3
Modelagem Matemática

A base matemática da modelagem utilizada neste trabalho para o cálculo das interferências entre sistemas via satélite é apresentada neste capítulo. Aspectos técnicos envolvendo o cálculo da razão portadora - interferência e a modelagem probabilística das posições das estações terrenas e dos ganhos de suas antenas são apresentados nas seções seguintes.

3.1
Calculo da Razão Portadora-Interferência

Nesta seção são desenvolvidas expressões para as razões portadora-interferência. Considere a geometria mostrada na Figura 3.1 onde estão ilustrados dois enlaces de comunicação por satélite, um pertencente à rede interferente, que utiliza o satélite S_1, e a outra pertencente à rede interferida, a que utiliza o Satélite S_V. Note que os parâmetros associados ao enlace da rede interferente estão indicados por letras assinaladas superiormente com o sinal "′". Nesta figura, $\mathbf{t}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{t}_V$ e $\mathbf{r}_V$ indicam, respectivamente, as posições geográficas das estações terrenas de transmissão e recepção das redes interferente e vítima.

Considerando a Figura 3.1, a razão portadora-interferência nos terminais da antena de recepção no satélite S_V (razão portadora - interferência no lance de subida), em condições de propagação em espaço livre, se escreve

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{up} = \frac{P_2}{\frac{P_1' g_1'(\theta) g_2(\rho)}{\ell_3'}} \tag{3-1}$$

onde P_2 é a potência da portadora interferida na saída da antena receptora do satélite S_V (correspondente a situação em que $\mathbf{r}_V$ está no centro do feixe de transmissão da antena desse satélite). P_1' é a potencia interferente transmitida pela estação terrena interferente e ℓ_3' é a perda de espaço livre associada ao percurso da interferência no lance de subida.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

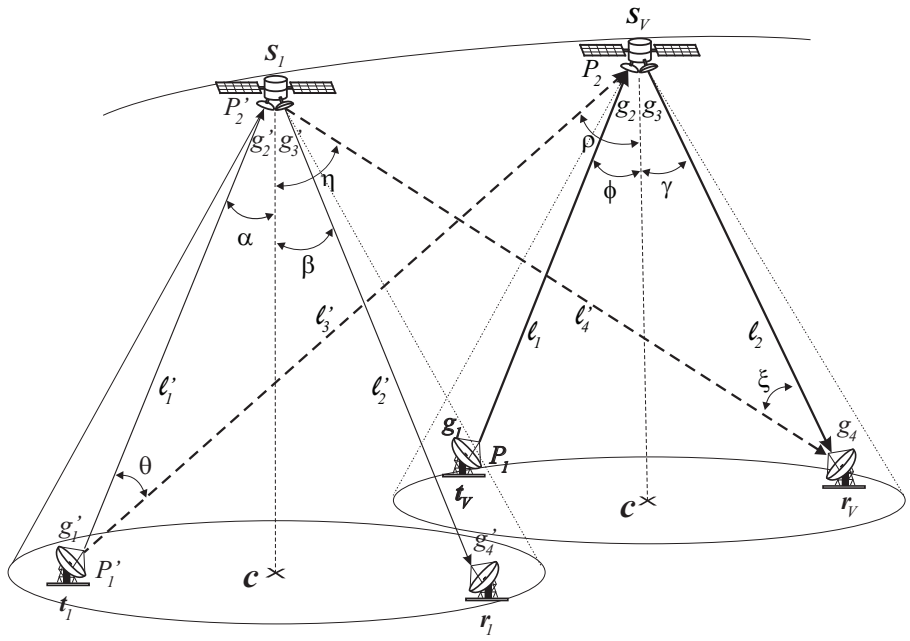

Figura 3.1: Geometria utilizada no cálculo de interferência de entrada única numa rede de comunicações via Satélite

Observando-se que a potencia P_2' da emissão interferente na saída na antena receptora do satélite S_1 (na situação em que $\mathbf{r}_1$ está no centro do feixe de transmissão da antena desse satélite) é dada por

$$P_2' = \frac{P_1' g_1'(0) g_2'(\alpha)}{\ell_1'} \tag{3-2}$$

com ℓ_1' representando a perda de espaço livre associada ao percurso do sinal desejado no lance de subida, é possível reescrever (3-1) em função de P_2', ou seja,

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{up} = \frac{P_2 g_1'(0) g_2'(\alpha) \ell_3'}{P_2' g_1'(\theta) g_2(\rho) \ell_1'} \tag{3-3}$$

No caso em que as posições $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_V$ das estações terrenas receptoras não estão no centro dos feixes de transmissão dos satélites S_1 e S_V, os valores de P_2' e P_2 em (3-3) devem ser compensados, respectivamente, pelas variações dos ganhos das antenas transmissoras dos satélites S_1 e S_V (vantagens geográficas). Assim, obtém-se finalmente,

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{up} = \frac{P_2 \dfrac{g_3(0)}{g_3(\gamma)} g_1'(0) g_2'(\alpha) \ell_3'}{P_2' \dfrac{g_3'(0)}{g_3'(\beta)} g_1'(\theta) g_2(\rho) \ell_1'} \tag{3-4}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

ou ainda, considerando-se que as perdas ℓ'_1 e ℓ'_3 são aproximadamente iguais,

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{up} = \frac{P_2 g_3(0) g'_1(0) g'_2(\alpha) g'_3(\beta)}{P'_2 g'_3(0) g'_1(\theta) g_2(\rho) g_3(\gamma)} \tag{3-5}$$

Os ganhos de antenas mostradas em (3-1) a (3-5) são descritas a seguir:

- $g_3(0)$ ganho da antena transmissora do Satélite S_V no centro do feixe
- $g'_3(0)$ ganho da antena transmissora do Satélite S_1 no centro do feixe
- $g_3(\gamma)$ ganho da antena transmissora do satélite S_V numa direção que forma um ângulo γ com a direção de apontamento do feixe.
- $g'_3(\beta)$ ganho da antena transmissora do satélite S_1 numa direção que forma um ângulo β com a direção de apontamento do feixe.
- $g_1(\theta)$ ganho da antena da estação terrena transmissora numa direção que forma um ângulo θ com a direção de apontamento do feixe
- $g_1(0)$ ganho máximo da antena da estação terrena transmissora
- $g'_2(\alpha)$ ganho da antena receptora do satélite S_1 numa direção que forma um ângulo α com a direção de apontamento do feixe
- $g_2(\rho)$ ganho da antena receptora do satélite S_V numa direção que forma um ângulo ρ con a direção de apontamento do feixe

Por um procedimento análogo, é possível obter uma expressão analítica para a razão portadora-interferência nos terminais da antena da estação terrena receptora da rede interferida (razão portadora-interferência no lance de descida), em condições de propagação em espaço livre, dada por

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{down} = \frac{\dfrac{P_2}{\ell_2}\delta g_3(\gamma) g_4(0)}{\dfrac{P'_2}{\ell'_4}\dfrac{g'_3(0)}{g'_3(\beta)}\delta' g'_3(\eta) g_4(\xi)} \tag{3-6}$$

onde ℓ_2 é a perda de espaço livre associada ao percurso do sinal desejado no lance de descida, ℓ'_4 é a perda de espaço livre associada ao percurso da interferência no lance de descida.

Os ganhos de antenas que aparecem em (3-6) correspondem a:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

$g_3'(\eta)$ ganho da antena transmissão do satélite numa direção que forma um ângulo η com a direção de apontamento do feixe,

$g_4(\xi)$ ganho da antena da estação terrena receptora numa direção que forma um ângulo ξ com a direção de apontamento da antena.

$g_4(0)$ ganho máximo da antena da estação terrena receptora.

δ ganho no Satélite

Observe que conforme indicado na Figura 3.2 os ganhos de transmissão γ_V e γ_1 podem ser escritos como

$$\gamma_{_V} = \frac{\delta g_{_3}(\gamma) g_{_4}(0)}{\ell_2} \tag{3-7}$$

$$\gamma_{_1} = \frac{\delta' g_{_3}'(\beta) g_{_4}'(0)}{\ell_2'} \tag{3-8}$$

Em (3-7) e (3-8) $\gamma_{_V}$ é o ganho de transmissão desde a saída da antena de recepção do satélite S_V até a saída da antena de recepção de $\mathbf{r}_V$ e $\gamma_{_1}$ é obtida de forma análoga para o enlace considerado como rede interferente. Também δ e δ' correspondem, respectivamente, aos ganho da estação satélite das redes vitima e interferente.

Alternativamente, note que $\gamma_{_V}$ e $\gamma_{_1}$ podem ainda ser escritos como

$$\gamma_{_V} = \gamma_{_{V0}} \frac{g_3(\gamma)}{g_3(0)} \tag{3-9}$$

e

$$\gamma_{_1} = \gamma_{_{10}} \frac{g_3'(\beta)}{g_3'(0)} \tag{3-10}$$

onde $\gamma_{_{V0}}$ é o ganho de transmissão desde a saída da antena de recepção do satélite S_V até a saída da antena de recepção de uma estação terrena localizada no centro do feixe de transmissão da antena do mesmo satélite de modo análogo $\gamma_{_{10}}$ é o ganho de transmissão desde a saída da antena de recepção do satélite S_1 até a saída da antena de recepção de uma estação terrena localizada no centro do feixe de transmissão da antena do mesmo satélite.

Comparando-se (3-7) com (3-9) e (3-8) com (3-10) é possível obter os

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

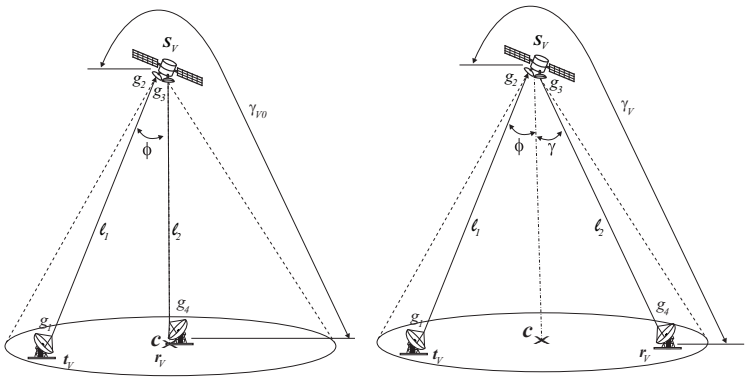

Figura 3.2: Cálculo de fator Gamma γ

ganhos δ e δ' dos satélites das redes vítimas e interferentes, dados por

$$\delta = \frac{\gamma_{V0}\ell_2}{g_4(0)g_3(0)} \tag{3-11}$$

e

$$\delta' = \frac{\gamma_{10}\ell'_2}{g'_4(0)g'_3(0)} \tag{3-12}$$

Substituindo se (3-11) e (3-12) em (3-6) obtém-se

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{down} = \frac{\frac{P_2}{\ell_2}\frac{g_3(0)}{g_3(\gamma)}\frac{\gamma_{V0}\ell_2}{g_4(0)g_3(0)}g_3(\gamma)g_4(0)}{\frac{P'_2}{\ell'_4}\frac{g'_3(0)}{g'_3(\beta)}\frac{\gamma_{10}\ell'_2}{g'_4(0)g'_3(0)}g'_3(\eta)g_4(\xi)} \tag{3-13}$$

ou ainda, considerando-se ℓ'_2 e ℓ'_4 aproximadamente iguais, (3-13) pode ser escrita a seguir

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{down} = \frac{P_2\gamma_{V0}g'_4(0)g'_3(\beta)}{P'_2\gamma_{10}g'_3(\eta)g_4(\xi)} \tag{3-14}$$

A razão portadora-interferência total, é então obtida pela relação

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{tot} = \left[\left(\frac{C}{I}\right)^{-1}_{up} + \left(\frac{C}{I}\right)^{-1}_{down}\right]^{-1} \tag{3-15}$$

substituindo-se em (3-15), (3-5) e (3-14), obtém-se finalmente

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{tot} = \left[\frac{P'_2g'_3(0)g_3(\gamma)g_2(\rho)g'_1(\theta)}{P_2g_3(0)g'_1(0)g'_2(\alpha)g'_3(\beta)} + \frac{P'_2\gamma_{10}g'_3(\eta)g_4(\xi)}{P_2\gamma_{V0}g'_4(0)g'_3(\beta)}\right]^{-1} \tag{3-16}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

Para estudar a razão portadora interferência com mais de um satélite interferente tem que se considerar a interferência de entrada única (*"single entry"se*) e a interferência agregada (*"aggregate"agg*), produzida por múltiplos sistemas interferentes sobre o sistema vítima, pode ser analisada observando-se na Figura 3.3.

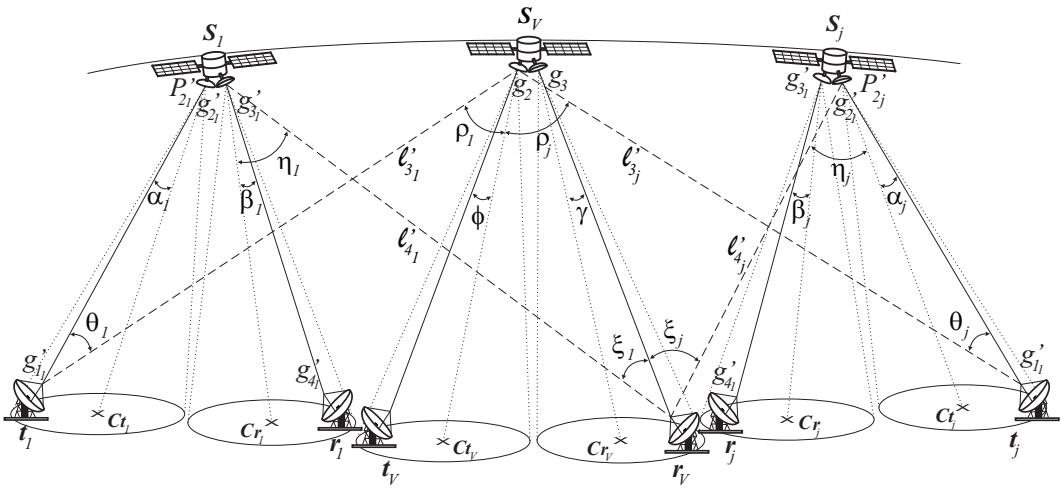

Figura 3.3: Geometria utilizada no calculo de interferência agregada causada por multiples redes interferentes.

Considerando-se (3-15), (3-16) e a geometria da Figura 3.3, observa-se que a razão portadora-interferência de entrada única resultante da interferência do sistema S_j sobre o sistema vitima S_V pode ser escrita como

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{se_j} = \left[\frac{P'_{2j}g'_{3j}(0)g_3(\gamma)g_2(\rho)g'_{1j}(\theta)}{P_2 g_3(0)g'_{3j}(\beta_j)g'_{2j}(\alpha_j)g'_{1j}(0)} + \frac{P'_{2j}\gamma_{10j}g'_{3j}(\eta_j)g_4(\xi)}{P_2\gamma_{V0}g'_{3j}(\beta_j)g'_{4j}(0)}\right]^{-1} \quad (3\text{-}17)$$

a razão portadora - interferência agregada, devida a todos os N sistemas é então dada por

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agg} = \frac{C}{I_{agg}} = \left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{C}{I}\right)^{-1}_{se_j}\right]^{-1} \quad (3\text{-}18)$$

onde N é o número de sistemas interferentes.

Finalmente substituindo (3-17) em (3-18) obtemos finalmente

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agg} = \left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{P'_{2j}g'_{3j}(0)g_3(\gamma)g_2(\rho)g'_{1j}(\theta)}{P_2 g_3(0)g'_{3j}(\beta_j)g'_{2j}(\alpha_j)g'_{1j}(0)} + \frac{P'_{2j}\gamma_{10j}g'_{3j}(\eta_j)g_4(\xi)}{P_2\gamma_{V0}g'_{3j}(\beta_j)g'_{4j}(0)}\right)\right]^{-1} \quad (3\text{-}19)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

Um resultado mais geral pode ser obtido considerando-se uma situação na qual os sistemas interferentes possuem multiplos enlaces compartilhando a mesma faixa de frequências (caso sistemas *multi-feixe*), conforme ilustrado na Figura 3.4.

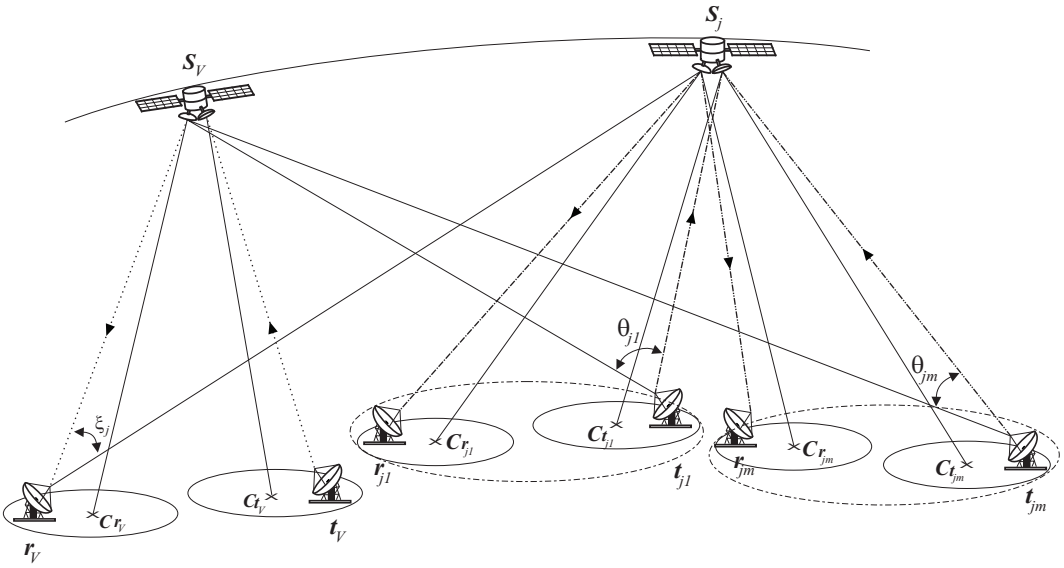

Figura 3.4: Geometria no caso particular de vários enlaces em um único satélite.

Nesta situação, a razão portadora - interferência de entrada única correspondente à interferência do m-ésimo enlace do sistema j se escreve

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{se_{jm}} = \left[\frac{P'_{2_{jm}} g'_{3_{jm}}(0) g_3(\gamma) g_2(\rho_{jm}) g'_{1_{jm}}(\theta_{jm})}{P_2 g_3(0) g'_{3_{jm}}(\beta_{jm}) g'_{2_{jm}}(\alpha_{jm}) g'_{1_{jm}}(0)} + \frac{P'_{2_{jm}} \gamma_{10_{jm}} g'_{3_{jm}}(\eta_{jm}) g_4(\xi_j)}{P_2 \gamma_{V0} g'_{3_{jm}}(\beta_{jm}) g'_{4_{jm}}(0)}\right]^{-1} \tag{3-20}$$

Em (3-20) os índices m e j que aparecem em alguns dos parâmetros envolvidos identificam o enlace e o sistema interferente envolvidos.

A razão portadora - interferente agregada para este tipo de sistemas se escreve

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agg} = \frac{C}{I_{agg}} = \left[\sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{M_j} \left(\frac{C}{I}\right)_{se_{jm}}^{-1}\right]^{-1} \tag{3-21}$$

onde M_j indica o numero de enlaces do sistema j que compartilham a mesma faixa de frequência.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

Para descrever a razão portadora-interferência agregada considera-se (3-20) em (3-21)

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agg} = \left\{\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{g_3(\gamma)}{P_2 g_3(0)}\frac{P'_{2_{jm}} g'_{3_{jm}}(0) g_2(\rho_{jm}) g'_{1_{jm}}(\theta_{jm})}{g'_{3_{jm}}(\beta_{jm}) g'_{2_{jm}}(\alpha_{jm}) g'_{1_{jm}}(0)} + \frac{g_4(\xi_j)}{P_2 \gamma_{V0}}\frac{P'_{2_{jm}} \gamma_{10_{jm}} g'_{3_{jm}}(\eta_{jm})}{g'_{3_{jm}}(\beta_{jm}) g'_{4_{jm}}(0)}\right)\right]\right\}^{-1} \quad (3\text{-}22)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

3.2
Modelagem Probabilística das Posições geográficas das Estações Terrenas e dos ganhos de suas Antenas

Nesta seção é desenvolvido o modelo matemático que permite considerar as posições geográficas das estações terrenas e os ganhos de suas antenas como entidades aleatórias. Este modelo é particularizado para duas situações específicas: (i) somente os ganhos das antenas das estações terrenas são modeladas como variáveis aleatórias e (ii) somente as posições geográficas das estações terrenas são consideradas aleatórias.

Utilizando-se a geometria mostrada na Figura 3.4 é possível verificar que (3-20) pode ainda ser escrita como

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{se_{jm}} = \left[k_{u_{jm}}^{(1)} f_{jm}(\mathbf{t}_{jm}) h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) u(\mathbf{r}_V) x_{jm} + k_{d_{jm}}^{(1)} h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) v_{jm}(\mathbf{r}_V) y_j\right]^{-1} \quad (3\text{-}23)$$

onde as constantes $k_{u_{jm}}^{(1)}$ e $k_{u_{jm}}^{(1)}$ estão dadas por

$$k_{u_{jm}}^{(1)} = \frac{P'_{2_{jm}} g'_{3_{jm}}(0)}{P_2 g_3(0) g'_{1_{jm}}(0)} \quad (3\text{-}24)$$

$$k_{d_{jm}}^{(1)} = \frac{P'_{2_{jm}} \gamma_{10_{jm}}}{P_2 \gamma_{V0} g'_{4_{jm}}(0)} \quad (3\text{-}25)$$

e as quantidades aleatórias $x_{jm}, y_j, u(\mathbf{r}_V), v_{jm}(\mathbf{r}_V), f_{jm}(\mathbf{t}_{jm})$ e $h_{jm}(\mathbf{r}_{jm})$ são definidas por

$$x_{jm} = g'_{1_j}(\theta_{jm}) \quad (3\text{-}26)$$

$$y_j = g_4(\xi_j) \quad (3\text{-}27)$$

$$u(\mathbf{r}_V) = g_3(\gamma) \quad (3\text{-}28)$$

$$v_{jm}(\mathbf{r}_V) = g'_{3_{jm}}(\eta_{jm}) \quad (3\text{-}29)$$

$$f_{jm}(\mathbf{t}_{jm}) = \frac{g_2(\rho_{jm})}{g'_{2_{jm}}(\alpha_{jm})} \quad (3\text{-}30)$$

$$h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) = \frac{1}{g'_{3_{jm}}(\beta_{jm})} \quad (3\text{-}31)$$

Observe que na obtenção de (3-23) os ângulos topocêntricos θ_{jm} e ξ_j foram aproximados pelo ângulo geocêntrico Δ_j correspondente à separação

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

orbital entre o satélite vítima e o satélite interferente j, ou seja,

$$\theta_{jm} \simeq \xi_j \simeq \Delta_j \qquad m = 1...M_j \tag{3-32}$$

Com esta aproximação os ganhos $g'_{1_j}(\theta_{jm})$ e $g_4(\xi_j)$ e consequentemente as variáveis x_{jm} e y_j passam a não depender das posições $\mathbf{t}_{jm}$ e $\mathbf{r}_V$, conforme indicado em (3-26) e (3-27).

Finalmente a razão portadora interferência agregada é obtida substituindo-se (3-23) em (3-21), resultando

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agg} = \left\{\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{m=1}^{M_j}\left(k^{(1)}_{u_{jm}} f_{jm}(\mathbf{t}_{jm}) h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) u(\mathbf{r}_V) x_{jm} + k^{(1)}_{d_{jm}} h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) v_{jm}(\mathbf{r}_V) y_j\right)\right]\right\}^{-1} \tag{3-33}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

3.2.1
Modelagem considerando-se somente os ganhos das antenas como variáveis aleatórias

Utilizando e expressão geral descrita em (3-23), se considerar a posição das estações terrenas como fixas, isto é, ($\mathbf{r}_V = \mathbf{R}_V, \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1$ e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{T}_1$) obtemos a razão portadora interferência de entrada única escrita como

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{se_{jm}} = \left[k^{(2)}_{u_{jm}} x_{jm} + k^{(2)}_{d_{jm}} y_j\right]^{-1} \tag{3-34}$$

em (3-34) x_{jm} e y_j são descritas em (3-26) e (3-27) as funções $u(\mathbf{r}_V), v_{jm}(\mathbf{r}_V), f_{jm}(\mathbf{t}_{jm})$ e $h_{jm}(\mathbf{r}_{jm})$ não são valores aleatórios, seus ganhos agora pertencem às constantes $k^{(2)}_{u_{jm}}$ e $k^{(2)}_{d_{jm}}$ que podem ser escritas como

$$k^{(2)}_{u_{jm}} = \frac{P'_{2_{jm}} g'_{3_{jm}}(0) g_2(\rho_{jm}) g_3(\gamma)}{P_2 g_3(0) g'_{1_{jm}}(0) g'_{2_{jm}}(\alpha_{jm}) g'_{3_{jm}}(\beta_{jm})} \tag{3-35}$$

$$k^{(2)}_{d_{jm}} = \frac{P'_{2_{jm}} \gamma_{10_{jm}} g'_{3_{jm}}(\eta_{jm})}{P_2 \gamma_{V0} g'_{4_{jm}}(0) g'_{3_{jm}}(\beta_{jm})} \tag{3-36}$$

Para descrever a razão portadora interferência agregada quando considerado somente o ganho das antenas como variáveis aleatórias substituímos (3-34) em (3-21)

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agg} = \left\{\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_j}\left[k^{(2)}_{u_{jm}} x_{jm} + k^{(2)}_{d_{jm}} y_j\right]\right\}^{-1} \tag{3-37}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

3.2.2
Modelagem considerando-se somente a posição geográfica das estações terrenas como vetores aleatórios

Em (3-23), quando considerar o ganho das antenas como uma envoltória o valor deles não é mais aleatório, isto é, $x_{jm} = X_{jm}$ e $y_j = Y_j$ a razão portadora interferência de entrada única pode ser escrita como

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{se_{jm}} = \left[k^{(3)}_{u_{jm}} f_{jm}(\mathbf{t}_{jm}) h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) u(\mathbf{r}_V) + k^{(3)}_{d_{jm}} h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) v_{jm}(\mathbf{r}_V)\right]^{-1} \quad (3\text{-}38)$$

em (3-38) $u(\mathbf{r}_V), v_{jm}(\mathbf{r}_V), f_{jm}(\mathbf{t}_{jm})$ e $h_{jm}(\mathbf{r}_{jm})$ são descritas em (3-28), (3-29), (3-30) e (3-31) respectivamente, as funções x_{jm} e y_j por serem ganhos constantes são incluídas em $k^{(3)}_{u_{jm}}$ e $k^{(3)}_{d_{jm}}$ que agora ficam como

$$k^{(3)}_{u_{jm}} = \frac{P'_{2_{jm}} g'_{3_{jm}}(0) g'_{1_{jm}}(\theta_{jm})}{P_2 g_3(0) g'_{1_{jm}}(0)} \quad (3\text{-}39)$$

$$k^{(3)}_{d_{jm}} = \frac{P'_{2_{jm}} \gamma_{10_{jm}} g_4(\xi_j)}{P_2 \gamma_{V0} g'_{4_{jm}}(0)} \quad (3\text{-}40)$$

Para descrever a razão portadora interferência agregada quando somente é considerado as posições das estações terrenas como um vetor aleatório substituímos (3-38) em (3-21)

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agg} = \left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_j}\left(k^{(3)}_{u_{jm}} f_{jm}(\mathbf{t}_{jm}) h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) u(\mathbf{r}_V) + k^{(3)}_{d_{jm}} h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) v_{jm}(\mathbf{r}_V)\right)\right]^{-1} \quad (3\text{-}41)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

3.3 Função Densidade de Probabilidade da Razão Interferência-Portadora

Para determinar a função densidade de probabilidade da razão portadora - interferência agregada num ambiente como o mostrado na Figura 3.4, considere inicialmente a variável aleatória z definida como a inversa da razão portadora - interferência agregada, ou seja,

$$z = \left(\frac{C}{I}\right)^{-1}_{agg} \tag{3-42}$$

Utilizando-se (3-33), esta variável aleatória pode ainda ser escrita como

$$z = \sum_{j=1}^{N} z_j \tag{3-43}$$

onde

$$z_j = \sum_{m=1}^{M_j} z_{jm} \tag{3-44}$$

com z_{jm} igual ao inverso da razão portadora - interferência de entrada única correspondente à interferência produzida pelo enlace m do sistema j, descrita em (3-23), isto é,

$$z_{jm} = k^{(1)}_{u_{jm}} f_{jm}(\mathbf{t}_{jm}) h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) u(\mathbf{r}_V) x_{jm} + k^{(1)}_{d_{jm}} h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) v_{jm}(\mathbf{r}_V) y_j \tag{3-45}$$

Considerando-se (3-45) a variável aleatória z_j em (3-44) z_j pode, alternativamente, ser escrita como

$$z_j = \sum_{j=1}^{M_j} \left[k^{(1)}_{u_{jm}} f_{jm}(\mathbf{t}_{jm}) h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) u(\mathbf{r}_V) x_{jm} + k^{(1)}_{d_{jm}} h_{jm}(\mathbf{r}_{jm}) v_{jm}(\mathbf{r}_V) y_j \right] \tag{3-46}$$

Com relação às quantidades aleatórias envolvidas ($\mathbf{t}_{jm}, \mathbf{r}_{jm}, \mathbf{r}_V, x_{jm}$ e y_j), as seguintes hipóteses são consideradas

- $y_j, x_{jm}, \mathbf{t}_{jm}, \mathbf{r}_{jm}$ e $\mathbf{r}_V$ são estatisticamente independentes $\forall\ j, m$.
- y_j é estatisticamente independente de y_k se $j \neq k$.
- x_{jm} é estatisticamente independente de x_{jn} se $m \neq n$.
- x_{jm} é estatisticamente independente de x_{kn} se $j \neq k \quad \forall\ m, n$.
- $\mathbf{t}_{jm}$ é estatisticamente independente de $\mathbf{t}_{jn}$ se $m \neq n$.
- $\mathbf{t}_{jm}$ é estatisticamente independente de $\mathbf{t}_{kn}$ se $j \neq k \quad \forall\ m, n$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

– $\mathbf{r}_{jm}$ é estatisticamente independente de $\mathbf{r}_{jn}$ se $m \neq n$.

– $\mathbf{r}_{jm}$ é estatisticamente independente de $\mathbf{r}_{kn}$ se $j \neq k \quad \forall\, m, n$.

Estas hipóteses permitem concluir, a partir de (3-43) que as variáveis aleatórias $\{z_j; \quad j = 1, ..., N\}$ são estatisticamente independentes. Neste caso a função densidade de probabilidade da variável aleatória z (ver (3-43)) se escreve

$$p_z(\beta) = p_{z_1}(\beta) * \cdots * p_{z_N}(\beta) \tag{3-47}$$

Para determinar os termos p_{z_j} da convolução múltipla em (3-47) observe, a partir de (3-45), que dado $y_j = Y$, as variáveis aleatórias $\{z_{jm}, m = 1...M_j\}$ são estatisticamente independentes. Neste caso, a função de densidade de probabilidade condicional da variável aleatória z_j dado $y_j = Y$, se escreve (ver (3-44))

$$p_{z_j|y_j=Y}(\beta) = p_{z_{j1}|y_j=Y}(\beta) * \cdots * p_{z_{jM_j}|y_j=Y}(\beta) \tag{3-48}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

A função densidade de probabilidade de z_j é então obtida a partir de (3-48), considerando-se a relação

$$p_{z_j}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{z_j|y_j=Y}(\beta) p_{y_j}(Y) \mathrm{d}Y \tag{3-49}$$

Para determinar as funções densidade de probabilidade condicionais que aparecem no lado direito de (3-48), observe inicialmente que

$$\begin{aligned} p_{z_{jm}|y_j=Y}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_{z_{jm}|\mathbf{t}_{jm}=\mathbf{T},\mathbf{r}_{jm}=\mathbf{R},\mathbf{r}_V=\mathbf{V},y_j=Y}(\beta) \\ p_{\mathbf{t}_{jm}\mathbf{r}_{jm},\mathbf{r}_V|y_j=Y}(\mathbf{T},\mathbf{R},\mathbf{V}) \mathrm{d}\mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{R}\mathrm{d}\mathbf{V} \end{aligned} \tag{3-50}$$

As hipóteses consideradas, permitem concluir que, os vetores $\mathbf{t}_{jm}, \mathbf{r}_{jm}$ e $\mathbf{r}_V$ são todas estatisticamente independentes de y_j e estatisticamente independentes entre si. Neste caso (3-50) se escreve como

$$\begin{aligned} p_{z_{jm}|y_j=Y}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_{z_{jm}|\mathbf{t}_{jm}=\mathbf{T},\mathbf{r}_{jm}=\mathbf{R},\mathbf{r}_V=\mathbf{V},y_j=Y}(\beta) \\ p_{\mathbf{t}_{jm}}(\mathbf{T}) p_{\mathbf{r}_{jm}}(\mathbf{R}) p_{\mathbf{r}_V}(\mathbf{V}) \mathrm{d}\mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{R}\mathrm{d}\mathbf{V} \end{aligned} \tag{3-51}$$

No presente trabalho, os vetores aleatórias $\mathbf{t}_{jm}, \mathbf{r}_{jm}$ e $\mathbf{r}_V$, que caracterizam as posições geográficas das estações terrenas, são consideradas uniformes dentro das áreas de cobertura correspondentes.

Assim, a função densidade de probabilidade de $\mathbf{t}_{jm}$ é dada por

$$p_{\mathbf{t}_{jm}}(\mathbf{T}) = \begin{cases} k_{\mathbf{t}_{jm}} & ; \quad \mathbf{T} \in \mathbf{S}_{\mathbf{t}_{jm}} \\ 0 & ; \quad \mathbf{T} \notin \mathbf{S}_{\mathbf{t}_{jm}} \end{cases} \quad ; \quad j = 1...N; \quad m = 1...M_j \tag{3-52}$$

onde $\mathbf{S}_{\mathbf{t}_{jm}}$ é a região da superfície da terra correspondente à area de cobertura do feixe de transmissão do satélite j associado ao enlace m.

De maneira análoga, a função densidade de probabilidade de $\mathbf{r}_{jm}$ é dada por

$$p_{\mathbf{r}_{jm}}(\mathbf{R}) = \begin{cases} k_{\mathbf{r}_{jm}} & ; \quad \mathbf{R} \in \mathbf{S}_{\mathbf{r}_{jm}} \\ 0 & ; \quad \mathbf{R} \notin \mathbf{S}_{\mathbf{r}_{jm}} \end{cases} \quad ; \quad j = 1...N; \quad m = 1...M_j \tag{3-53}$$

onde $\mathbf{S}_{\mathbf{r}_{jm}}$ é a região da superfície da terra correspondente à area de cobertura do feixe de recepção do satélite j associado ao enlace m.

Finalmente, a função densidade de probabilidade de $\mathbf{r}_V$, se escreve

$$p_{\mathbf{r}_V}(\mathbf{V}) = \begin{cases} k_{\mathbf{r}_V} & \mathbf{V} \in \mathbf{S}_{\mathbf{r}_V} \\ 0 & \mathbf{V} \notin \mathbf{S}_{\mathbf{r}_V} \end{cases} \tag{3-54}$$

onde $\mathbf{S}_{\mathbf{r}_V}$ é a região da superfície da terra correspondente à area de cobertura do feixe de recepção do satélite vítima.

Considerando-se (3-52), (3-53) e (3-54), (3-51) se escreve

$$\begin{aligned} &p_{z_{jm}|y_j=Y}(\beta) = \\ &= k_{\mathbf{t}_{jm}} k_{\mathbf{r}_{jm}} k_{\mathbf{r}_V} \int\limits_{\mathbf{S}_{\mathbf{t}_{jm}}} \int\limits_{\mathbf{S}_{\mathbf{r}_{jm}}} \int\limits_{\mathbf{S}_{\mathbf{r}_V}} p_{z_{jm}|\mathbf{t}_{jm}=\mathbf{T},\mathbf{r}_{jm}=\mathbf{R},\mathbf{r}_V=\mathbf{V},y_j=Y}(\beta) \mathrm{d}\mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{R}\mathrm{d}\mathbf{V} \end{aligned} \tag{3-55}$$

Neste ponto é interessante observar que, dado $\mathbf{t}_{jm} = \mathbf{T}$, $\mathbf{r}_{jm} = \mathbf{R}$, $\mathbf{r}_V = \mathbf{V}$ e $y_j = Y$, a variável aleatória z_{jm} depende apenas de x_{jm}. Mais especificamente conforme indicado em (3-45), z_{jm} é uma função linear de x_{jm}, dada por

$$z_{jm} = A_{jm}(\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{V}) x_{jm} + B_{jm}(\mathbf{R}, \mathbf{V}, Y) \tag{3-56}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

onde as constantes $A_{jm}()$ e $B_{jm}()$ são dadas por

$$A_{jm}(\mathbf{T},\mathbf{R},\mathbf{V}) = k_{u_{jm}}^{(1)} f_{jm}(\mathbf{T}) h_{jm}(\mathbf{R}) u(\mathbf{V}) \tag{3-57}$$

e

$$B_{jm}(\mathbf{R},\mathbf{V},Y) = k_{d_{jm}}^{(1)} h_{jm}(\mathbf{R}) v_{jm}(\mathbf{V}) Y \tag{3-58}$$

A relação em (3-56) permite escrever a função densidade de probabilidade condicional de z_{jm} em função da função densidade de probabilidade de x_{jm}. Considerando que x_{jm} é estatisticamente independente de $\mathbf{t}_{jm}$, $\mathbf{r}_{jm}$, $\mathbf{r}_V$ e y_j obtém-se

$$p_{z_{jm}|\mathbf{t}_{jm}=\mathbf{T},\mathbf{r}_{jm}=\mathbf{R},\mathbf{r}_V=\mathbf{V},y_j=Y}(\beta) = \frac{1}{|A_{jm}(\mathbf{T},\mathbf{R},\mathbf{V})|} p_{x_{jm}}\left(\frac{\beta - B_{jm}(\mathbf{R},\mathbf{V},Y)}{A_{jm}(\mathbf{T},\mathbf{R},\mathbf{V})}\right) \tag{3-59}$$

Em resumo, a determinação da função densidade de probabilidade da variável aleatória z, envolve a utilização ordenada das relações em (3-59), (3-55), (3-48), (3-49) e (3-47).

O desenvolvimento desta seção permitiu determinar expressões para a função densidade de probabilidade da variável aleatória z, que modela a razão *interferência agregada - portadora*, quando expressa como fator. A razão *interferência agregada - portadora*, expressa em dB, é definida por

$$\frac{i}{c} = 10\log(z) \tag{3-60}$$

e sua função densidade de probabilidade é obtida a partir da função densidade de probabilidade de z pela relação

$$p_{i/c}(\alpha) = \frac{\ln 10}{10}\, 10^{\alpha/10}\, p_z\left(10^{\alpha/10}\right) \tag{3-61}$$

A partir de $p_{i/c}(\alpha)$ é possível obter a Distribuição cumulativa de probabilidade da razão i/c, dada por

$$C_{i/c}(\alpha) = P\left(\frac{i}{c} > \alpha\right) = \int_{\alpha}^{\infty} p_{i/c}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3-62}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

e a função distribuição de probabilidade da razão portadora-interferência, dada por

$$F_{c/i}(\alpha) = P\left(\frac{c}{i} \leq \alpha\right) = P\left(\frac{i}{c} \geq -\alpha\right) = C_{i/c}\left(-\alpha\right) \tag{3-63}$$

3.3.1
Função densidade de probabilidade da razão interferência portadora considerando-se somente as posições geográficas como variáveis aleatórias

No caso particular em que os ganhos das antenas das estações terrenas $\{x_{jm};\, j = 1...N,\, m = 1...M_j\}$ e $\{y_j; j = 1...N\}$ não são considerados como variáveis aleatórias sendo, por exemplo, respectivamente iguais a $\{X_{jm};\, j = 1...N,\, m = 1...M_j\}$ e $\{Y_j; j = 1...N\}$ é possível considerar suas funções de densidade de probabilidade como sendo dadas por

$$p_{x_{jm}}(X) = \delta(X - X_{jm}) \tag{3-64}$$

$$p_{y_j}(Y) = \delta(Y - Y_j) \tag{3-65}$$

Note que neste caso a variável aleatória z_{jm} em (3-56) passa a ter um valor constante dado por

$$z_{jm} = C_{jm}(\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{V}, Y) \tag{3-66}$$

onde

$$C_{jm}(\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{V}, Y) = A_{jm}(\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{V})X_{jm} + B_{jm}(\mathbf{R}, \mathbf{V}, Y) \tag{3-67}$$

e as constantes $A_{jm}()$ e $B_{jm}()$ descritas em (3-57) e (3-58), respectivamente. Isto significa que com

$$p_{z_{jm}|\mathbf{t}_{jm}=\mathbf{T},\mathbf{r}_{jm}=\mathbf{R},\mathbf{r}_V=\mathbf{V},y_j=Y}(\beta) = \delta(\beta - C_{jm}(\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{V}, Y)) \tag{3-68}$$

Substituindo-se (3-68) em (3-55) obtém-se

$$p_{z_{jm}|y_j=Y}(\beta) = \\ = k_{\mathbf{t}_{jm}} k_{\mathbf{r}_{jm}} k_{\mathbf{r}_V} \int\limits_{\mathbf{S}_{\mathbf{t}_{jm}}} \int\limits_{\mathbf{S}_{\mathbf{r}_{jm}}} \int\limits_{\mathbf{S}_{\mathbf{r}_V}} \delta\left(\beta - C_{jm}(\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{V}, Y)\right) \mathrm{d}\mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{R}\mathrm{d}\mathbf{V} \tag{3-69}$$

que corresponde a a função densidade de probabilidade condicional da variável

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

aleatória z_{jm}, dado $y_j = Y$, quando aos ganhos das antenas das estações terrenas não são consideradas aleatórias.

Além disso considerando-se (3-65) a função densidade de probabilidade de z_j em (3-49) se escreve

$$p_{z_j}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{z_j|y_j=Y}(\beta)\delta(\beta - Y_j) = p_{z_j|y_j=Y_j}(\beta) \tag{3-70}$$

Finalmente a função densidade de probabilidade da razão *interferência agregada - portadora*, quando apenas as posições geográficas das estações terrenas, são consideradas aleatórias, é obtida utilizando-se ordenadamente (3-69), (3-48) (3-70) e (3-47).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC

3.3.2
Função densidade de probabilidade da razão interferência portadora considerando-se somente os ganhos das antenas como variáveis aleatórias

Neste caso, a variável aleatória z é dada pelo inverso da relação em (3-37), ou seja,

$$z = \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{M_j} \left[k_{u_{jm}}^{(2)} x_{jm} + k_{d_{jm}}^{(2)} y_j \right] \tag{3-71}$$

Isto significa que z é uma combinação linear das variáveis aleatórias $\{y_j;\ j = 1..N\}$ e $\{x_{jm};\ j = 1...N,\ m = 1...M_j\}$. No caso geral, considera-se que as variáveis aleatórias x_{jm} e y_j são estatisticamente independentes.

Finalmente com (3-71) a função densidade de probabilidade da variável aleatória z é dada por

$$p_z(Z) = M_1(\beta) * ... * M_N(\beta) \tag{3-72}$$

onde

$$M_j(\beta) = \left[P_{j1}(\beta) * ... * P_{jM_j}(\beta) \right] * P_j(\beta) \tag{3-73}$$

com

$$P_{jm}(\beta) = \frac{1}{k_{ujm^{(2)}}} p_{x_{jm}} \left(\frac{\beta}{k_{u_{jm}}^{(2)}} \right) \quad j = 1...N;\ m = 1...M_j \tag{3-74}$$

e

$$P_j(\beta) = \frac{1}{K_{dj}} p_{y_j} \left(\frac{\beta}{K_{dj}} \right) \quad j = 1...N \tag{3-75}$$

sendo

$$K_{dj} = \sum_{m=1}^{M_j} k_{djm}^{(2)} \tag{3-76}$$

Em resumo, a função densidade de probabilidade da razão *interferência agregada - portadora*, quando apenas os ganhos das antenas das estações terrenas são considerados aleatórios, é obtida utilizando-se (3-76) a (3-72)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112760/CC