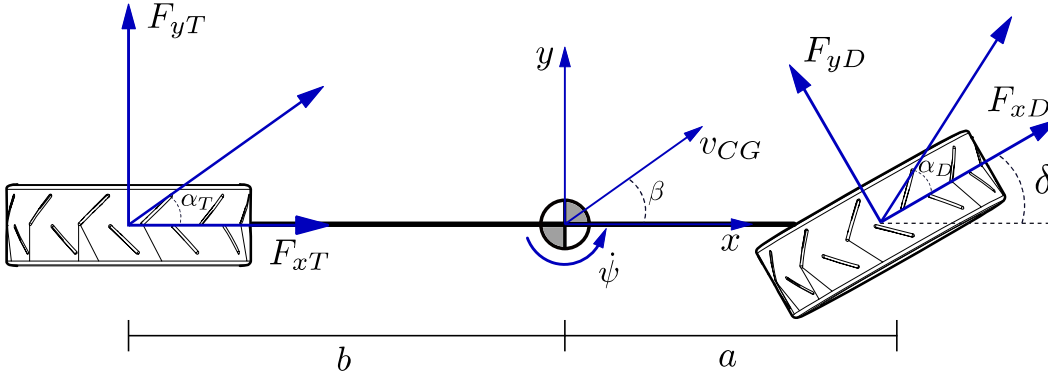


Figura 2.5: Modelo de Bicicleta. São mostradas as forças laterais dos pneus, a velocidade do centro de massa, o ângulo de deslizamento traseiro e dianteiro e o ângulo de direção.

aproximados como:

$$\alpha_D \approx \delta - \frac{1}{v_x}(v_y + a\dot{\psi}) \quad (2-16)$$

$$\alpha_T \approx -\frac{1}{v_x}(v_y - b\dot{\psi}) \quad (2-17)$$

Logo, considerando um comportamento linear dos pneus (Equação 2-6) tem-se:

$$F_{yD} \approx C_D \alpha_D \quad (2-18)$$

$$F_{yT} \approx C_T \alpha_T \quad (2-19)$$

na qual C_D e C_T são as constantes de rigidez do pneu dianteiro e traseiro respectivamente.

O modelo é linear considerando o seguinte: que é um sistema invariante no tempo e que a velocidade longitudinal v_x é constante no tempo. Com estas considerações, este modelo tem 2 GDL, com v_y e $\dot{\psi}$ como variáveis de estado do sistema. A entrada deste sistema é o ângulo de direção do veículo. Pode-se escrever na forma de espaço estado como:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_D+C_T}{mv_x} & \frac{bC_T-aC_D}{mv_x} - v_x \\ \frac{bC_T-aC_D}{I_{zz}v_x} & -\frac{a^2C_D+b^2C_T}{I_{zz}v_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_D}{m} \\ \frac{aC_D}{I_{zz}} \end{pmatrix} \delta \quad (2-20)$$

2.3.4

Modelo da Bicicleta e Rolagem

Aqui considera-se o modelo da bicicleta com um grau a mais de liberdade, que é a rotação em torno do eixo x , a rolagem do veículo (Figura 2.6). No

sistema de equações que descreve o comportamento do modelo anterior, tem-se que adicionar a dinâmica de rolagem, que é obtida pelo balanço de torques em torno do eixo x .

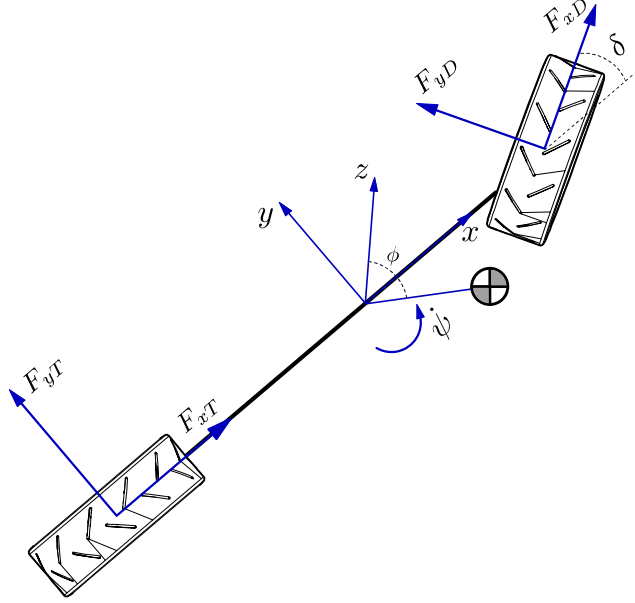


Figura 2.6: Modelo de Bicicleta incluindo o GDL de rolagem.

O novo sistema de equações é:

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_y + v_x \dot{\psi}) &= F_{yD} + F_{yT} \\ I_{zz} \ddot{\psi} &= a F_{yD} - b F_{yT} \\ I_{xx} \ddot{\phi} + C_\phi \dot{\phi} + K_\phi \phi &= m h (\dot{v}_y + v_x \dot{\psi}) \end{aligned}$$

nas quais K_ϕ e C_ϕ são os coeficientes de rigidez e amortecimento de rolagem, respectivamente. Estes coeficientes descrevem o sistema torsional que simplifica o sistema de suspensão do veículo. Como no modelo anterior, a entrada deste novo modelo é o ângulo de direção δ , e variáveis de estado do sistema são v_y , ψ e ϕ .

2.3.5 Modelo com Bitolas

A vantagem deste modelo (Figura 2.7) é que se pode determinar com uma maior precisão os efeitos de rolagem e dos pneus no chassi. Para o desenvolvimento deste modelo, considera-se que as suspensões são modeladas como um sistema torsional [32], constituído de uma mola e um amortecedor em torno do eixo x e y , como se mostra nas Figuras 2.8 e 2.9. O modelo resultante é de 5 GDL: translação nos eixos x e y , rotação em torno dos eixos x (rolagem), y (arfagem) e z (guinada).

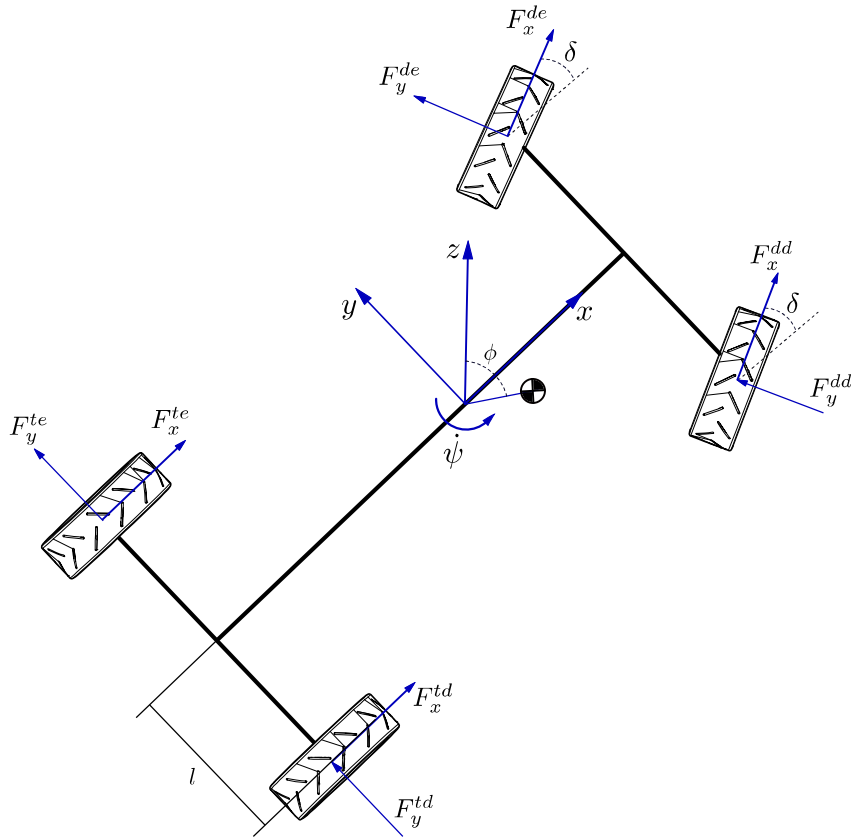


Figura 2.7: Modelo de dupla Bitola.

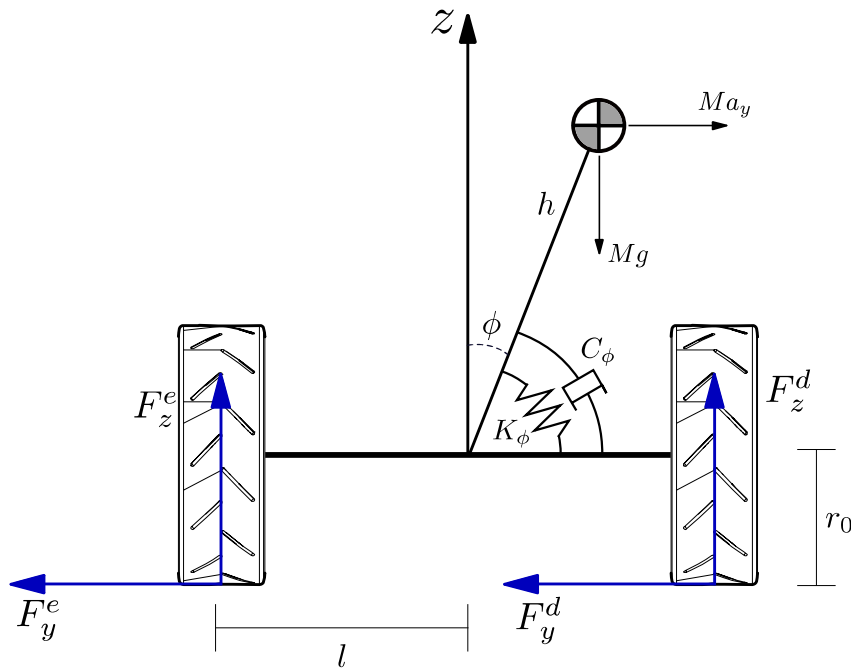


Figura 2.8: Simplificação das suspensões em torno do eixo de rolamento x .

O enfoque de Newton-Euler é utilizado para a formulação das equações de movimento do veículo. Isto fornece um modelo na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias (ODE) resolvidos por métodos numéricos

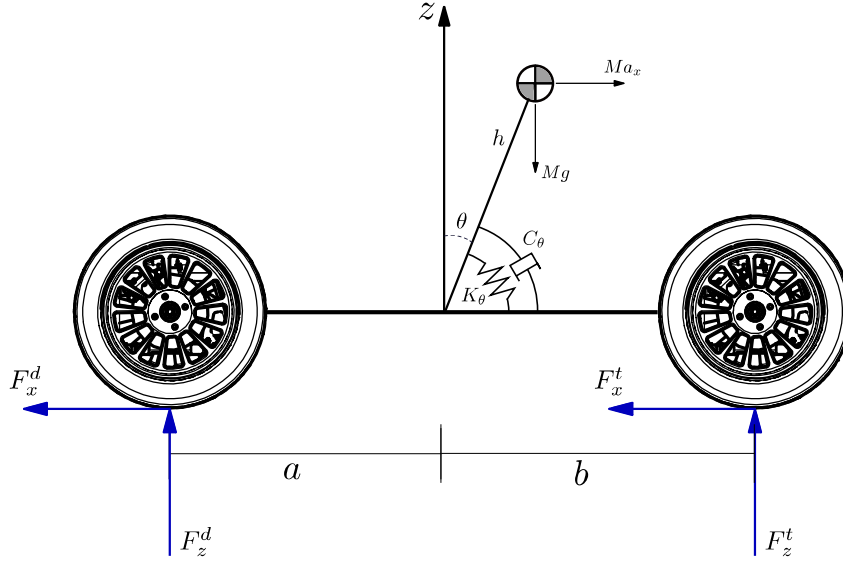


Figura 2.9: Simplificação das suspensões em torno do eixo de arfagem y .

(Adams-Bashforth, Adams-Moulton ou Runge-Kutta).

Derivação das Forças dos Pneus

As equações de movimento do veículo são derivadas no sistema de referência S_v (sistema referencial que acompanha ao veículo), já que neste sistema tem-se as forças em x e y assim como o momento resultante em torno do eixo z . Da Figura 2.10 pode-se obter as forças totais e o momento total que os pneus exercem sobre o veículo:

$$F_{xT} = F_x^{te} + F_x^{td} + (F_x^{de} + F_x^{dd}) \cos \delta - (F_y^{de} + F_y^{dd}) \sin \delta \quad (2-21)$$

$$F_{yT} = F_y^{te} + F_y^{td} + (F_y^{de} + F_y^{dd}) \cos \delta + (F_x^{de} + F_x^{dd}) \sin \delta \quad (2-22)$$

$$M_{zT} = (F_y^{de} + F_y^{dd})a \cos \delta - (F_y^{te} + F_y^{td})b + (F_x^{de} + F_x^{dd})a \sin \delta + (F_x^{td} + F_x^{dd} \cos \delta + F_y^{de} \sin \delta - F_x^{te} - F_x^{de} \cos \delta - F_y^{dd} \sin \delta)l \quad (2-23)$$

nas quais, F_x^i e F_y^i , com $i = de, dd, te, td$, são as forças longitudinais e laterais dos pneus dianteiros e traseiros respectivamente.

Modelagem por Newton-Euler

A abordagem de Newton-Euler é usada para resolver as equações de movimento de translação e rotação do veículo. Esta abordagem é ser utilizada para a obtenção de um modelo baseado na suposição do que o eixo de rolagem (linha imaginária que une os centros de rolagem dianteiro e traseiro) coincide com o eixo x do veículo.

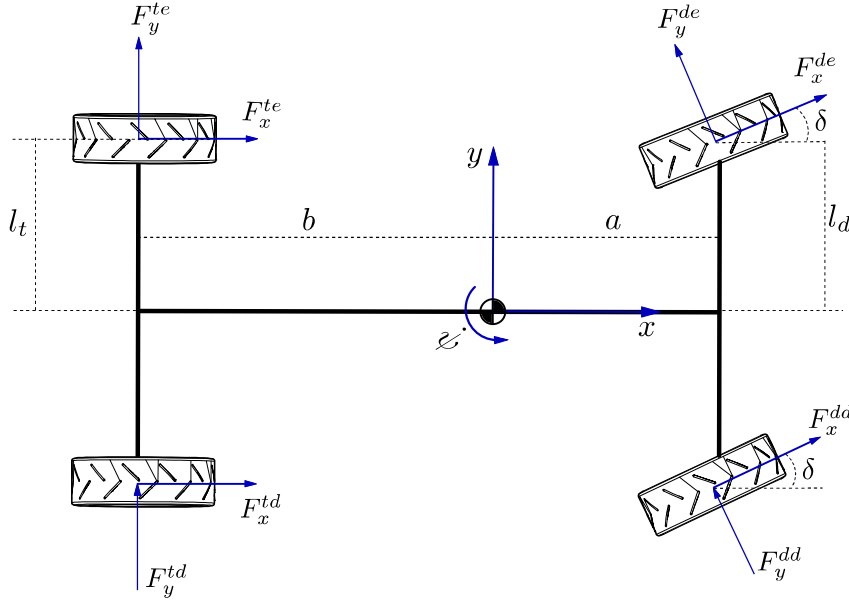


Figura 2.10: Forças produzidas pelos pneus no modelo de dupla bitola.

As equações de Euler para o movimento angular são definidas para torques externos que atuam sobre o sistema, e são dadas pelas taxas de variação do momento angular:

$$\tau = \frac{d(I^v \omega^s)}{dt} \quad (2-24)$$

na qual τ é o torque externo aplicado ao sistema, I^v é o momento de inércia do sistema expressado em S_v e ω^s é a velocidade angular espacial do sistema.

Sabe-se que as equações dinâmicas devem-se expressar no referencial fixo S_I , logo:

$$\tau = \frac{d}{dt}(I^v \omega^s)|_v + \omega_i^v \times I^v \omega^s \quad (2-25)$$

na qual ω_i^v é a velocidade angular do S_v relativo ao S_I . Pode-se expressar como:

$$\omega_i^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

Sabe-se que o chassis experimenta rotações em torno dos eixos x (rolagem) e y (arfagem), então pode-se determinar o momento de inércia do chassis expresso em S_v :

$$I^v = [R_c^b(\theta) R_b^v(\phi)] I^b [R_b^v(\phi) R_c^{bT}(\theta)] \quad (2-27)$$

na qual I^b é o tensor de inércia do veículo expresso em S_b :

$$I^b = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2-28)$$

logo obtém-se:

$$I^v = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_2 & I_4 & I_5 \\ I_3 & I_5 & I_6 \end{pmatrix} \quad (2-29)$$

na qual:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sin(\theta)(I_y \sin(\theta) \sin^2(\phi) + I_z \sin(\theta) \cos^2(\phi)) + I_x \cos^2(\theta) \\ I_2 &= I_y \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) - I_z \sin(\phi) \cos(\phi) \\ I_3 &= \sin(\theta)(I_y \cos(\theta) \sin^2(\phi) + I_z \cos(\theta) \cos^2(\phi)) - I_x \sin(\theta) \cos(\theta) \\ I_4 &= I_z \sin^2(\phi) + I_y \cos^2(\phi) \\ I_5 &= \sin(\phi) \cos(\phi) \cos(\theta)(I_y - I_z) \\ I_6 &= I_x \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)(I_y \sin^2(\phi) + I_z \cos^2(\phi)) \end{aligned}$$

A velocidade angular espacial ω^s é produzida pelas rotações sucessivas do chassis em torno dos eixos x , y e z :

$$\omega^s = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2-30)$$

Os torques resultantes podem-se obter dos diagramas de corpo livre (DCL) das Figuras 2.8, 2.9 e 2.10:

$$\tau_x = h(F_{yT} \cos(\phi) \cos(\theta) + mg \sin(\phi)) - C_\phi \phi - K_\phi \dot{\phi} \quad (2-31)$$

$$\tau_y = h(mg \sin(\theta) \cos(\phi) - F_{xT} \cos(\theta) \cos(\phi)) - C_\theta \theta - K_\theta \dot{\theta} \quad (2-32)$$

$$\tau_z = M_{zT} - h(F_{xT} \sin(\phi) - F_{yT} \sin(\theta) \cos(\phi)) \quad (2-33)$$

Finalmente, usando as Equações (2-25), (2-26), (2-29), (2-30), (2-31), (2-32) e (2-33) podem-se obter as acelerações angulares de rolagem, arfagem e guinada respectivamente:

$$\ddot{\phi} = [h(F_{yT} \cos(\phi) \cos(\theta) + mg \sin(\phi)) - C_\phi \dot{\phi} - K_\phi \phi + \dot{\psi}(I_y - I_z)(\dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\phi) \cos(\theta) + \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)) + \dot{\psi} \dot{\theta}(I_y \cos^2(\phi) + I_z \sin^2(\phi))]/[I_x \cos^2(\theta) + I_y \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + I_z \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)] \quad (2-34)$$

$$\ddot{\theta} = [h(mg \sin(\theta) \cos(\phi) - F_{xT} \cos(\theta) \cos(\phi)) - C_\theta \dot{\theta} - K_\theta \dot{\theta} + \dot{\psi}(\dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta)(I_x - I_y + \cos^2(\phi)(I_y - I_z)) - \dot{\phi} \cos^2(\theta)I_x + \sin^2(\phi) \sin^2(\theta)I_y + \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)I_z) - \dot{\theta}(\sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)(I_y - I_z))]/[I_y \cos^2(\phi) + I_z \sin^2(\phi)] \quad (2-35)$$

$$\ddot{\psi} = [M_{zT} - h(F_{xT} \sin(\phi) + F_{yT} \sin(\theta) \cos(\phi))]/[I_x \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)(I_y \sin^2(\phi) + I_z \cos^2(\phi))] \quad (2-36)$$

As equações de translação nos eixos x e y podem ser obtidas utilizando as Equações (2-15), (2-21) e (2-22) junto com a segunda lei de Newton:

$$\dot{v}_x = \frac{F_{xT}}{m} + v_y \dot{\psi} + h[\sin(\theta) \cos(\phi)(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) - \sin(\phi) \ddot{\psi} - 2 \cos(\phi) \dot{\phi} \dot{\psi} - \cos(\theta) \cos(\phi) \ddot{\theta} + 2 \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} \dot{\phi} + \sin(\theta) \sin(\phi) \ddot{\phi}] \quad (2-37)$$

$$\dot{v}_y = \frac{F_{yT}}{m} - v_x \dot{\psi} + h[-\sin(\theta) \cos(\phi) \ddot{\psi} - \sin(\phi) \dot{\psi}^2 - 2 \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} \dot{\psi} + \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \dot{\psi} - \sin(\phi) \dot{\phi}^2 + \cos(\phi) \ddot{\phi}] \quad (2-38)$$

Desde que nosso interesse é a dinâmica de rolagem, visando o desenvolvimento de controladores (ESC e RSC). Portanto não é considerado o ângulo de arfagem do veículo, ou seja $\theta = \dot{\theta} = 0$, isto faz que as equações de movimento sejam muito mais simples, mas mantendo a precisão adequada para nossa aplicação.

Então considerando que não existe rotação em torno do eixo y (arfagem), pode-se obter o novo sistema de equações dinâmicas de 4GDL:

$$\ddot{\phi} = \frac{F_{yT}h \cos \phi + mgh \sin \phi - K_\phi \phi - C_\phi \dot{\phi} + \dot{\psi}^2(I_y - I_{zz}) \sin \phi \cos \phi}{I_x} \quad (2-39)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{M_T - F_{xT}h \sin \phi}{I_y \sin^2 \phi + I_z \cos^2 \phi} \quad (2-40)$$

$$\dot{v}_x = \frac{F_{xT}}{m} + v_y \dot{\psi} - h \sin \phi \ddot{\psi} - 2h \cos \phi \dot{\phi} \dot{\psi} \quad (2-41)$$

$$\dot{v}_y = \frac{F_{yT}}{m} - v_x \dot{\psi} - h \sin \phi \dot{\psi}^2 - h \sin \phi \dot{\phi}^2 + h \cos \phi \ddot{\phi} \quad (2-42)$$

2.4

Validação do Modelo

A fim de validar o modelo desenvolvido, os resultados são comparados com os obtidos do programa de simulação veicular. Para as forças dos pneus considera-se a Formula Mágica descrita no início deste capítulo. Os parâmetros da Formula Mágica são encontrados aplicando o algoritmo de busca local do MATLAB *fminsearch* (que trabalha como o método *Simplex* para encontrar um sob-ótimo do problema) e tendo como referência os resultados que o programa de simulação fornece para a força lateral e longitudinal do pneu. Os parâmetros do modelo do veículo são mostrados na Tabela 2.1.

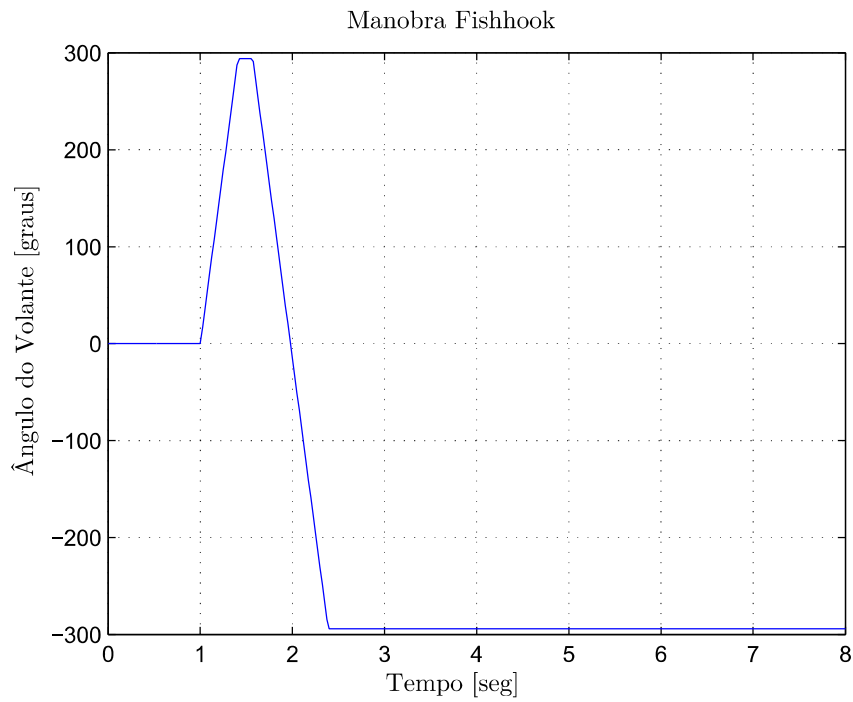
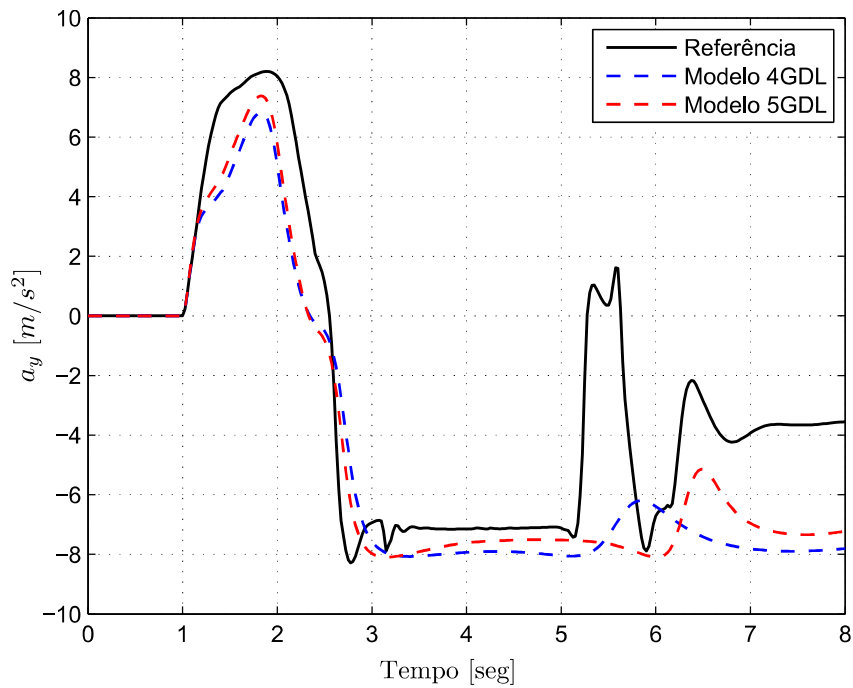
Tabela 2.1: Parâmetros do veículo

Símbolo	Descrição
m	Massa do veículo
h	Altura do C.G. do veículo
I_{xx}	Momento de inércia em torno do eixo x
I_{yy}	Momento de inércia em torno do eixo y
I_{zz}	Momento de inércia em torno do eixo z
a	Distância do C.G. até o eixo dianteiro
b	Distância do C.G. até o eixo traseiro
l	Metade da largura
K_ϕ	Coefficiente de rigidez de rolagem
C_ϕ	Coefficiente de amortecimento de rolagem
K_θ	Coefficiente de rigidez de arfagem
C_θ	Coefficiente de amortecimento de arfagem

A validação do modelo é feita utilizando a manobra Fishhook mostrada na Figura 1.1.

Na Figura 2.12, observa-se que os modelos de 4 e 5GDL tem respostas próximas em aceleração lateral, mas não possuem correspondência em relação à referência (programa de simulação). No caso do modelo de 5GDL esta diferença é explicada por as simplificações que foram feitas no sistema de suspensão na dinâmica de arfagem (K_θ, C_θ). A dinâmica de arfagem esta ligada diretamente à dinâmica lateral do veículo, então se pode concluir que esta simplificação não é adequada para representar esta dinâmica. No caso do modelo de 4GDL, esta diferença é devido a que não existe representação da dinâmica de arfagem das suspensões, já que somente tem-se simplificação para as suspensões na dinâmica de rolagem (K_ϕ, C_ϕ).

Nas Figuras 2.13 e 2.14 se existe correspondência nos dados entre os modelos de 4, 5GDL e de referência (programa de simulação veicular). Isto é

Figura 2.11: Manobra tipo *Fishhook*.Figura 2.12: Aceleração lateral v_y do veículo.

devido a que o modelo simplificado do sistema de suspensão na dinâmica de rolagem representa de maneira adequada esta dinâmica, tanto no modelo de 4 e 5GDL. Desde que nosso interesse é a dinâmica de rolagem do veículo, é suficiente e adequado utilizar o modelo de 4GDL.

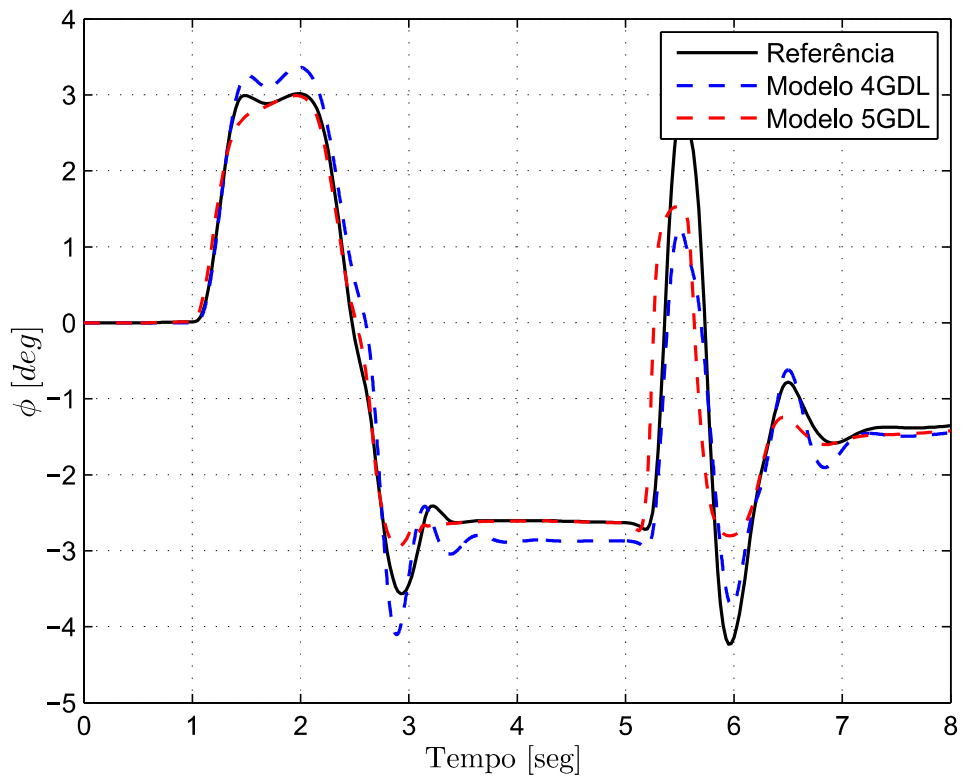


Figura 2.13: O ângulo de rolagem ϕ do veículo.

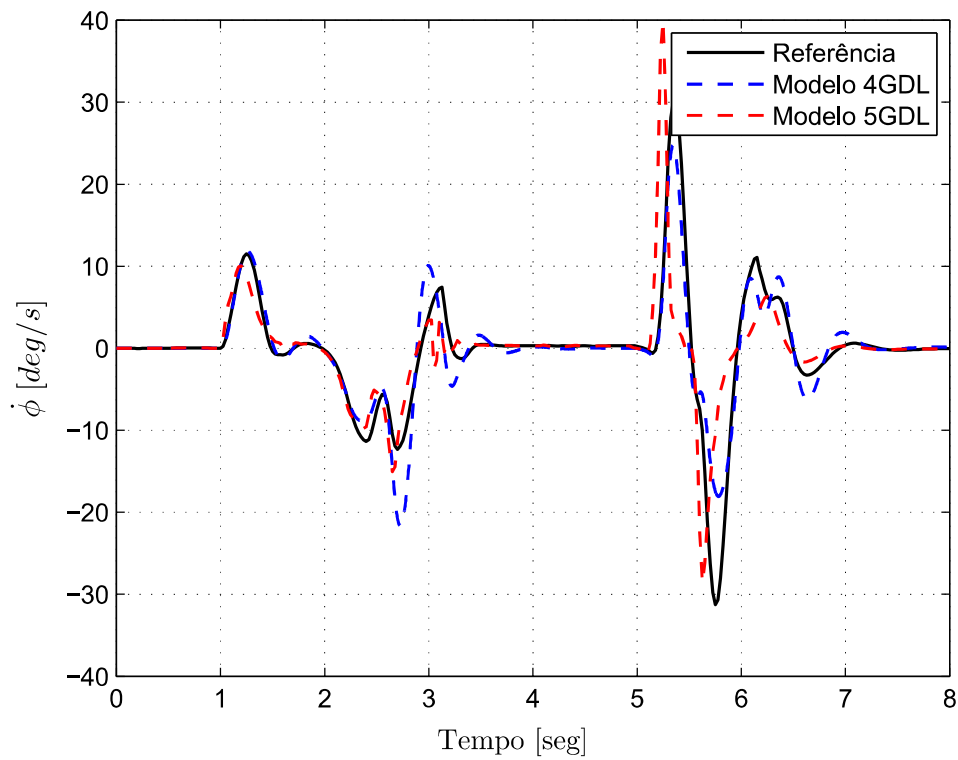


Figura 2.14: Taxa de rolagem $\dot{\phi}$ do veículo.