5
Exemplos

5.1.
Viga retangular engastada

Uma viga retangular engastada é carregada transversalmente na extremidade livre, Figura 5.1. A carga corresponde a um pulso de meia onda senoidal que tem o mesmo período fundamental da viga, T_0 = 3,4371·10^{-3} segundos, e amplitude F_0 = 9,8066 KN.

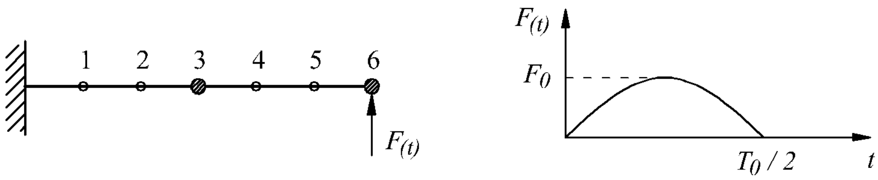


Figura 5.1 Discretização da viga e carregamento transversal.

A viga tem comprimento L = 2,0 metros, altura h = 1,0 metro, base b = 0,10 metros e massa por comprimento de viga $\overline{m}$ = 4,7072 kg / m. O fator de correção de cortante k_s = 5/6. O comportamento elástico da viga está definido pelo módulo de elasticidade E = 3432,33 MPa e o coeficiente de Poisson ν = 0,40.

Utilizam-se dois elementos de viga de Timoshenko na modelagem numérica da viga. Os campos de deslocamento e de rotação de cada elemento são interpolados por funções cúbicas de Lagrange, logo, cada elemento tem dois nós internos além dos nós de extremidade.

Comparam-se as respostas dinâmicas da viga com amortecimento proporcional e viscoelástico. O amortecimento viscoelástico é aplicado inicialmente nas deformações desviadoras e posteriormente nas deformações cisalhantes.

Desta forma pode-se observar que para estruturas simples, respostas dinâmicas similares podem ser obtidas com amortecimento proporcional e com amortecimento viscoelástico aplicado às deformações desviadores. Porém, quando o amortecimento viscoelástico é aplicado nas deformações cisalhantes a energia dissipada pelo sistema não pode ser muito alta inclusive em vigas com relações L/h baixas.

O amortecimento proporcional adotado nas duas primeiras frequências de vibração é igual a 40% do amortecimento crítico. As duas primeiras frequências naturais da viga são 1828 e 6832 rad/s, então:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = 2\frac{1828 \cdot 6832}{6832^2 - 1828^2}\begin{bmatrix} -1/6832 & 1/1828 \\ 6832 & -1828 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9{,}24 \cdot 10^{-5} \\ 1154 \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

O parâmetro de amortecimento viscoelástico que corresponde ao módulo de cisalhamento de longo prazo é igual ao módulo de cisalhamento elástico da viga $G_\infty = 1225{,}83$ MPa. Os outros parâmetros viscoelásticos, são escolhidos com o objetivo de encontrar uma resposta similar à resposta da viga com amortecimento proporcional. No caso de amortecimento viscoelástico aplicado às deformações desviadoras, estes parâmetros estão indicados na Figura 5.1.

A Figura 5.2 mostra as respostas da viga com amortecimento proporcional e viscoelástico aplicado nas deformações desviadoras.

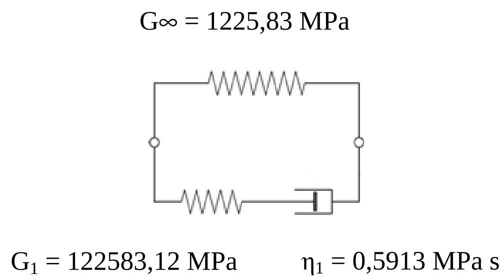


Figura 5.1 Parâmetros viscoelásticos aplicados à parcela desviadora das deformações.

Quando o amortecimento viscoelástico é aplicado à deformação cisalhante não é possível conseguir a mesma dissipação de energia obtida com o amortecimento proporcional. A Figura 5.4 mostra as respostas da viga com amortecimento proporcional e amortecimento viscoelástico aplicado à deformação cisalhante com os parâmetros dos três modelos viscoelásticos indicados na Figura 5.3.

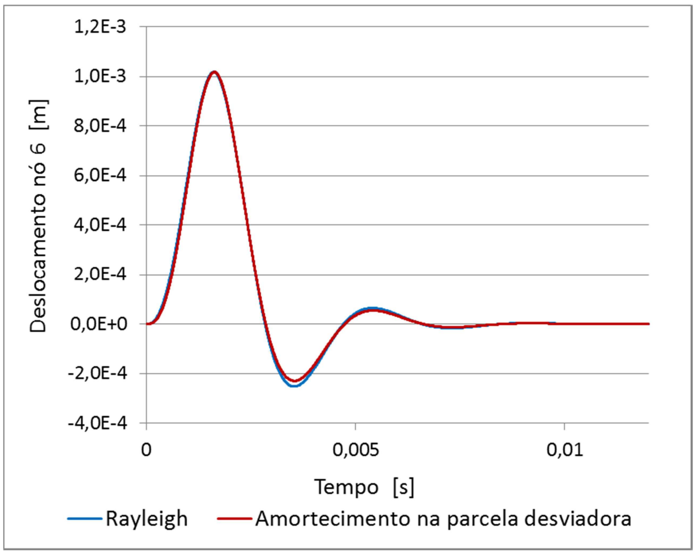


Figura 5.2 Resposta da viga com amortecimento viscoelástico na parcela desviadora e com amortecimento proporcional.

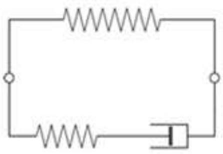
<table>
<tr><td rowspan="4">G∞

G₁ η₁</td><td>Modelo</td><td>G∞
[MPa]</td><td>G_1
[MPa]</td><td>η_1
[MPa s]</td></tr>
<tr><td>Visc1</td><td>1225,83</td><td>122583,12</td><td>0,7355</td></tr>
<tr><td>Visc2</td><td>1225,83</td><td>122583,12</td><td>2,9420</td></tr>
<tr><td>Visc3</td><td>1225,83</td><td>122583,12</td><td>0,1844</td></tr>
</table>

Figura 5.3 Parâmetros viscoelásticos aplicados à deformação cisalhante.

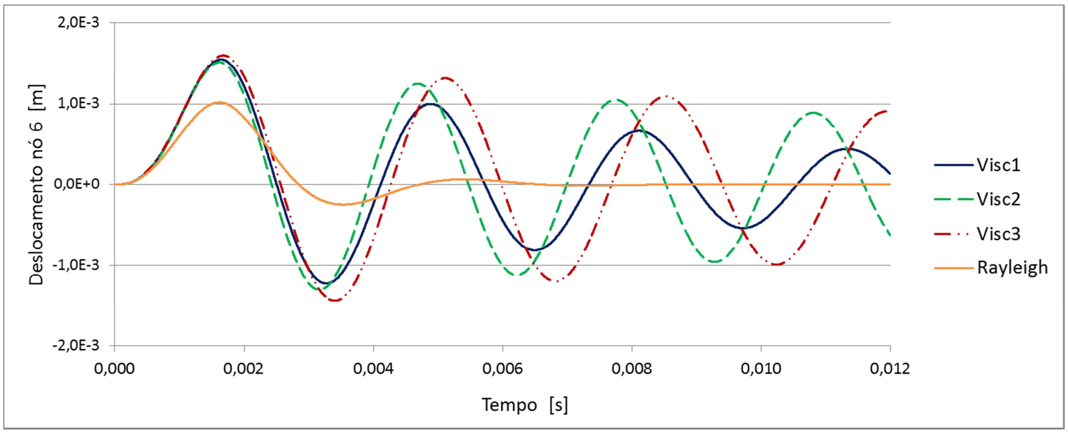


Figura 5.4 Resposta da viga com amortecimento viscoelástico aplicado à deformação cisalhante e com amortecimento proporcional.

O valor do amortecedor viscoso do caso Visc1 produz a máxima dissipação de energia quando o amortecimento é aplicado à deformação cisalhante. Um valor quatro vezes maior desta constante (Visc2) dissipa menos energia ao passo que aumenta a frequência da viga. Nos materiais viscoelásticos existe uma quantidade máxima de energia que pode ser dissipada em função dos parâmetros viscoelásticos e da frequência da solicitação, Lakes, 2009.

Na viga analisada, com L/h = 2, a energia dissipada pelo amortecimento aplicado à energia desviadora é muito maior do que a energia dissipada pelo amortecimento aplicado à deformação cisalhante. Isto é devido a que a energia de deformação da parcela desviadora é a soma da energia de deformação cisalhante e de uma parte da energia de deformação de flexão. Para que o amortecimento viscoelástico aplicado à deformação cisalhante possa dissipar mais energia a viga precisa ter ainda menores relações L/h.

5.2. Viga retangular engastada com carga seguidora

Uma viga retangular engastada é submetida à ação de uma carga seguidora axial na extremidade, Figura 5.5. Estuda-se a resposta no tempo e a carga crítica dinâmica da viga com amortecimento proporcional à rigidez e com amortecimento viscoelástico.

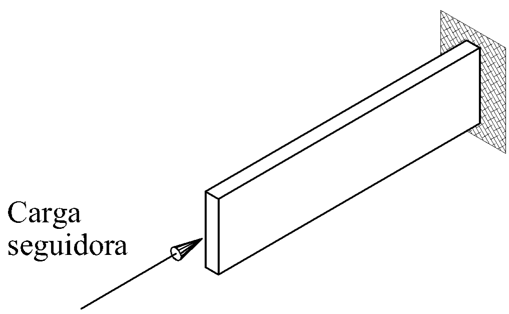


Figura 5.5 Carga seguidora na extremidade livre da viga engastada.

No caso de amortecimento proporcional à rigidez adotam-se duas relações entre comprimento e altura para comparar os resultados assumindo a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de vigas de Timoshenko.

No início, admite-se somente amortecimento proporcional à rigidez, com o propósito de reproduzir o paradoxo de Ziegler para valores baixos de amortecimento. Analisa-se o comportamento da viga para alguns valores de amortecimento, em termos de deslocamentos que resultam de análises no domínio do tempo e da carga crítica obtida a partir dos autovalores da equação característica.

Logo após, a carga crítica dinâmica da viga com amortecimento viscoelástico é calculada para vários valores de amortecimento e tempos de relaxação. Observa-se também uma redução da carga crítica em vigas com baixo amortecimento.

5.2.1.
Viga com amortecimento proporcional

Analisam-se duas vigas engastadas com altura de h = 0,50 m e h = 1,00 m respectivamente, ambas as vigas têm dois metros de comprimento, 0,10 m de largura, massa específica ρ_m = 1961,3 Kg/m^3, modulo de elasticidade E = 3432,33 MPa, coeficiente de Poisson ν = 0,40 e fator de correção de cortante k_s = 5/6.

As vigas são modeladas com dois elementos finitos cúbicos com matrizes de massa consistentes. As vigas formuladas com a teoria de Euler-Bernoulli interpolam o campo de deslocamentos com as funções de Hermite, enquanto as vigas formuladas com a teoria de Timoshenko utilizam as funções de Lagrange para interpolar deslocamentos e rotações.

As cargas críticas são calculadas através da eq. (3.55), a Figura 5.6 mostra a carga crítica dinâmica versus o coeficiente adimensional η. As curvas BC1 e BC2 correspondem à teoria de Euler-Bernoulli, enquanto que as curvas TC1 e TC2 à teoria de vigas de Timoshenko. Nesta figura as cargas críticas dinâmicas são normalizadas dividindo-as pelas cargas de "flutter" sem amortecimento P_{cd0} de cada caso indicadas na Tabela 5.1.

Em todos os casos, observa-se o paradoxo de Ziegler para pequenas quantidades de amortecimento. Porém, este fenômeno é mais acentuado nas vigas formuladas com as hipóteses de Euler-Bernoulli. Nas vigas de Timoshenko quanto menor é a razão L/h, menor é a diferença entre as cargas críticas dinâmicas calculadas sem amortecimento e com pequenos valores de amortecimento.

Para valores de amortecimento moderados e altos, a carga crítica dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli aumenta quando se incrementa a quantidade de amortecimento. Nas vigas de Timoshenko, o incremento da carga crítica com o amortecimento tem um limite, além deste limite o amortecimento tem pouco efeito no crescimento da carga de “flutter”. O valor do amortecimento que define esta mudança de comportamento da carga crítica depende da razão L/h.

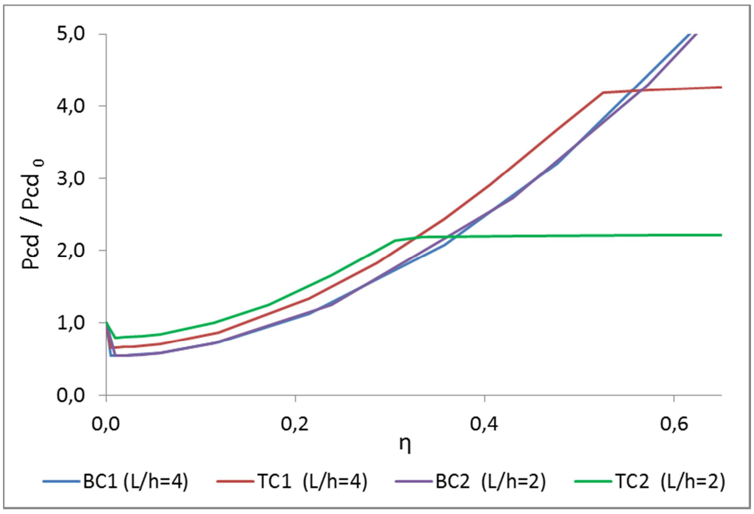


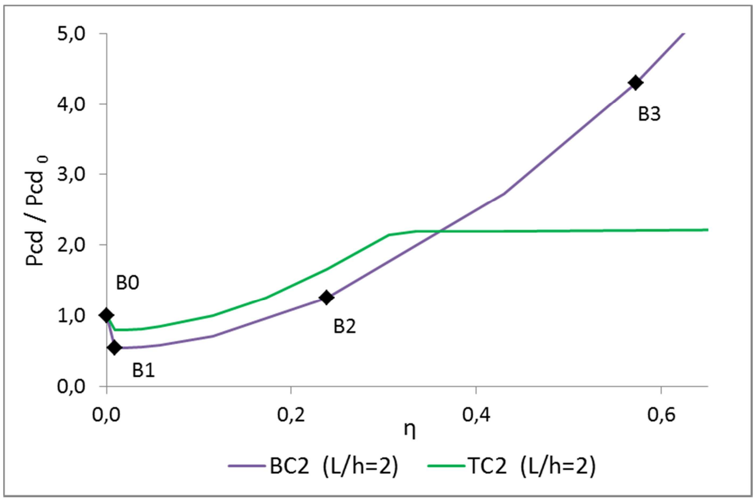
Figura 5.6 Carga crítica dinâmica de vigas com a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

Tabela 5.1 Carga crítica dinâmica sem amortecimento.

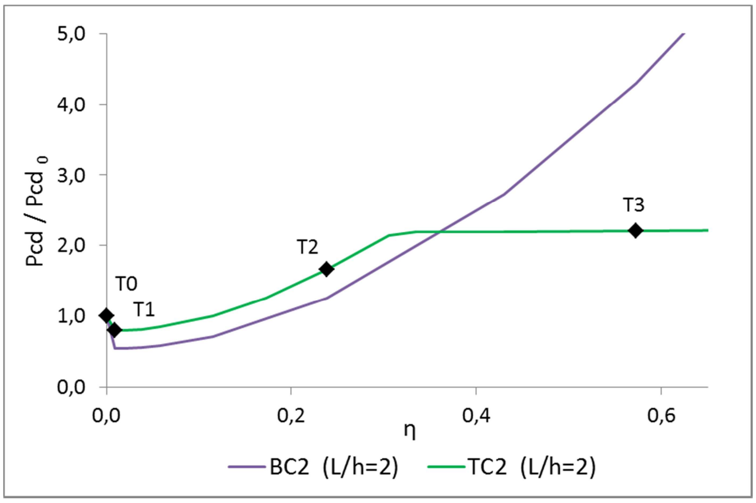
Cargas Críticas Dinâmicas sem Amortecimento [KN]				
Teoria de viga	$L/h = 4$		$L/h = 2$	
Euler-Bernoulli	BC1	18049,1	BC2	144390,2
Timoshenko	TC1	11437,5	TC2	45707,8

É importante notar que se a taxa de amortecimento aplicada ao primeiro modo de vibração, no caso de menor carga crítica (ponto mais baixo da curva), é aplicada aos dois primeiros modos de vibração como amortecimento proporcional à rigidez e à massa, o paradoxo de Ziegler não é mais observado, confirmando que unicamente no caso de amortecimento proporcional à rigidez se apresenta este fenômeno.

As respostas da viga com $L/h = 2$ são analisadas com o objetivo de comparar o comportamento da coluna de Beck com as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Para quatro valores de amortecimento diferentes, Figura 5.7 e Tabela 5.2, calcula-se a resposta no tempo e a variação do número complexo *s* à medida que a força seguidora se incrementa monotonamente.



(a)



(b)

Figura 5.7 Carga crítica dinâmica, (a) pontos da viga de Euler-Bernoulli, (b) pontos da viga de Timoshenko.

Nas análises no domínio do tempo duas forças são aplicadas na extremidade livre da viga, Figura 5.8, a carga seguidora que se incrementa linearmente e uma pequena carga transversal harmônica com amplitude F_0 = 4,90·10^{-5} KN e período T_0 = 2,5133·10^{-2} s. Esta última carga é aplicada para induzir um pequeno desvio que permita observar, uma vez que a carga de flutter seja ultrapassada, o incremento rápido de amplitudes dos deslocamentos na resposta no tempo. Para cada incremento Δt da análise no tempo se obtém a solução do problema de autovalor da eq. (3.55), desta forma vê-se a variação da parte real e imaginária do número complexo *s* à medida que a carga seguidora é incrementada.

Tabela 5.2 Cargas críticas dinâmicas para valores de amortecimento especificados.

Cargas Críticas Dinâmicas [KN]					
Amortecimento		Viga de Euler-Bernoulli		Viga de Timoshenko	
η	a_1	Carga de "Flutter"		Carga de "Flutter"	
0.0	0.0	B0	144390,2	T0	45707,8
9,55·10^{-3}	1,0·10^{-4}	B1	77895,2	T1	36140,4
2,39·10^{-1}	2,5·10^{-3}	B2	180715,0	T2	75772,1
5,73·10^{-1}	6,0·10^{-3}	B3	620608,0	T3	100966,3

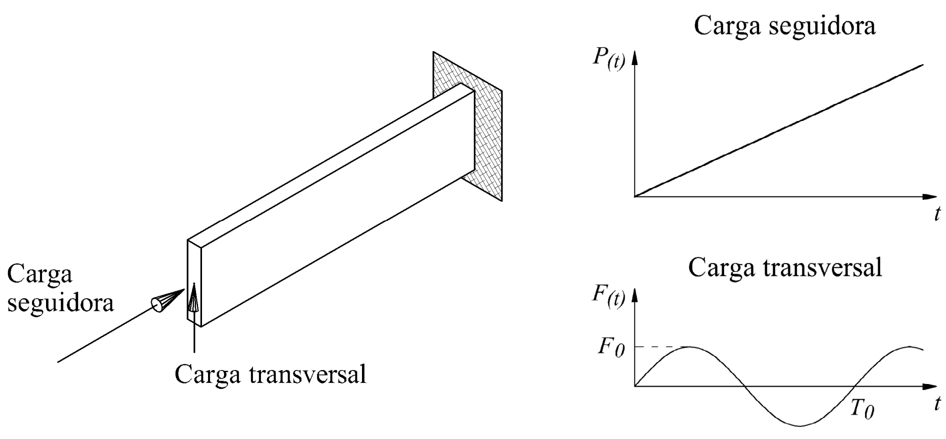


Figura 5.8 Forças aplicadas na extremidade livre da viga engastada.

Para cada valor de amortecimento especificado acima, Figura 5.9 à Figura 5.24 mostram a carga seguidora, a parte real e imaginária do número complexo *s*, e os deslocamentos da extremidade livre em função do tempo. Os modos de vibração dos modos menos amortecidos também são mostrados nestas figuras.

Nas análises de cargas não conservativas com amortecimento, as frequências dos modos de vibração variam em função do valor da carga seguidora, assim um modo com a segunda frequência mais baixa pode passar a ter a primeira frequência mais baixa à medida que a carga seguidora aumenta.

Neste trabalho define-se a ordem dos modos em função do grau de amortecimento antes da aplicação da carga seguidora, ou seja, segundo a parte real do número complexo *s* no tempo t = 0 s. Desta forma evita-se o conflito nas análises com valores altos de amortecimento, onde aparecem vários modos superamortecidos com frequência igual a zero. Conforme a carga seguidora aumenta, a frequência dos primeiros modos superamortecidos pode aumentar enquanto que o amortecimento diminui.

Assim sendo, em alguns casos o segundo modo de vibração é um modo que têm frequência zero e deformada característica de modos mais altos em análises de vibração livre.

A raiz quadrada da parte real e imaginária do número *s* é usada nas figuras com o único propósito de melhorar a visualização da mudança de sinal da parte real, condição que define a carga crítica dinâmica. Uma linha vertical nestes gráficos indica a ocorrência do início da carga de “flutter”.

Nos gráficos que mostram o deslocamento da extremidade em função do tempo, a escala vertical está reduzida para que as primeiras mudanças da amplitude de vibração possam ser observadas. Fora dos limites do gráfico os deslocamentos continuam crescendo exponencialmente.

Para as vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko sem amortecimento, Figura 5.9 e Figura 5.10 respectivamente, observa-se que a carga crítica dinâmica, definida pela mudança de sinal da parte real do número complexo *s*, coincide exatamente com a união das duas frequências de vibração e está próxima ao início do incremento exponencial da amplitude do deslocamento.

A Figura 5.11 e a Figura 5.12 mostram os dois primeiros modos de vibração para três valores diferentes de carga seguidora, o comportamento da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko é similar para este caso de viga sem amortecimento. À medida que a carga seguidora aumenta, os modos de vibração se aproximam um do outro e, a partir da carga de “flutter”, forma-se modo único de vibração que substitui os dois anteriores.

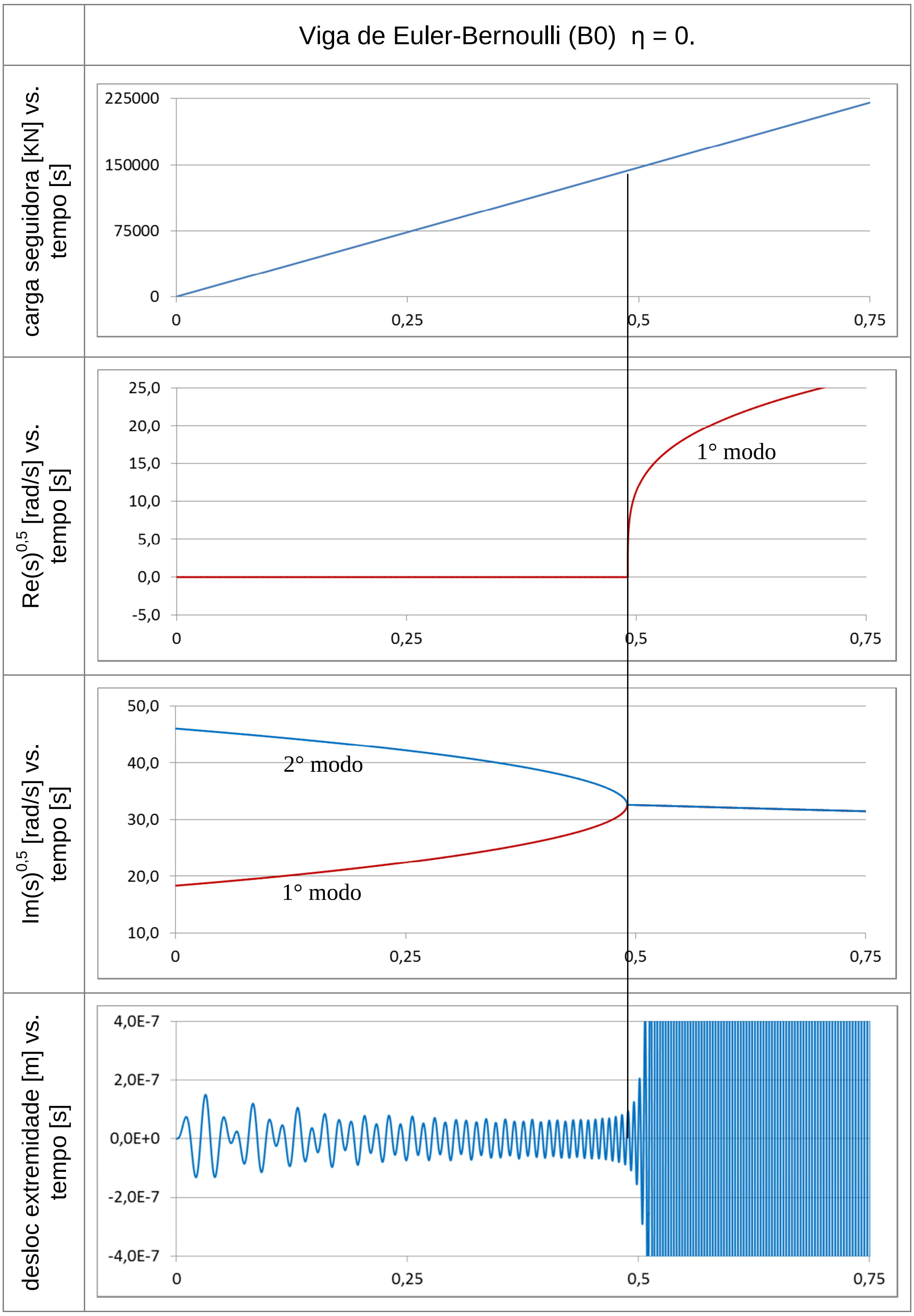


Figura 5.9 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para η = 0, teoria de Euler-Bernoulli (B0).

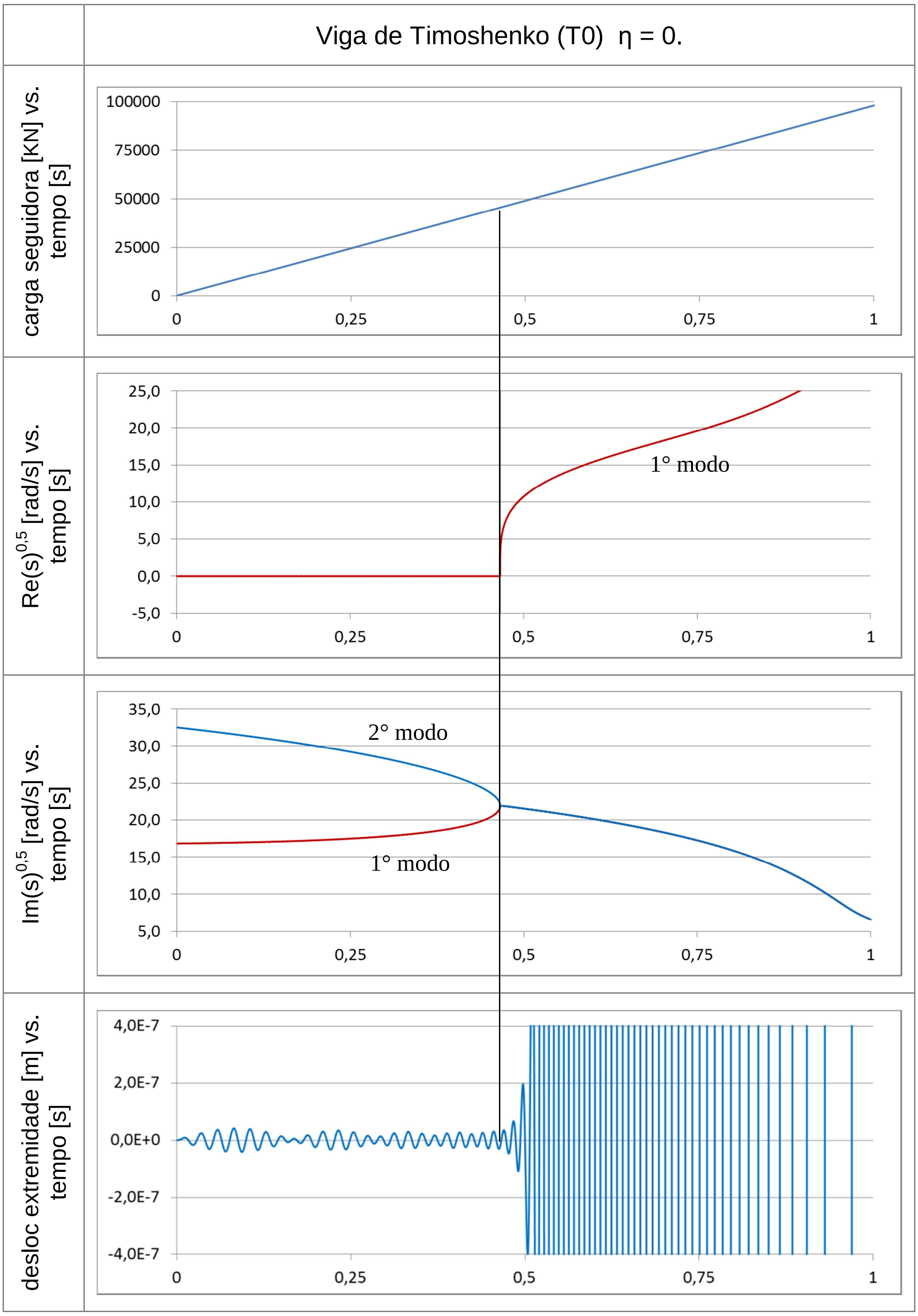


Figura 5.10 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para η = 0, teoria de Timoshenko (T0).

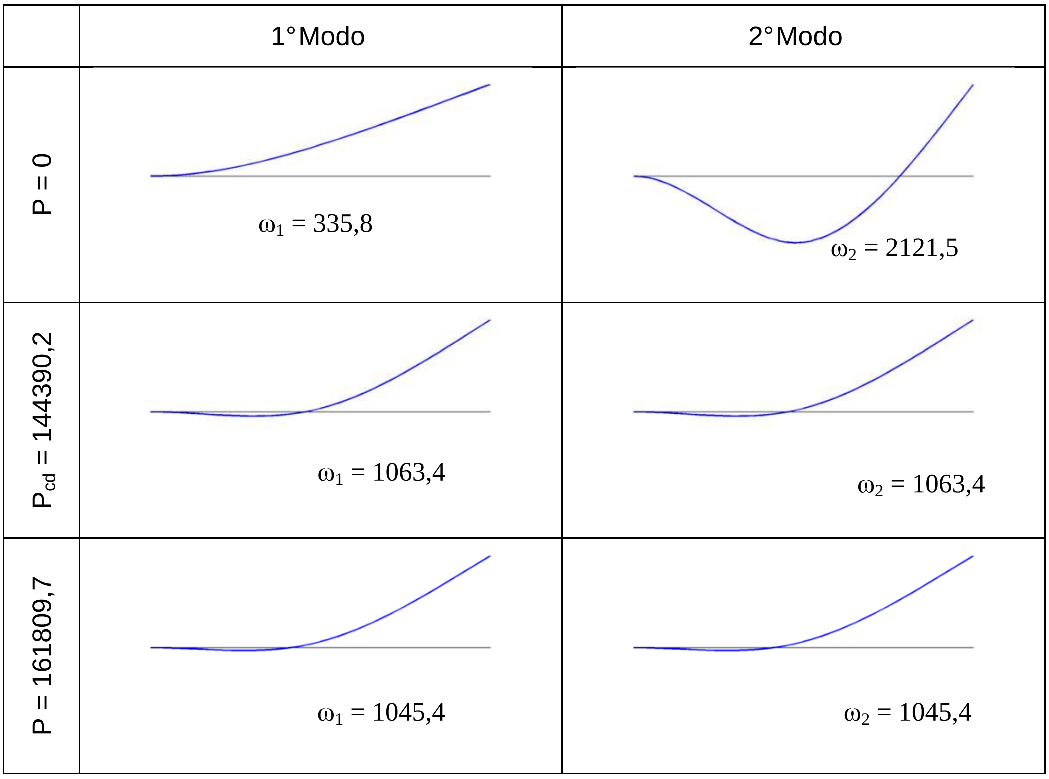


Figura 5.11 Modos de vibração com maior parte real de *s* para η = 0, teoria de Euler-Bernoulli (B0).

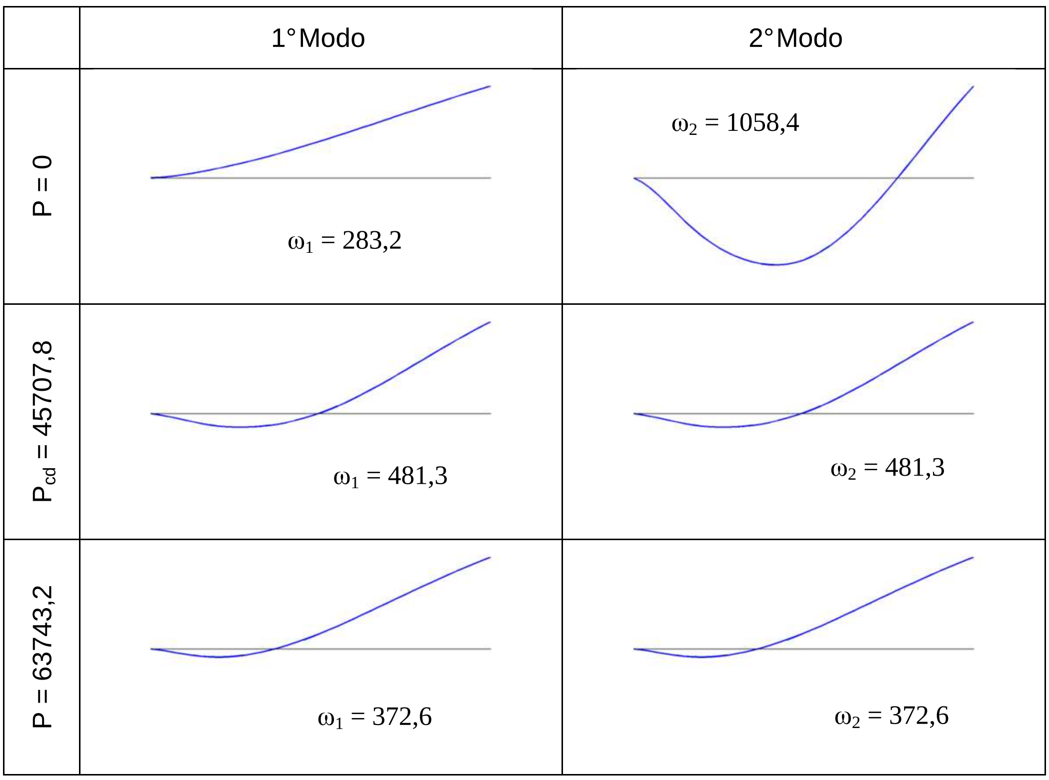


Figura 5.12 Modos de vibração com maior parte real de *s* para η = 0, teoria de Timoshenko (T0).

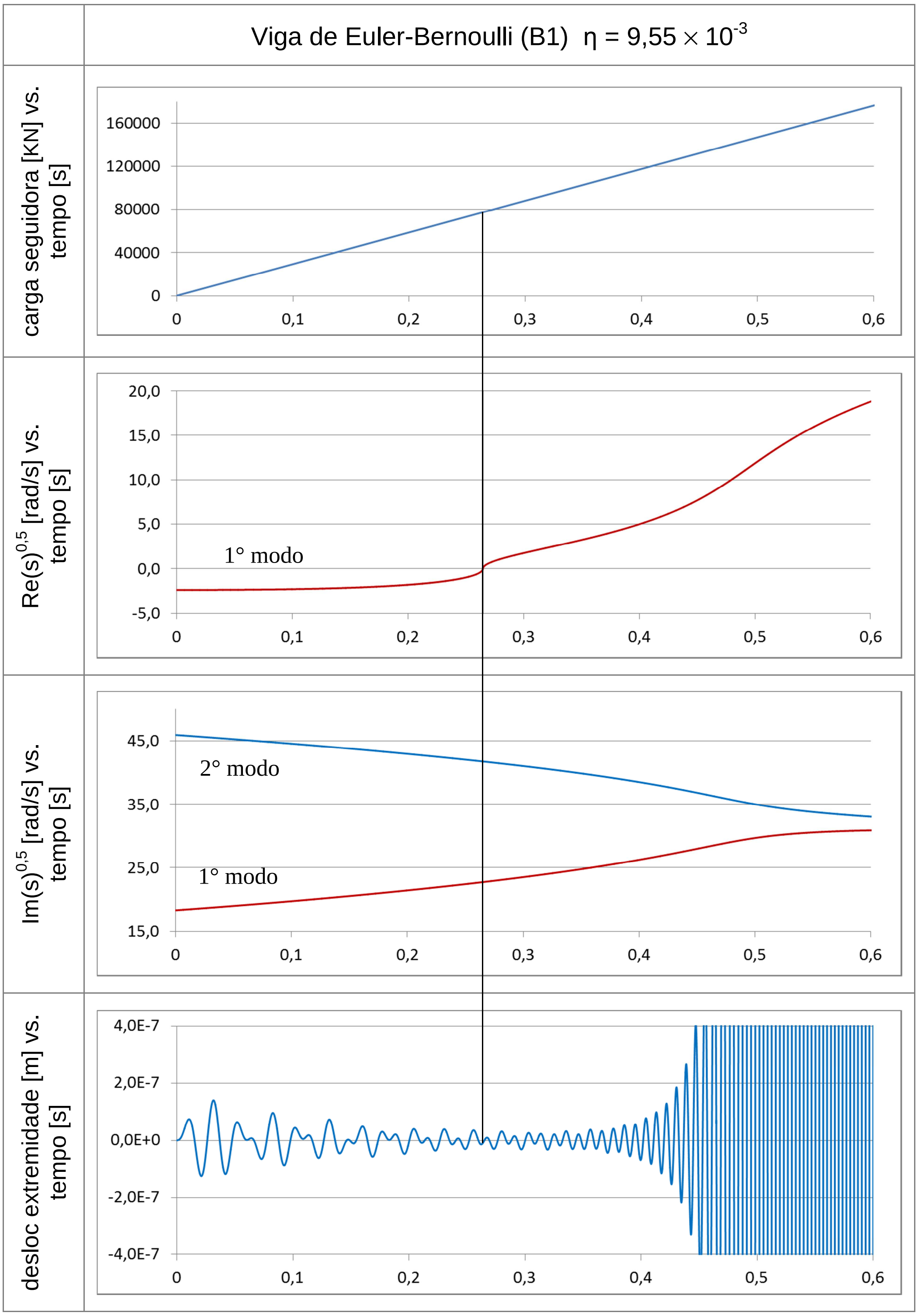


Figura 5.13 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para η = 9,55 × 10^{-3}, teoria de Euler-Bernoulli (B1).

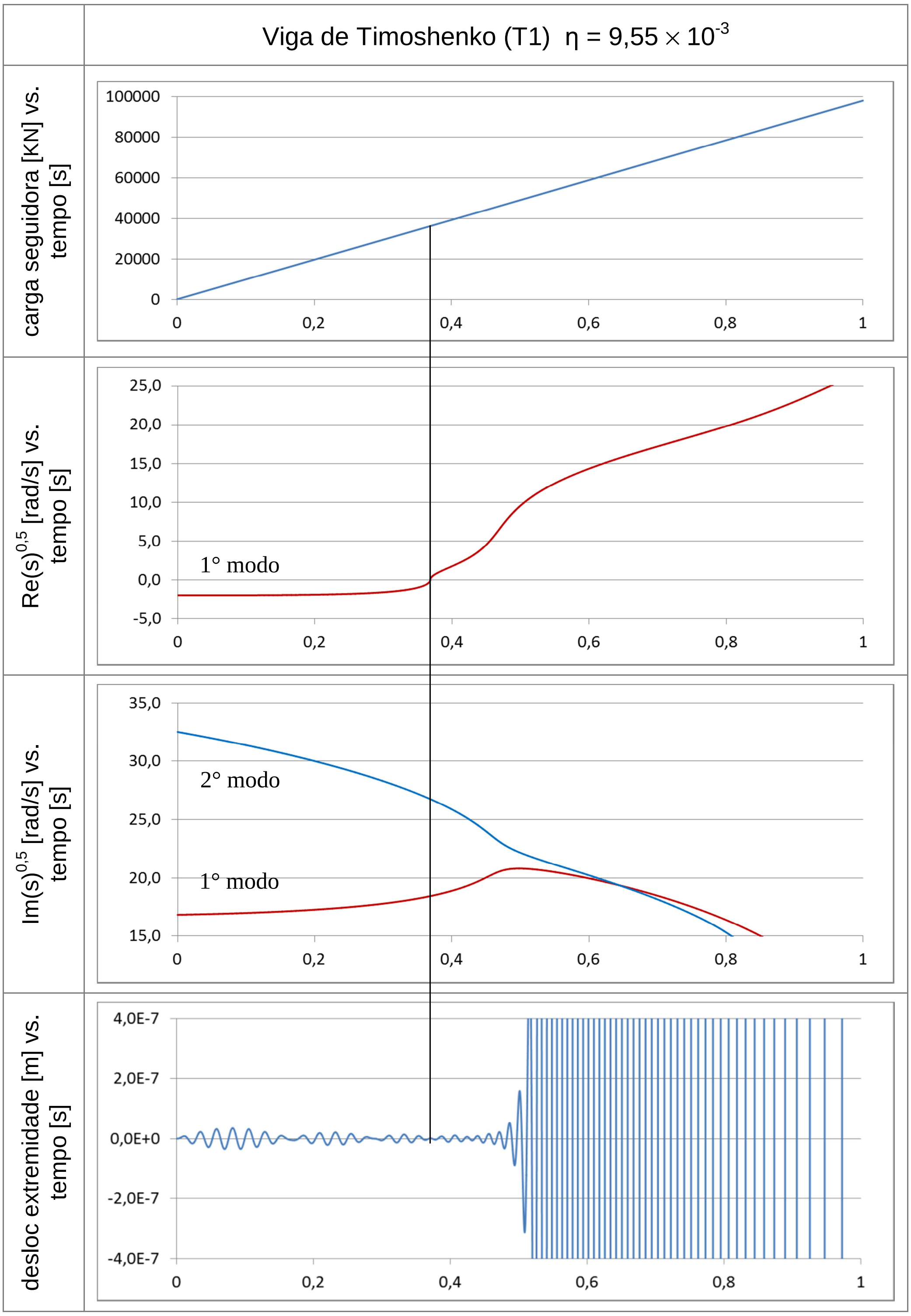


Figura 5.14 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para $\eta = 9{,}55 \times 10^{-3}$, teoria de Timoshenko (T1).

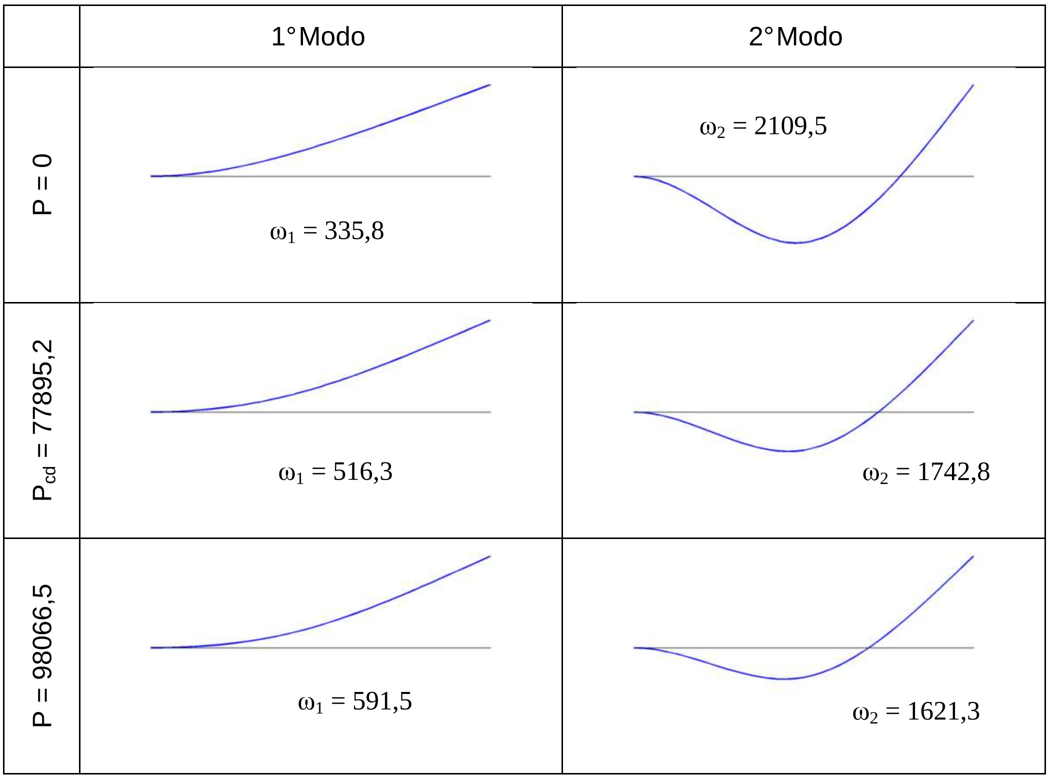


Figura 5.15 Modos de vibração com maior parte real de *s* para $\eta = 9{,}55 \times 10^{-3}$, teoria de Euler-Bernoulli (B1).

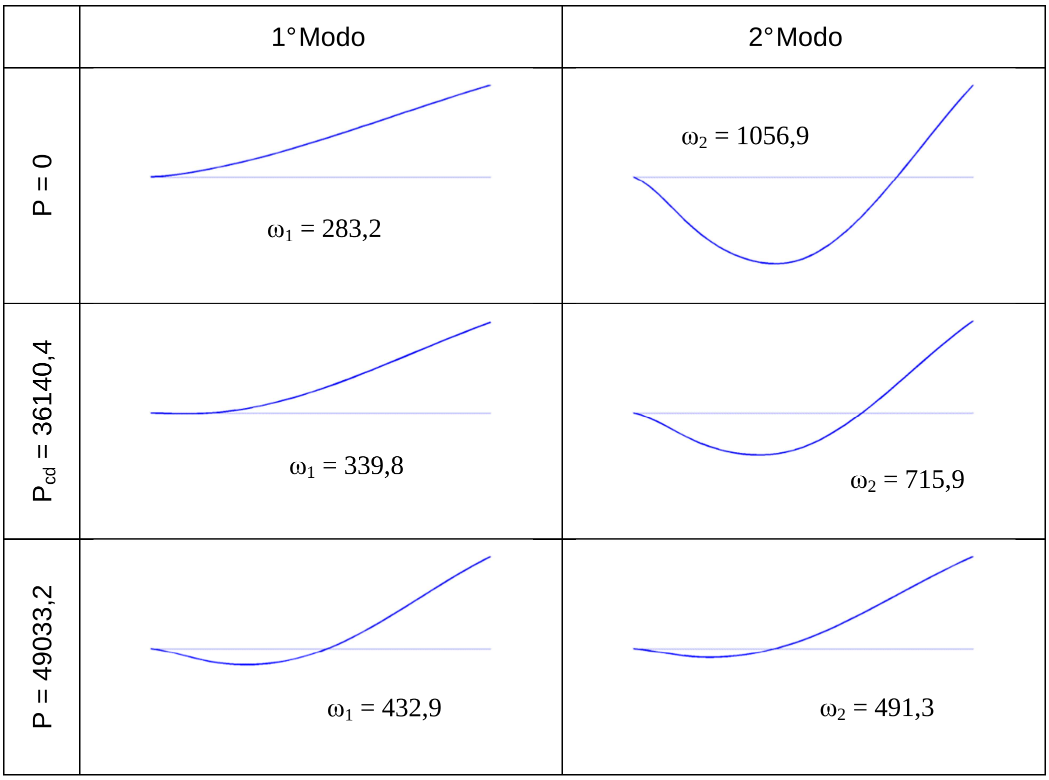


Figura 5.16 Modos de vibração com maior parte real de *s* para $\eta = 9{,}55 \times 10^{-3}$, teoria de Timoshenko (T1).

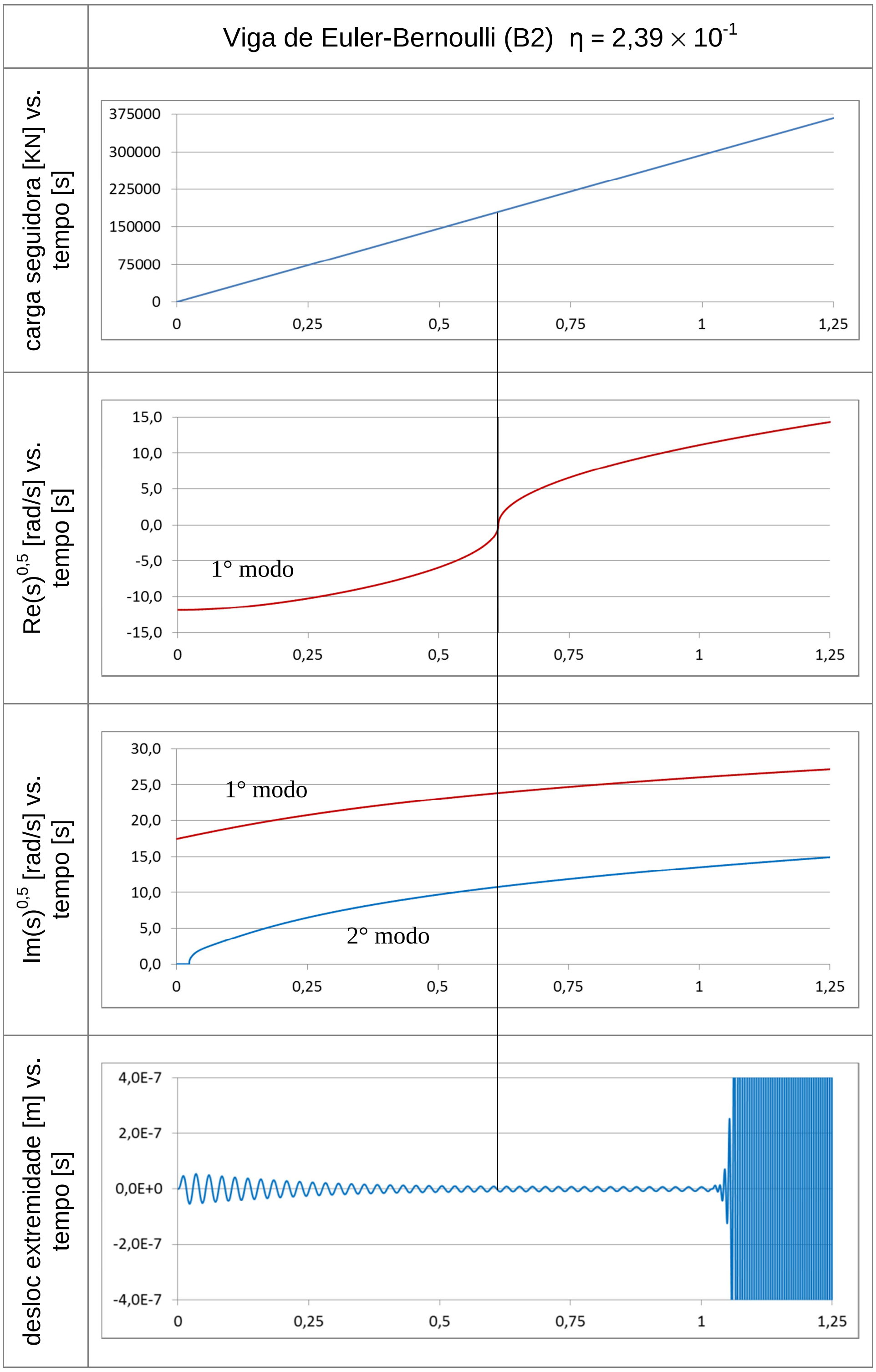


Figura 5.17 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para $\eta = 2{,}39 \times 10^{-1}$, teoria de Euler-Bernoulli (B2).

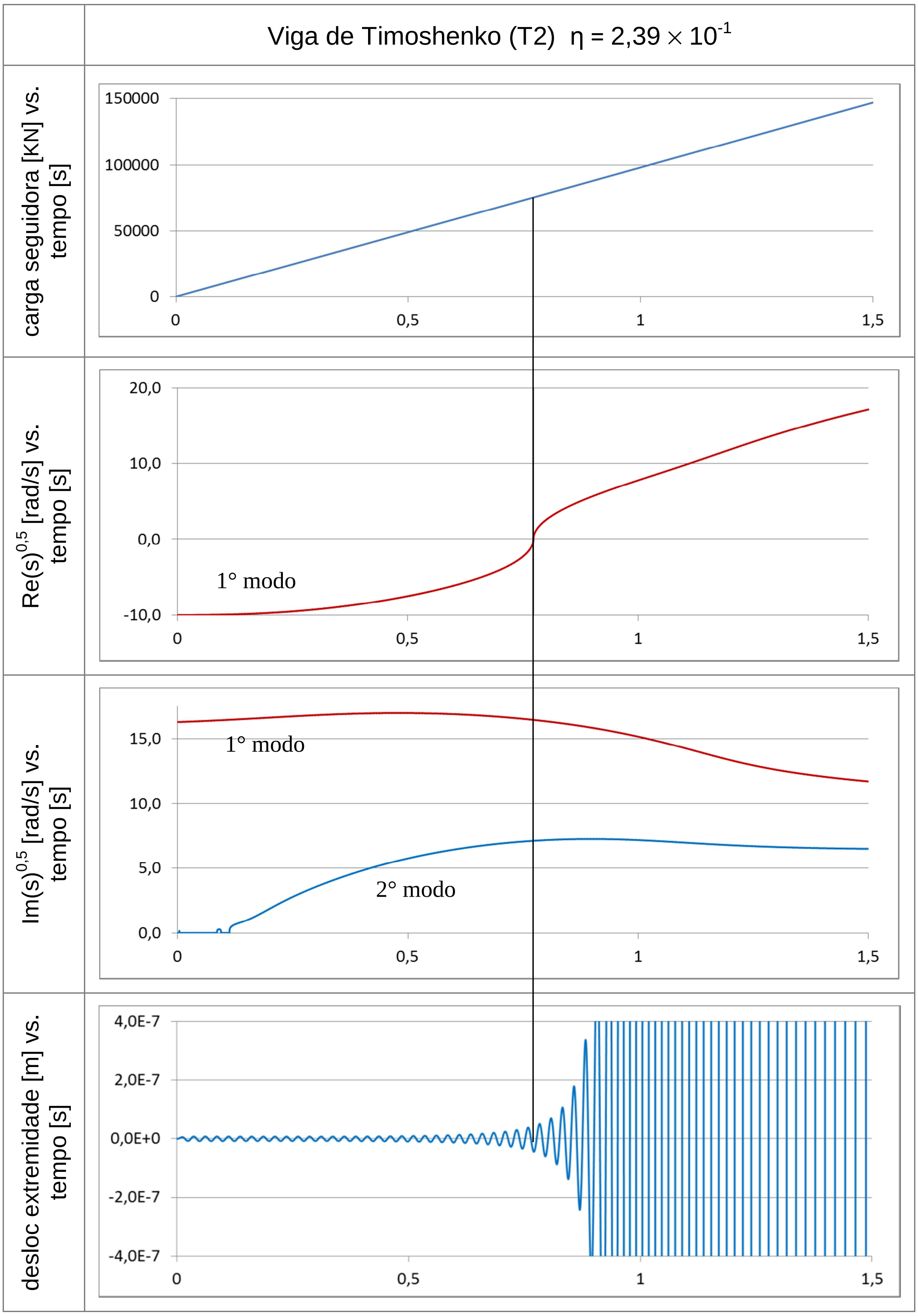


Figura 5.18 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para $\eta = 2{,}39 \times 10^{-1}$, teoria de Timoshenko (T2).

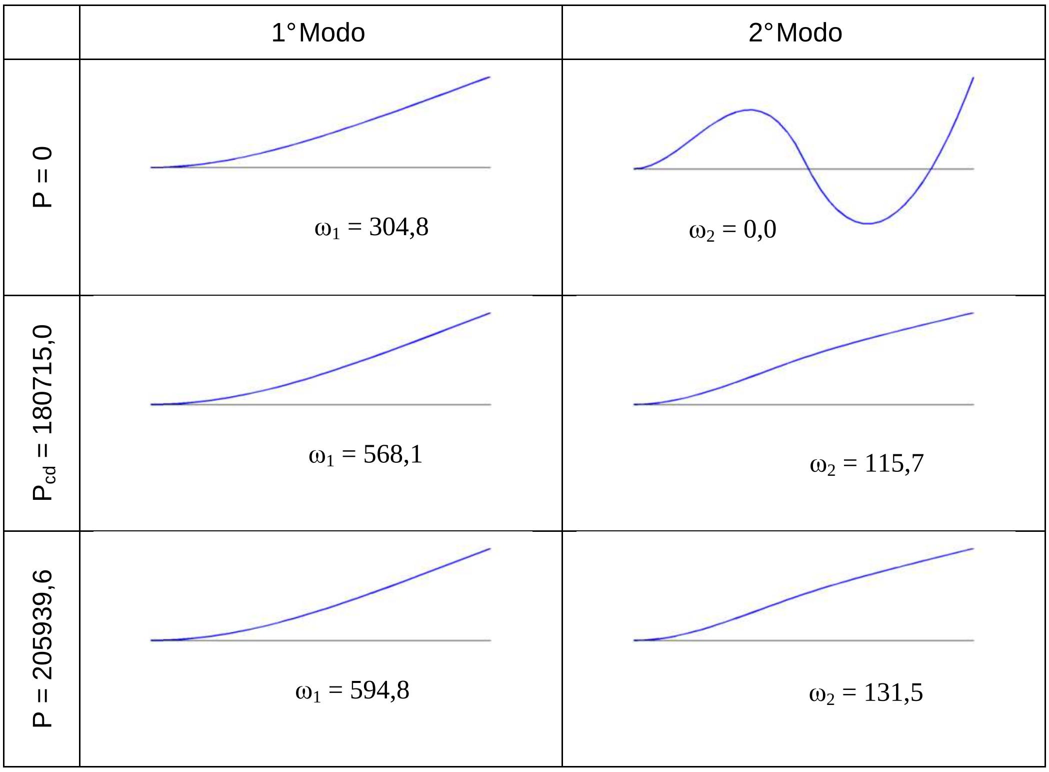


Figura 5.19 Modos de vibração com maior parte real de *s* para $\eta = 2{,}39 \times 10^{-1}$, teoria de Euler-Bernoulli (B2).

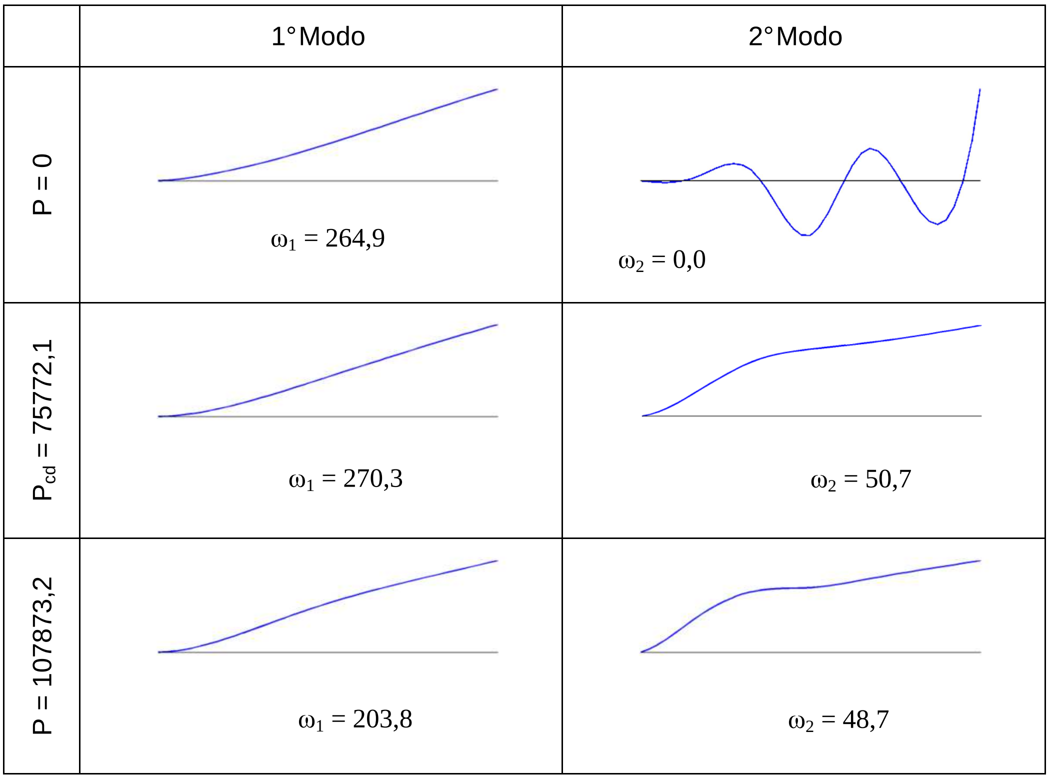


Figura 5.20 Modos de vibração com maior parte real de *s* para $\eta = 2{,}39 \times 10^{-1}$, teoria de Timoshenko (T2).

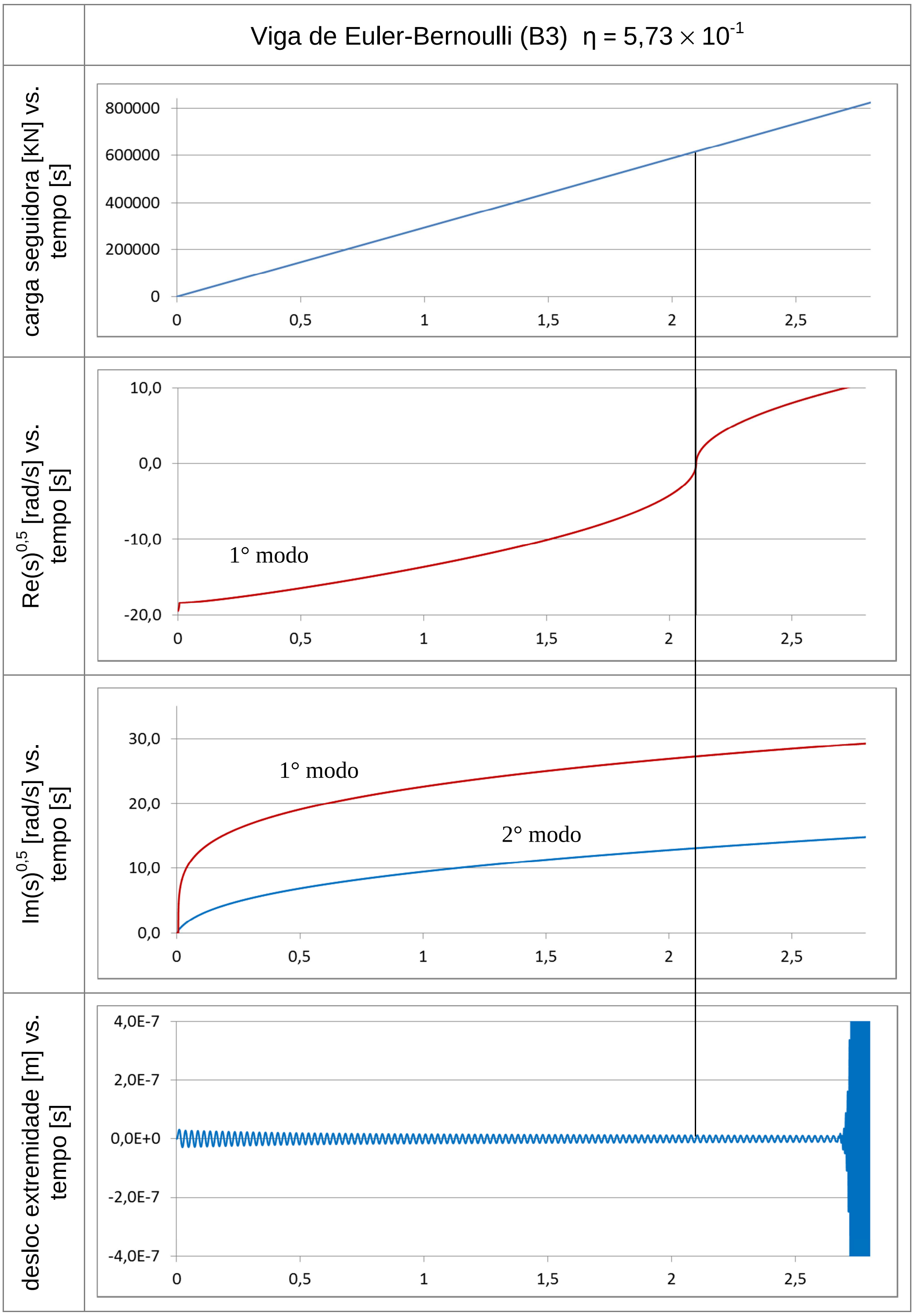


Figura 5.21 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para $\eta = 5{,}73 \times 10^{-1}$, teoria de Euler-Bernoulli (B3).

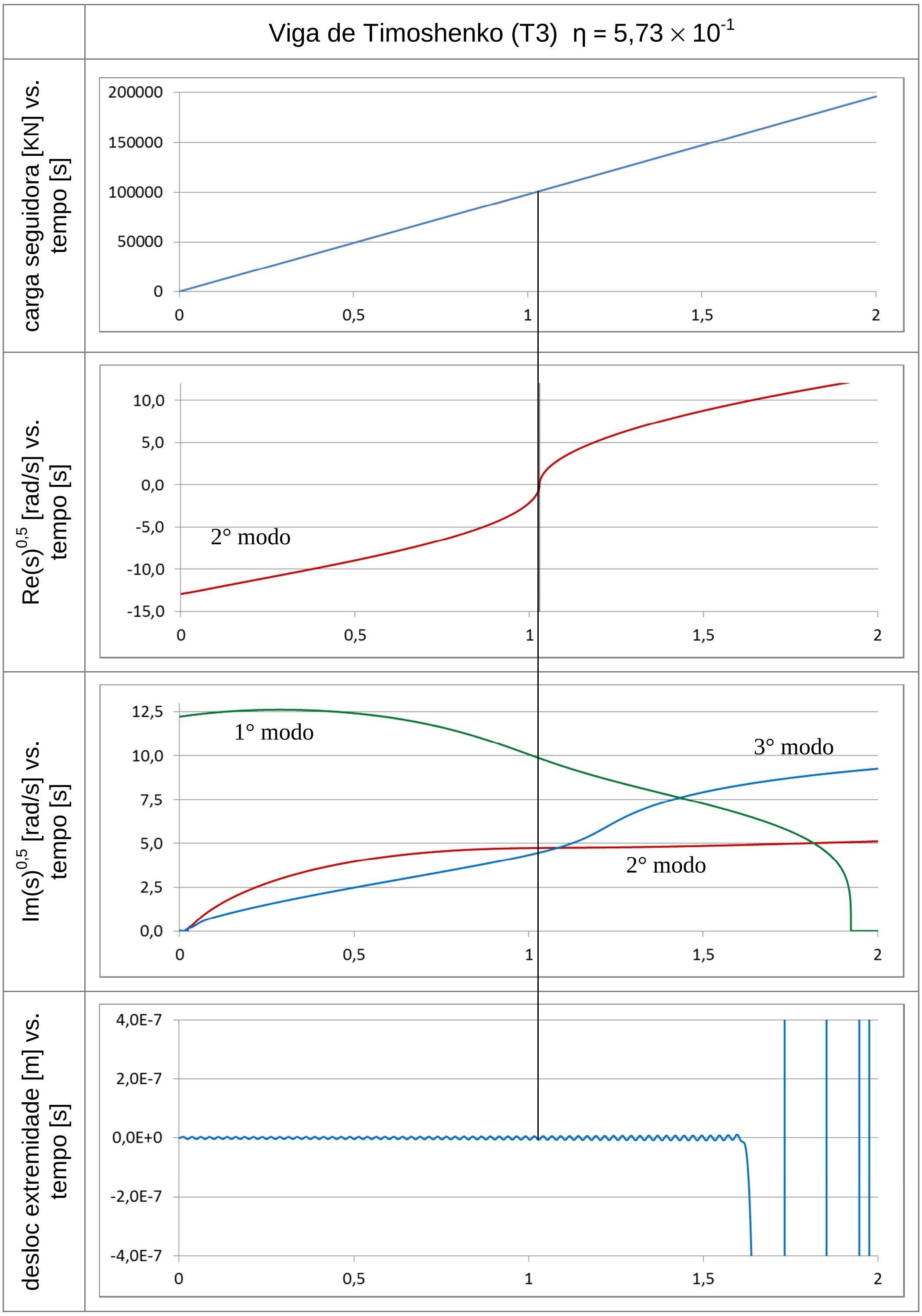


Figura 5.22 Força seguidora, número complexo *s* e deslocamento da extremidade para $\eta = 5{,}73 \times 10^{-1}$, teoria de Timoshenko (T3).

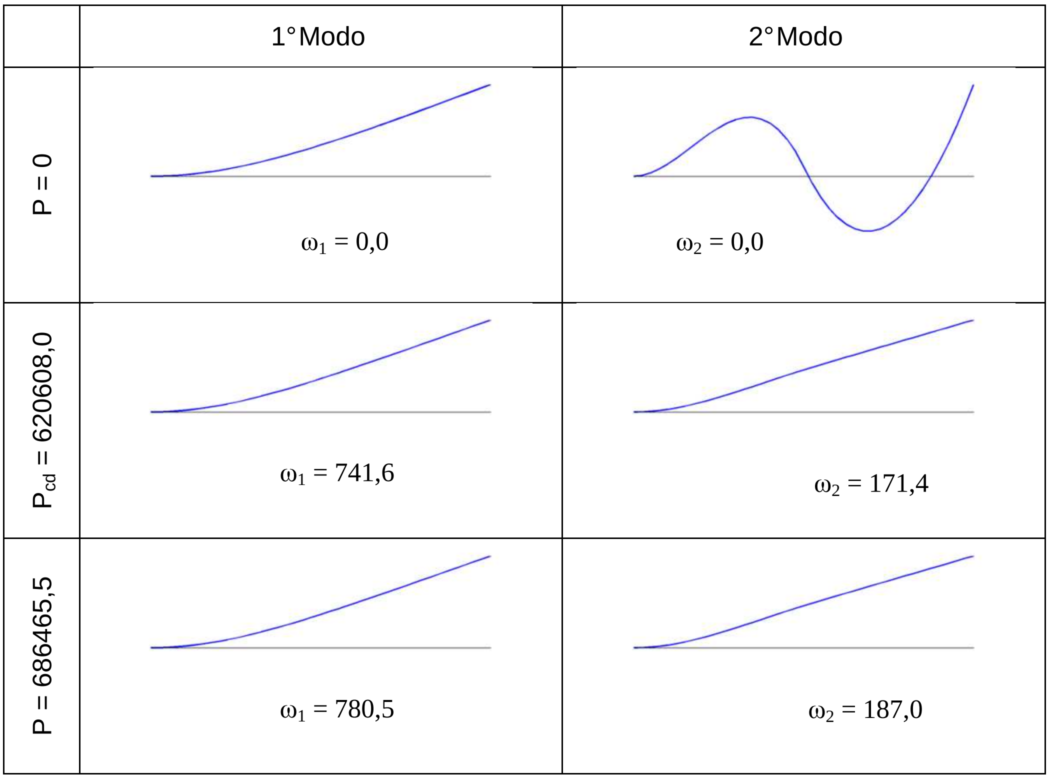


Figura 5.23 Modos de vibração com maior parte real de *s* para $\eta = 5{,}73 \times 10^{-1}$, teoria de Euler-Bernoulli (B3).

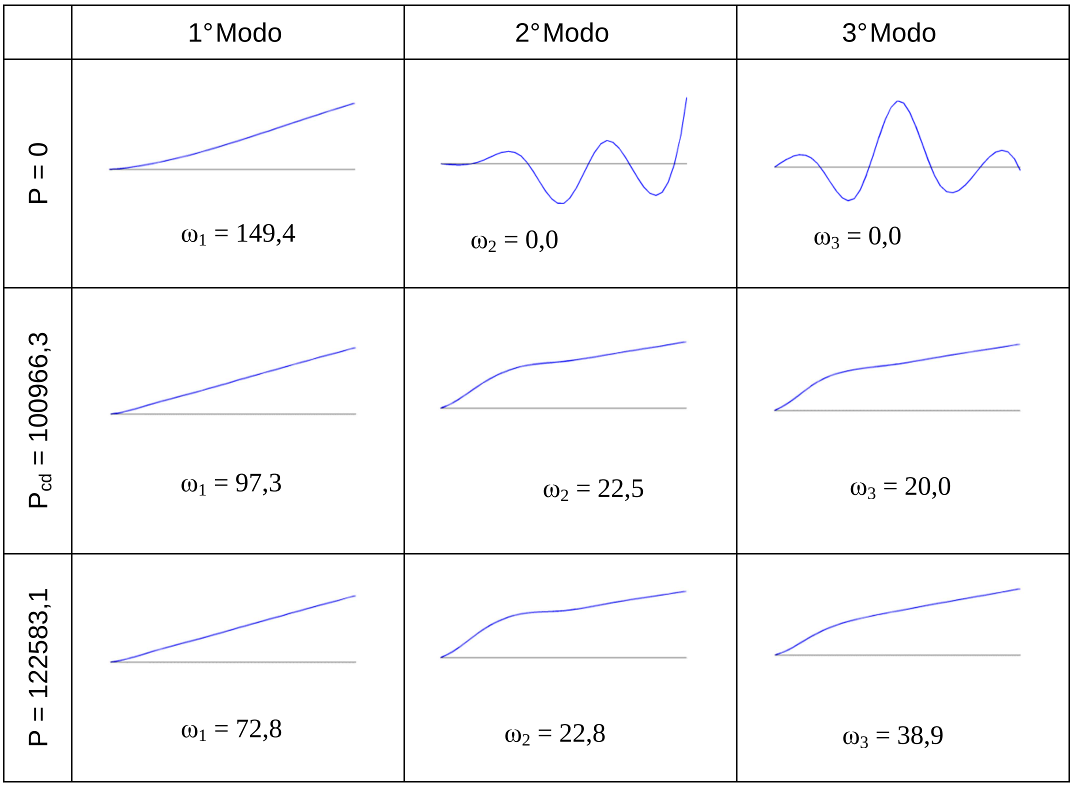


Figura 5.24 Modos de vibração com maior parte real de *s* para $\eta = 5{,}73 \times 10^{-1}$, teoria de Timoshenko (T3).

Nas vigas com amortecimento, Figura 5.13 à Figura 5.24, a carga crítica dinâmica não coincide mais com a união de duas frequências de vibração. Contudo, à medida que a carga seguidora aumenta, os dois primeiros modos tendem a apresentar uma configuração da deformada similar.

O início do aumento exponencial da amplitude do deslocamento, na maior parte destas análises, aparece um tempo depois da carga de “flutter” teórica. Nota-se que o incremento do valor positivo da parte real do número complexo s é menor do que nas análises sem amortecimento. Esta diferença poderia explicar em parte o retardo na amplificação dos deslocamentos.

Na Figura 5.13 e na Figura 5.14, a carga crítica dinâmica é menor que a carga crítica dinâmica calculada sem amortecimento. Neste caso as duas primeiras frequências de vibração ainda se encontram para valores de carga seguidora da mesma ordem de grandeza que as cargas críticas de vigas sem amortecimento, embora a carga de “flutter” apareça com antecedência.

Em todas as análises de viga com amortecimento que seguem a teoria de Euler-Bernoulli, a perda de estabilidade dinâmica ocorre pelo crescimento exponencial dos deslocamentos do primeiro modo de vibração.

Na viga de Timoshenko, para valores de amortecimento menores que o amortecimento que limita o crescimento da carga crítica dinâmica, Figura 5.7, a instabilidade dinâmica acontece no primeiro modo de vibração. Para valores maiores de amortecimento, a viga perde estabilidade vibrando no segundo modo, como pode ser visto na Figura 5.22, onde o primeiro valor positivo da parte real do número s aparece no segundo modo de vibração. Neste caso a Figura 5.24 mostra que quando a carga seguidora atinge a carga de “flutter” o terceiro modo de vibração tem frequência e forma modal que estão próximas daquelas do segundo modo.

5.2.2.
Viga com amortecimento viscoelástico

A viga com relação comprimento altura $L/h = 2$ do exemplo anterior é analisada com amortecimento viscoelástico. O modelo sólido padrão SLS da eq. (4.36) é adotado como material constitutivo, portanto o amortecimento viscoelástico é aplicado somente à parte desviadora das deformações.

Compara-se a estabilidade da viga com quatro diferentes arranjos de parâmetros viscoelásticos, Figura 5.25. Em todos os casos o módulo de cisalhamento de longo prazo e o módulo volumétrico correspondem aos valores das constantes elásticas utilizadas na seção 5.2.1, G_∞ = 1225,83 MPa e B = 5720,55 MPa. A carga crítica dinâmica é calculada em função da constante de amortecimento η_1, a Figura 5.26 apresenta os resultados obtidos com a eq. (4.44).

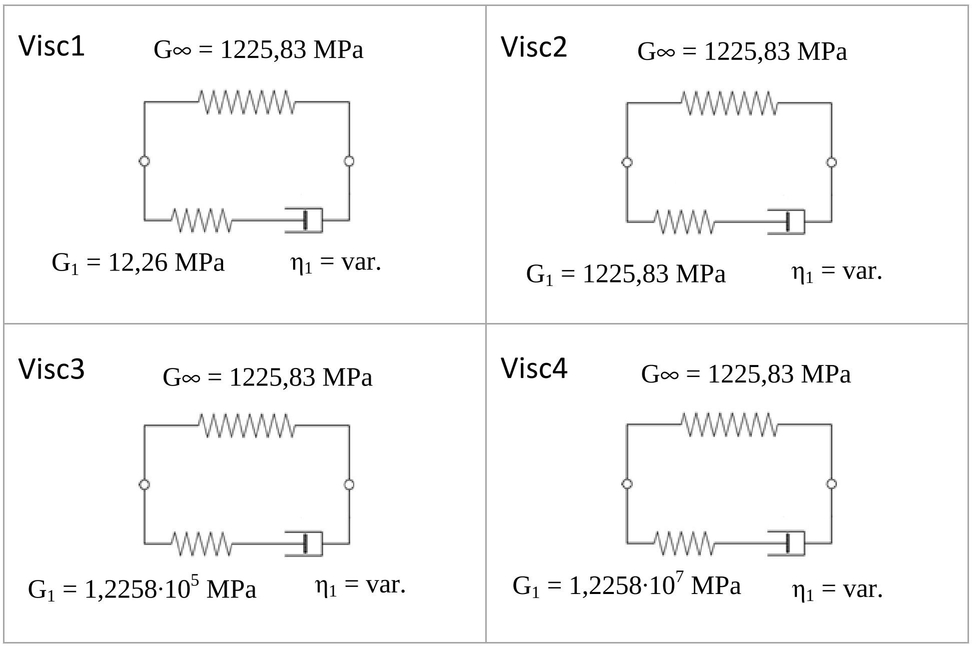


Figura 5.25 Parâmetros viscoelásticos para o modelo sólido padrão SLS.

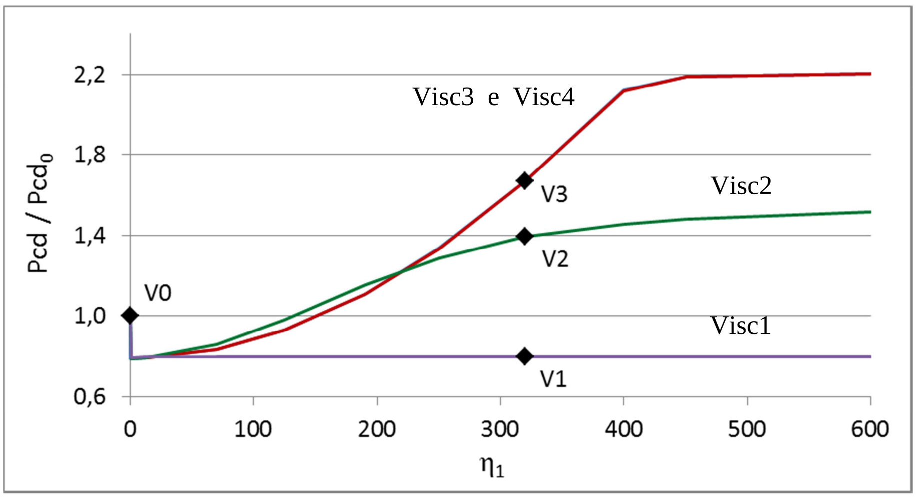


Figura 5.26 Carga crítica dinâmica da viga com amortecimento viscoelástico.

No modelo Visc1, a carga de “flutter” não depende do valor da constante η_1. Neste modelo a razão G_1 / G_∞ = 0,01, logo somente uma quantidade pequena de energia de deformação pode ser armazenada no arranjo em série G_1 - η_1. Portanto para qualquer valor da constante η_1 a energia que pode ser dissipada é muito pequena. Assim sendo, a carga crítica dinâmica para este modelo é a carga de “flutter” para valores pequenos de amortecimento (paradoxo de Ziegler), que é menor do que a carga calculada sem amortecimento.

Nos modelos Visc3 e Visc4 o comportamento da carga crítica é similar ao comportamento visto em vigas de Timoshenko com amortecimento proporcional à rigidez. A parcela de energia de deformação armazenada no arranjo em série é muito alta para estes dois modelos, dado que G_1 / G_∞ = 100 e 10000 para Visc3 e Visc4, respectivamente. Portanto a energia dissipada pode ser maior em função do parâmetro viscoelástico η_1. O modelo Visc2 tem um comportamento intermediário entre os dois casos discutidos acima.

Em seguida, analisa-se a resposta no tempo de três arranjos de parâmetros viscoelásticos (V1, V2 e V3) identificados na Figura 5.26. A Tabela 5.3 apresenta os valores dos parâmetros e as cargas críticas calculadas segundo a eq. (4.44). Nos três casos o módulo de longo prazo é igual a 1225,83 MPa e a constante viscosa igual a 3,1381 MPa s.

Tabela 5.3 Cargas críticas dinâmicas da viga viscoelástica.

Ponto	Parâmetros Viscoelásticos G_∞ MPa	G_1 MPa	η_1 MPa s	Carga crítica dinâmica KN
V0	1225,83	----	0,0	45707,8
V1	1225,83	12,26	3,1381	36473,9
V2	1225,83	1225,83	3,1381	63631,4
V3	1225,83	$1{,}2258 \cdot 10^5$	3,1381	76363,4

Como mencionado acima, o arranjo V1 corresponde a um valor muito baixo de amortecimento, assim apresenta a menor carga crítica dinâmica (paradoxo de Ziegler). O arranjo V2 tem maior amortecimento, portanto maior carga de “flutter”.

Para a análise da resposta no tempo uma carga seguidora monotonamente crescente e uma pequena carga transversal oscilatória se aplicam na extremidade livre da viga, a carga transversal tem amplitude F_0 = 4,90·10^{-5} KN e período T_0 = 2,5133·10^{-2} s. A variação da carga seguidora e as respostas no tempo para os três casos acima são mostradas na Figura 5.27 e na Figura 5.28.

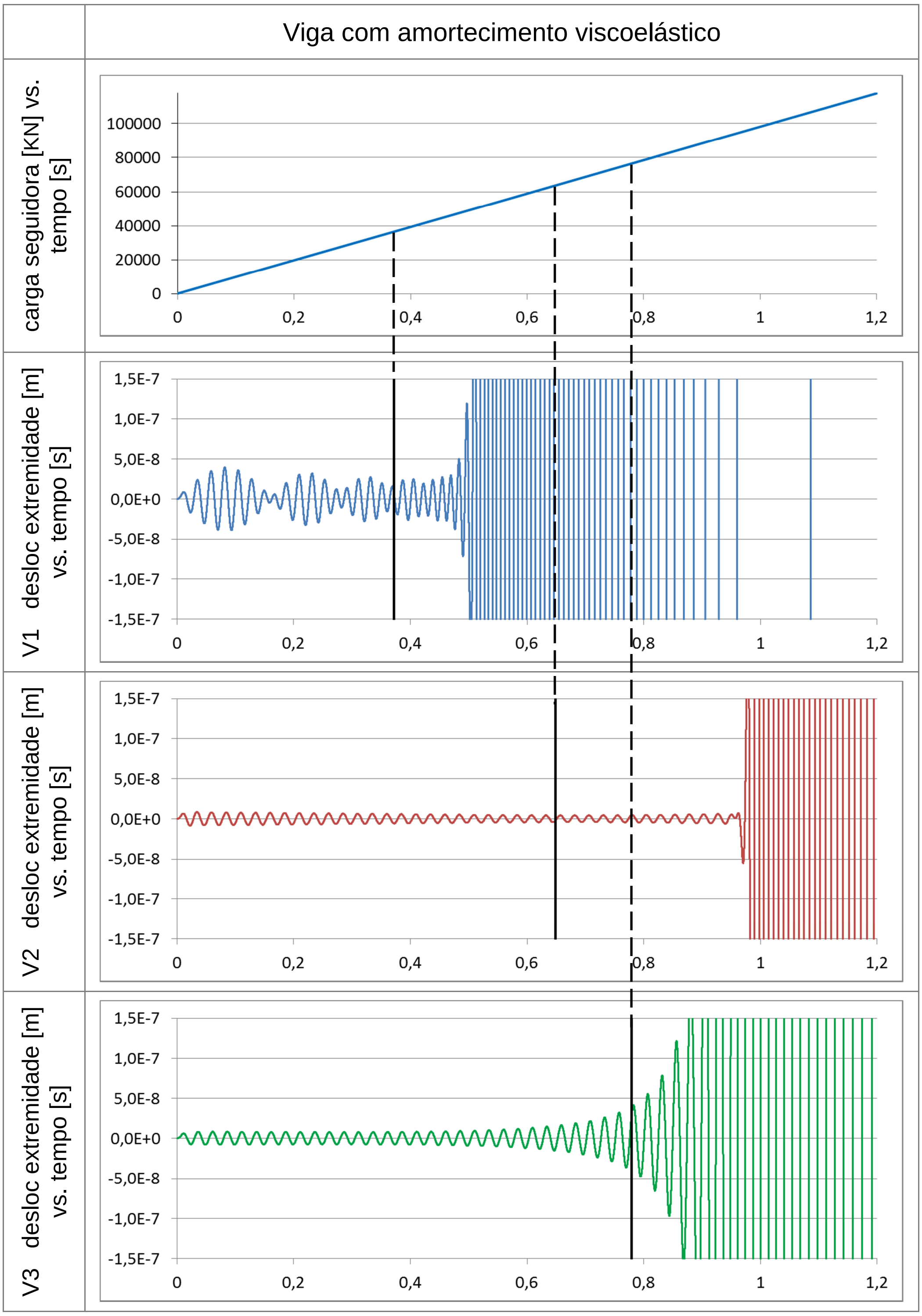


Figura 5.27 Resposta no tempo das análises V1, V2 e V3, escala de deslocamento [-1.5×10^{-7}, 1.5×10^{-7}] m.

Ambas as figuras apresentam os mesmos resultados, porém adotam-se diferentes escalas do eixo vertical no gráfico deslocamento em função do tempo. As linhas segmentadas indicam as cargas de “flutter” calculadas com a eq. (4.44).

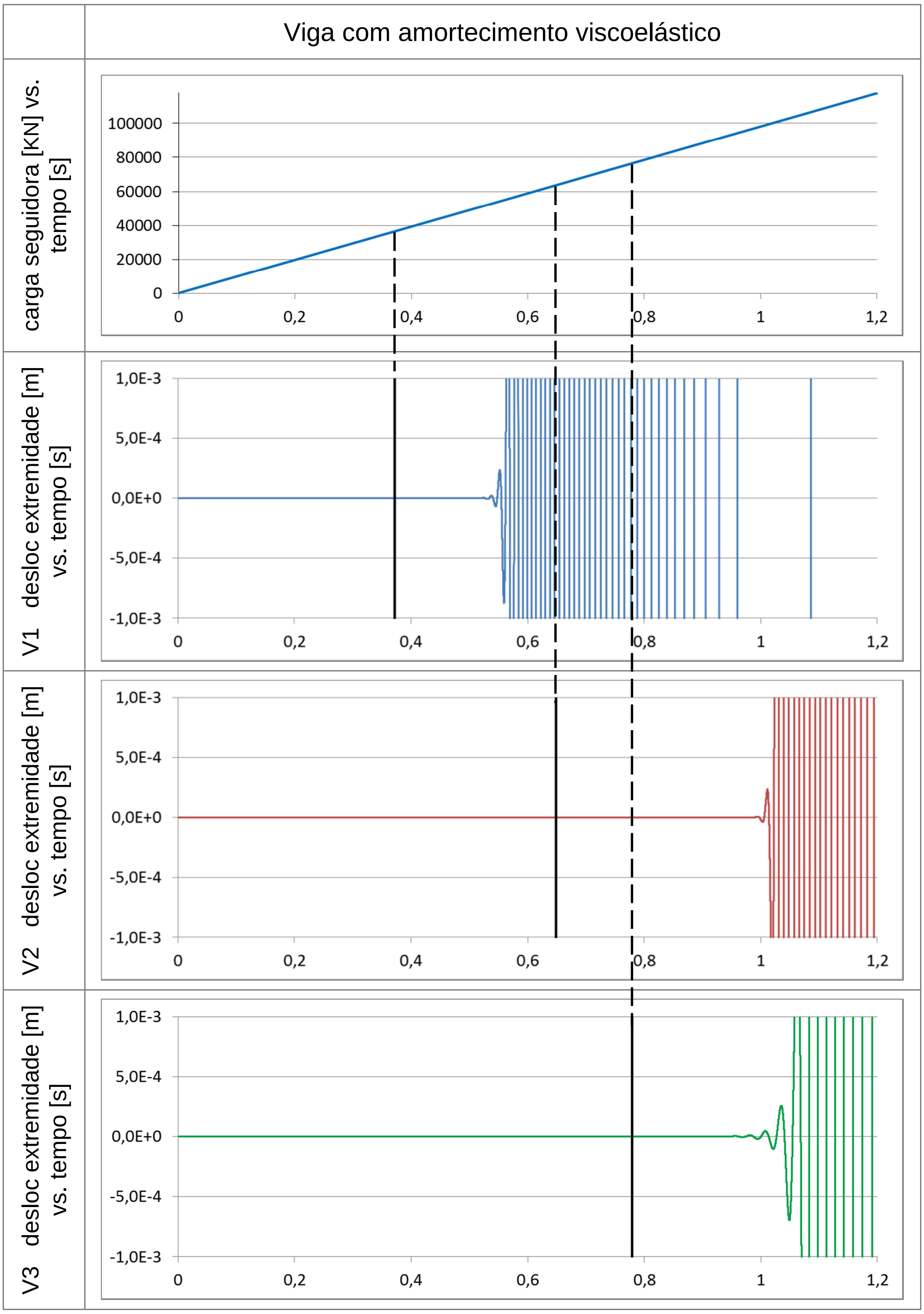


Figura 5.28 Resposta no tempo das análises V1, V2 e V3, escala de deslocamento [-1.0×10^{-3}, 1.0×10^{-3}] m.

Na Figura 5.27, com menor escala vertical do eixo de deslocamentos, pode-se observar o início do crescimento exponencial para os três modelos. No modelo com baixa quantidade de amortecimento V1 e no modelo V2 os incrementos de deslocamento aparecem depois da carga crítica analítica, porém no modelo V3 as amplitudes aumentam antes da carga crítica dinâmica calculada.

Observado os deslocamentos na Figura 5.28, que tem uma escala maior, pode-se ver como esperado, que nos dois modelos com menor amortecimento a taxa de crescimento do deslocamento é maior do que o modelo V3 que tem maior quantidade de amortecimento.

5.3.
Carga crítica de vigas de material viscoelástico

Estuda-se a resposta de uma viga de material viscoelástico com as seguintes características: viga em balanço de dois metros de comprimento, h = 0,25 m, b = 0,10 m, massa por comprimento $\overline{m}$ = 49,03 kg/m, módulo de elasticidade E = 3432,33 MPa, coeficiente de Poisson ν = 0,40, fator de correção de cortante k_s = 5/6 e com os parâmetros viscoelásticos da Figura 5.30 aplicados na deformação desviadora.

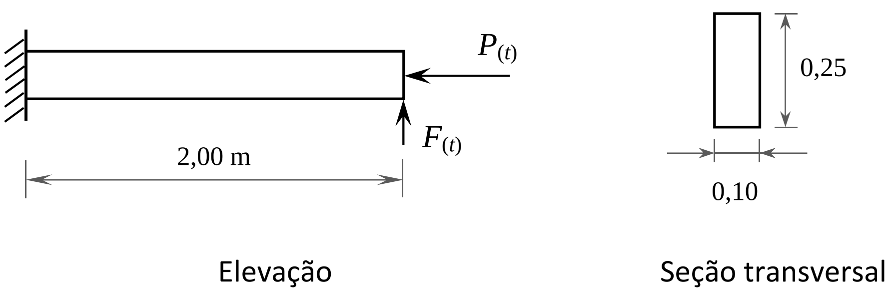


Figura 5.29 Tubo engastado-livre.

Duas combinações de carregamento são adotadas. Na primeira combinação a carga de compressão aplicada na extremidade livre é de origem conservativa, enquanto que na segunda, a carga é não conservativa atuando sempre tangencial ao eixo da viga. Ambas as cargas atuam concomitantes com uma pequena carga transversal de 0,1961 KN. na extremidade livre.

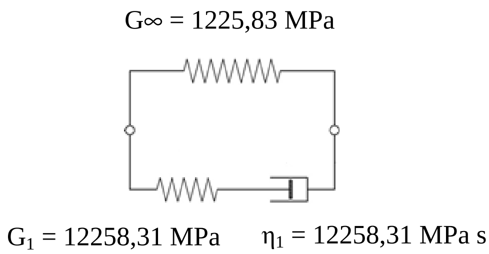


Figura 5.30 Parâmetros viscoelásticos aplicados à deformação desviadora.

Em ambos os casos a carga axial e a carga transversal são incrementadas linearmente até chegar ao seu valor explicitado em um tempo de dois segundos. Logo após elas permanecem constantes.

A Figura 5.31 mostra a resposta da viga quando somente a carga transversal está sendo aplicada. O deslocamento se estabiliza com um valor aproximado de 1,2 milímetros depois dos primeiros 50 segundos.

Para o modelo numérico, a carga crítica estática considerando o módulo de rigidez instantâneo é igual a 3030,26 KN. Para o módulo de rigidez de longo prazo, tem-se:

$$P_{cs} = 272{,}62 \ \text{KN} \tag{5.2}$$

Nas combinações com carga conservativa, adotam-se três valores para a carga de compressão: 245,17; 272,62 e 294,20 KN. Na Figura 5.32 apresentam-se os resultados dessas análises.

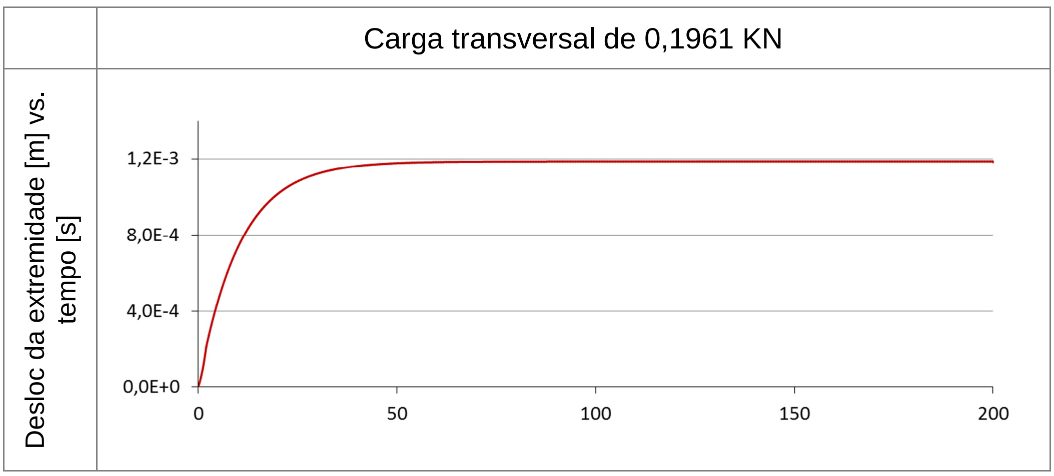


Figura 5.31 Resposta do carregamento transversal.

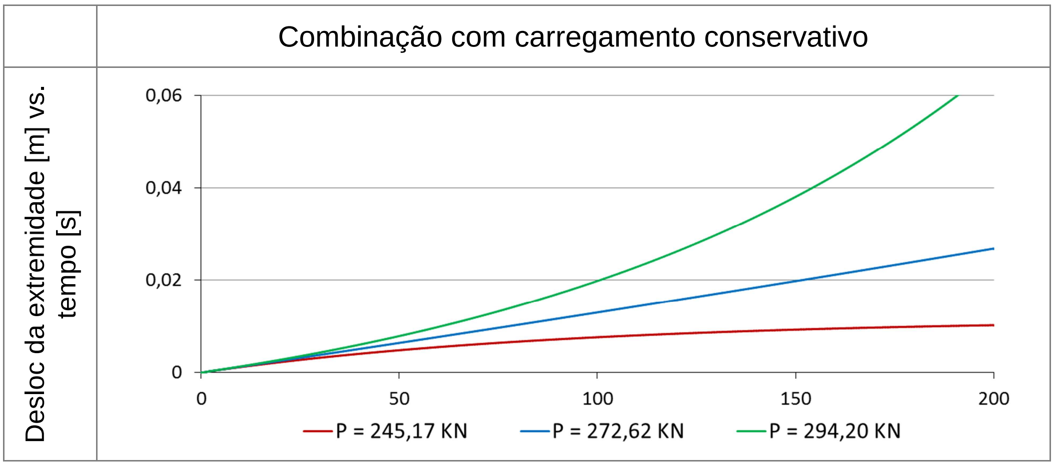


Figura 5.32 Resposta com carregamento conservativo.

Observa-se que os deslocamentos se incrementam monotonamente, para uma carga igual ou maior do que a carga crítica estática calculada com o módulo de rigidez de longo prazo.

No caso do carregamento não conservativo, a carga crítica dinâmica calculada com o módulo de rigidez de longo prazo é igual a 1962,31 KN. Usando a equação de autovalor característico obtido através da transformada de Laplace, tem-se:

$$P_{cd} = 11748{,}37 \ \text{tf} \tag{5.3}$$

As respostas para duas cargas seguidoras, de 2451,66 e de 12748,64 KN, são mostradas na Figura 5.33 e Figura 5.34, respectivamente.

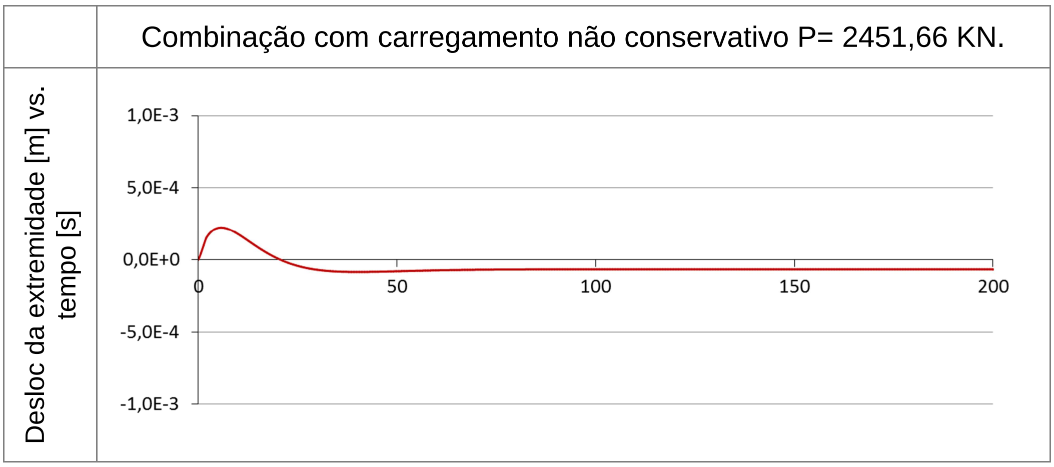


Figura 5.33 Resposta com carregamento não conservativo, P = 2451,66 KN.

Observa-se que com uma carga crítica maior do que a calculada com o módulo de longo prazo, a viga continua estável. Uma carga maior do que a calculada com a equação de autovalor característico desestabiliza a viga, porém os deslocamentos se incrementam a partir do tempo *t* = 100 s., embora a carga tenha sido aplicada em sua totalidade logo após os dois primeiros segundos.

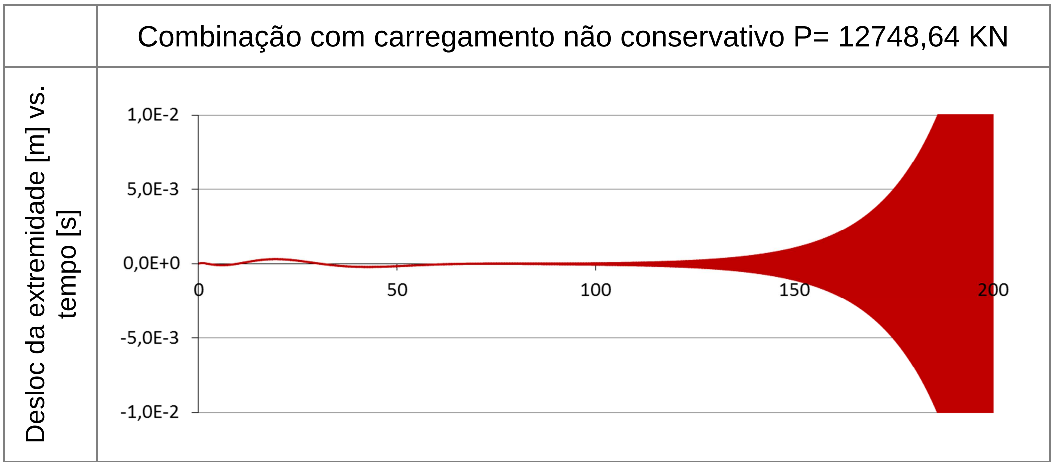


Figura 5.34 Resposta com carregamento não conservativo, P = 12748,64 KN.

Como era esperado nos modelos viscoelásticos exponenciais, a carga crítica calculada com o módulo de rigidez de longo prazo, torna-se uma carga limite somente no caso de perda de estabilidade por divergência. Uma vez que no caso de “flutter” a perda de estabilidade acontece através de oscilações com períodos de vibração que em geral são de curta duração. Assim, a viga responde com um módulo de rigidez maior do que aquele de longo prazo.

5.4. Tubo biengastado com carga transversal estática

Este exemplo visa mostrar o desempenho do elemento tridimensional incompatível quando comparado com outros elementos quadráticos ou com discretizações com maior número de elementos lineares. Permite também avaliar a implementação deste elemento finito nas rotinas do Matlab com ajuda das respostas obtidas com o programa estrutural Sap2000.

O tubo biengastado da Figura 5.35 é carregado transversalmente com uma carga pontual de 490,33 KN aplicada a um quarto do seu comprimento. Assume-se que o material é elástico e linear. As propriedades mecânicas são: módulo de elasticidade E = 196133 MPa e coeficiente de Poisson ν = 0,30. A resposta linear e não linear deste sistema é calculada usando diferentes elementos finitos, refinamentos de malha e ordem de integração.

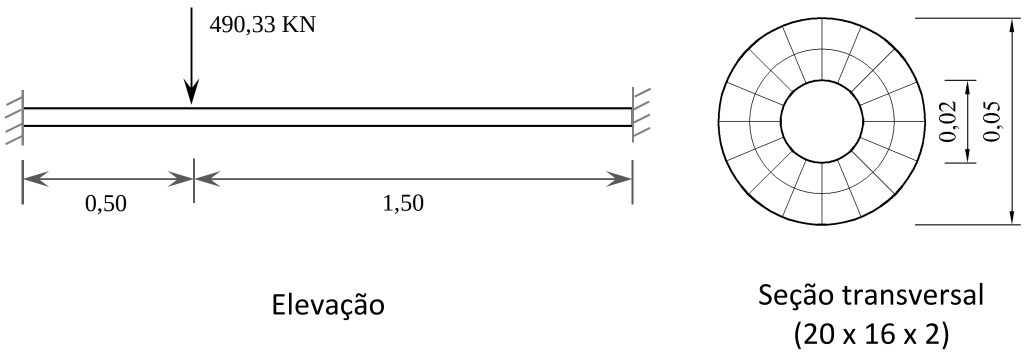


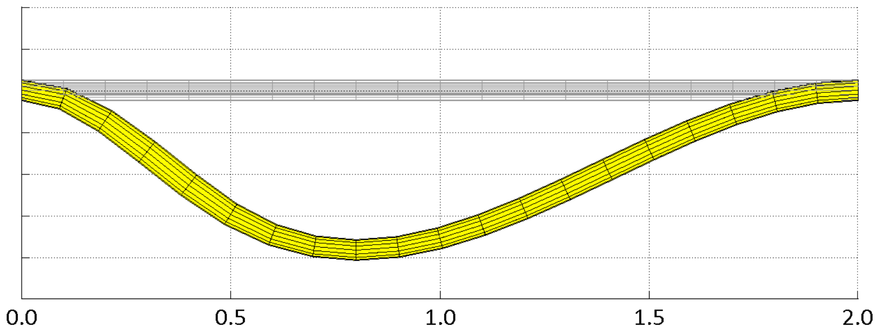
Figura 5.35 Tubo biengastado com carga transversal pontual.

Entre os elementos finitos usados nesta avaliação se tem o elemento finito tridimensional incompatível de oito nós, o elemento finito tridimensional linear de oito nós, o elemento finito tridimensional quadrático de 27 nós e o elemento finito do tipo “frame” do Sap2000.

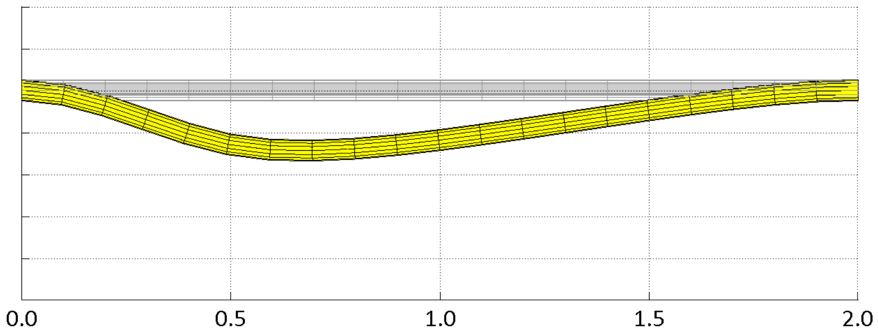
A malha utilizada nas análises tridimensionais está definida por um arranjo de três números que representam, respectivamente, o número de elementos no sentido longitudinal do tubo, o número de elementos ao longo da circunferência e ao longo do raio. Assim por exemplo, a resposta adotada como “benchmark” do problema é obtida de uma análise no Sap2000 com elementos incompatíveis e malha de 160 x 48 x 6 (160 elementos longitudinais, 48 circunferenciais e 6 radias).

A Figura 5.36 mostra a configuração deformada do tubo nas análises linear e não linear. A Tabela 5.4 e Tabela 5.5 apresentam o valor do deslocamento no ponto de aplicação da carga nas análises lineares e não lineares respectivamente, segundo o tipo de elemento finito, malha utilizada e ordem de integração. Os tempos nestas tabelas se referem ao tempo de cálculo em um processador Intel Core Duo, as análises no Sap2000 utilizam o modo “Standard Solver”.

Tanto nas análises lineares quanto nas análises não lineares observa-se a rápida convergência do elemento finito incompatível. A resposta tem maior grau de aproximação do que o elemento compatível quadrático, sendo que o tempo de processamento é muito menor devido ao tamanho das matrizes envolvidas no cálculo. Estas mesmas vantagens quanto à precisão e tempo se aplicam quando se utiliza na modelagem o elemento finito incompatível em lugar de um número maior de elementos mais simples como o elemento finito tridimensional linear.



(*a*)



(*b*)

Figura 5.36 Tubo biengastado deformado (a) análise linear (b) análise não linear.

Tabela 5.4 Deslocamento no ponto de aplicação da carga, análise linear.

Tipo de elemento finito	Nós por elemento	Malha	Ordem de integração	Tempo	Deslocamento [m]
Tridimensional Incompatível (Sap2000)	8	160 x 48 x 6	2	11 m 44 s	-0,1490
Tridimensional Incompatível (Sap2000)	8	20 x 16 x 2	2	12 s	-0,1486
Tridimensional Linear Compatível (Sap2000)	8	20 x 16 x 2	2	11 s	-0,0547
Tridimensional Incompatível	8	20 x 16 x 2	2	25 s	-0,1486
Tridimensional Incompatível	8	20 x 16 x 2	3	53 s	-0,1486
Tridimensional Linear Compatível	8	20 x 16 x 2	2	18 s	-0,0547
Tridimensional Linear Compatível	8	80 x 32 x 4	2	14 m 34 s	-0,1344
Tridimensional Quadrático Compatível	27	20 x 16 x 2	3	12 m 25 s	-0,1461
Unidimensional Tipo Frame (Sap2000)	2	20		8 s	-0,1498

Tabela 5.5 Deslocamento no ponto de aplicação da carga, análise não linear.

Tipo de elemento finito	Nós por elemento	Malha	Ordem de integração	Tempo	Deslocamento [m]
Tridimensional Incompatível (Sap2000)	8	160 x 48 x 6	2	44 h 11 m 44 s	-0,0653
Tridimensional Incompatível (Sap2000)	8	20 x 16 x 2	2	4 m 03 s	-0,0653
Tridimensional Linear Compatível (Sap2000)	8	20 x 16 x 2	2	2 m 16 s	-0,0435
Tridimensional Incompatível	8	20 x 16 x 2	2	7 m 37 s	-0,0645
Tridimensional Incompatível	8	20 x 16 x 2	3	16 m 30 s	-0,0644
Tridimensional Linear Compatível	8	20 x 16 x 2	2	3 m 09 s	-0,0433
Tridimensional Linear Compatível	8	80 x 32 x 4	2	13 h 14 m 13 s	-0,0631
Tridimensional Quadrático Compatível	27	20 x 16 x 2	3	18 h 40 m 33 s	-0,0642
Unidimensional Tipo Frame (Sap2000)	2	20		10 s	-0,0659

5.5. Carga crítica estática com elementos tridimensionais de oito nós

Calcula-se a carga crítica estática de um tubo engastado-livre discretizado com elementos finitos tridimensionais de oito nós. A geometria e a discretização transversal são mostradas na Figura 5.37. Determina-se a carga crítica em função da discretização longitudinal, comparando-se os resultados entre os elementos finitos compatíveis e incompatíveis. Considera-se material elástico com módulo de elasticidade E = 196133 MPa e coeficiente de Poisson ν = 0,30. A carga crítica analítica de Euler é igual a:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2\ 196133 \cdot 10^3 \cdot\ 2.84 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 2^2} = 34{,}36\ \text{KN} \qquad (5.4)$$

A Figura 5.38 mostra os resultados das análises. Como previsto, os elementos incompatíveis convergem com maior rapidez do que o elemento compatível, pois o campo de deslocamentos no elemento incompatível é quadrático enquanto que no elemento compatível o campo de deslocamentos é linear. É interessante notar que com 10 elementos longitudinais incompatíveis consegue-se uma melhor aproximação do que com 150 elementos longitudinais compatíveis.

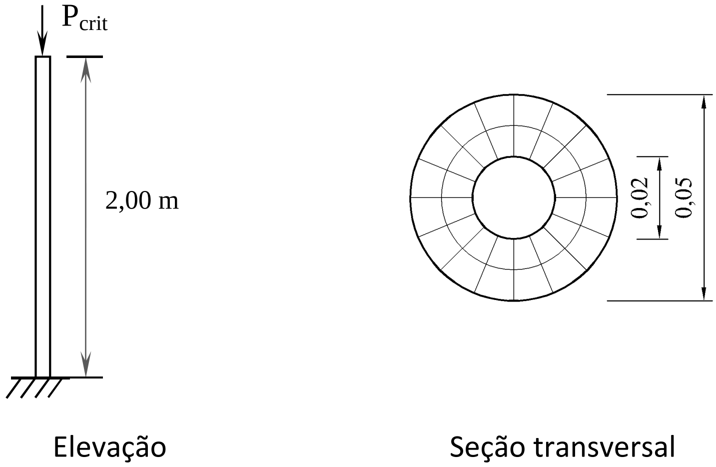


Figura 5.37 Tubo engastado-livre.

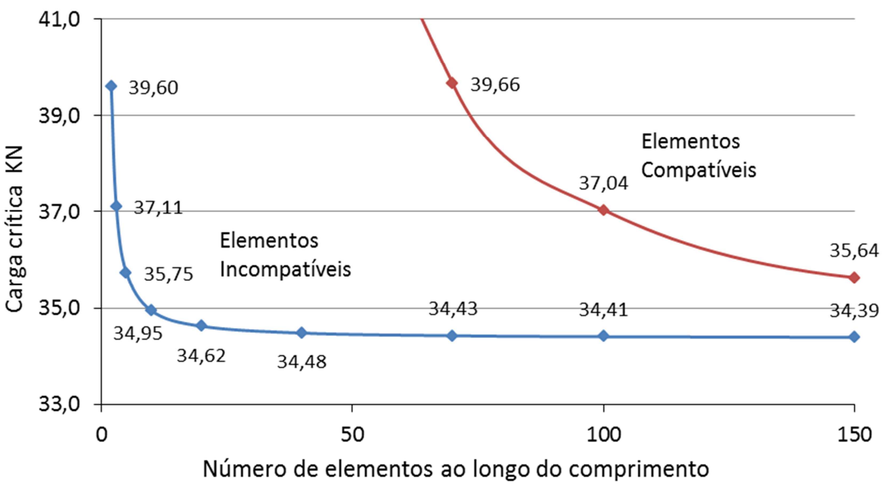


Figura 5.38 Carga crítica estática de tubo engastado-livre.

5.6. Tubo elástico não linear em balanço com carga seguidora

O tubo engastado-livre da Figura 5.39 tem dois metros de comprimento. Considera-se material elástico com módulo de elasticidade E = 196133 MPa, coeficiente de Poisson ν = 0,30 e massa específica ρ_m = 7698,22 kg/m^3. Aplicam-se duas cargas, uma carga seguidora perpendicular à superfície da extremidade livre e uma pequena carga transversal concomitante responsável pela perturbação da configuração de equilíbrio.

Os elementos finitos tridimensionais utilizados para a modelagem do tubo são elementos incompatíveis de oito nós que levam em conta a não linearidade geométrica na análise. A integração de Gauss adotada para este exemplo é de segunda ordem. No sentido longitudinal o tubo é discretizado em cinco elementos.

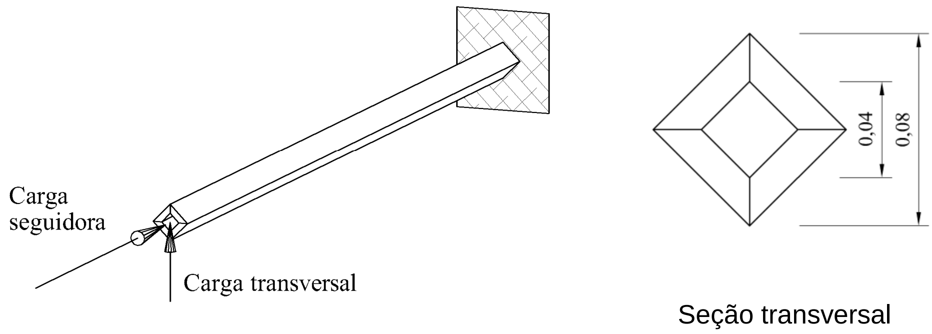


Figura 5.39 Tubo elástico em balanço com carregamento na extremidade livre.

A carga seguidora é monotonamente incrementada até 980,66 KN, a uma taxa de 13075,50 KN/s, e mantida constante a partir desse valor. A carga transversal tem amplitude máxima de 0,9807 KN e carácter oscilatório com período de 0,0185 segundos.

Os seis primeiros períodos do tubo em balanço são T = {0,0748; 0,0748; 0,0120; 0,0120; 0,0040; 0,0040}.

A Figura 5.40 mostra respectivamente, a variação da carga seguidora com o tempo, as duas primeiras frequências de vibração e o deslocamento vertical da extremidade livre. A carga crítica dinâmica determinada por esta análise numérica é igual a 909,76 KN.

A carga crítica dinâmica avaliada segundo a fórmula analítica do problema de Beck é igual a:

$$P_{cd} \cong 20.05 \frac{EI}{L^2} = 20.05 \frac{196133 \cdot 10^3 \cdot \ 8 \cdot 10^{-7}}{2^2} = 786{,}49 \ \text{KN} \qquad (5.5)$$

Os deslocamentos não se incrementam indefinidamente porque a análise no tempo leva em conta a não linearidade geométrica. Assim, com grandes deslocamentos tem-se uma mudança considerável de rigidez do sistema que interrompe o mecanismo de “flutter” pelo menos temporariamente.

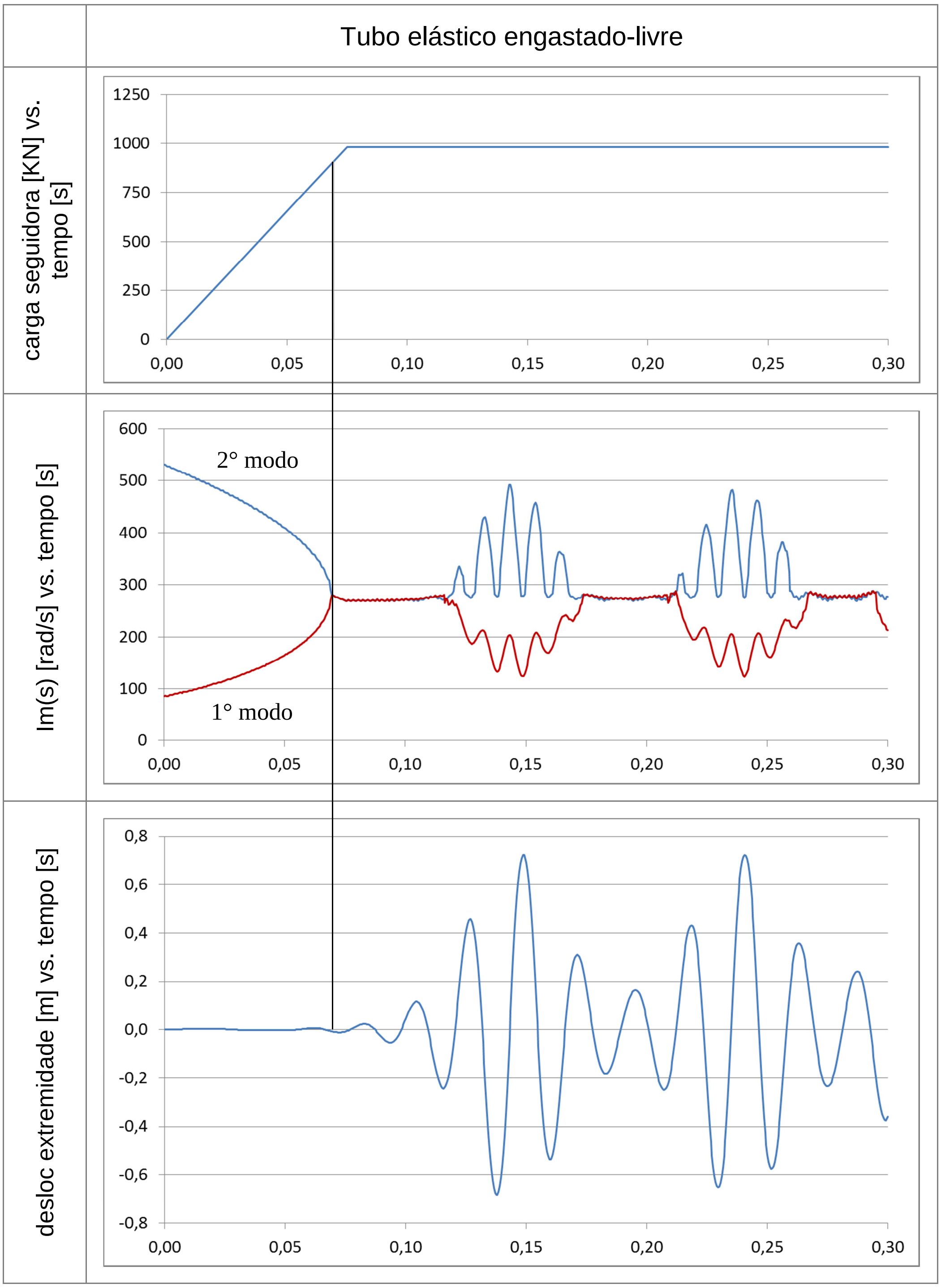


Figura 5.40 Força seguidora, frequência ω = Im(s) e deslocamento da extremidade do tubo elástico engastado-livre.

5.7. Tubo viscoelástico com carga seguidora

O tubo de dois metros de comprimento da Figura 5.41, é modelado com uma extremidade fixa e a outra livre. Na extremidade livre são aplicadas duas forças, uma força seguidora que permanece perpendicular à superficie, variando linearmente ao longo do tempo, e uma carga transversal harmônica de direção constante. A carga transversal tem amplitude $F_0 = 0{,}05$ KN e período $T_0 = 2{,}5133 \cdot 10^{-2}$ segundos, Figura 5.42.

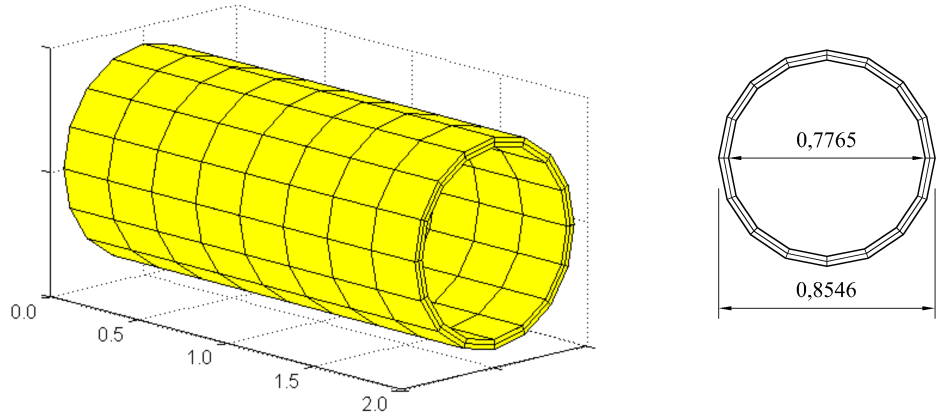


Figura 5.41 Tubo viscoelástico engastado-livre.

O material viscoelástico tem módulo volumétrico $B = 5720{,}55$ MPa, parâmetros viscoelásticos indicados na Figura 5.43 e massa específica $\rho_m = 1961{,}33$ kg/m^3.

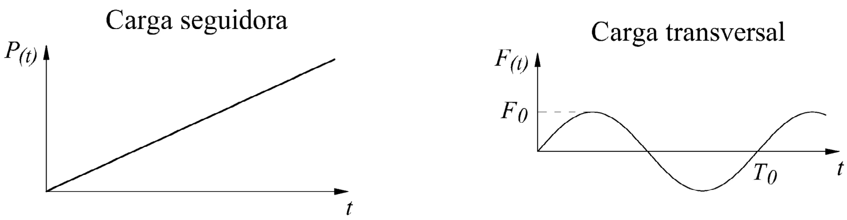


Figura 5.42 Carga seguidora e transversal em função do tempo.

Elementos incompatíveis de oito nós são utilizados na análise no dominio do tempo. O tubo está discretizado em 8 elementos no sentido longitudinal, 16 elementos ao longo da circunferencia e dois elementos ao longo do raio. Adota-se integração de Gauss de terceira ordem. A resposta no tempo é mostrada na Figura 5.44.

Pode-se observar que para uma carga seguidora $P \cong 29150$ KN os deslocamentos se incrementam rápidamente, tornando o sistema instável.

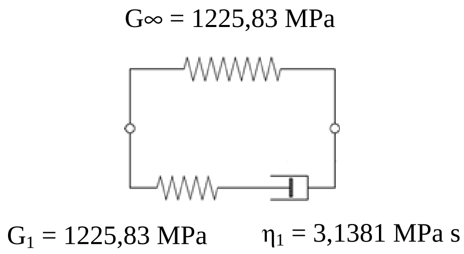


Figura 5.43 Parâmetros do material viscoelástico.

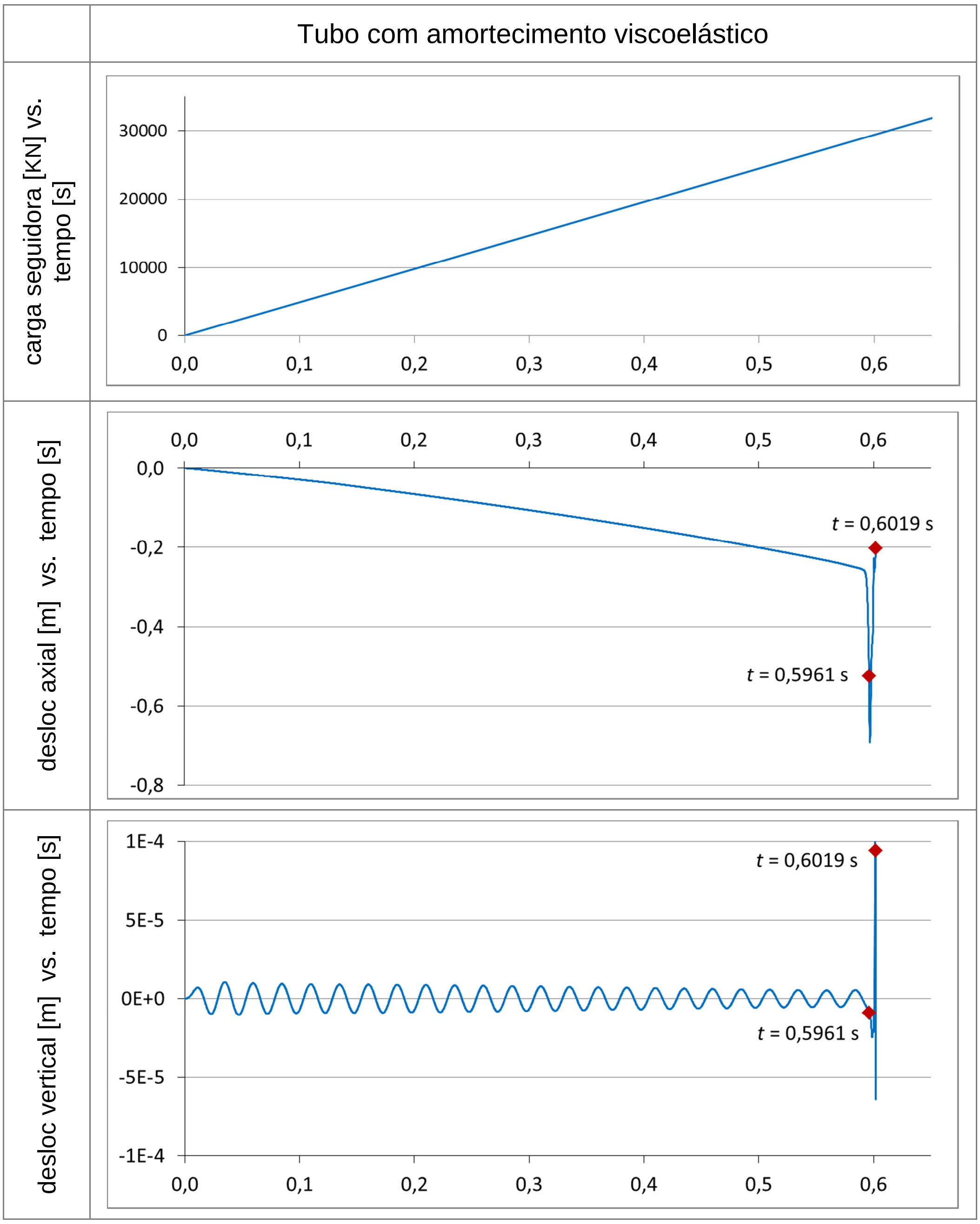
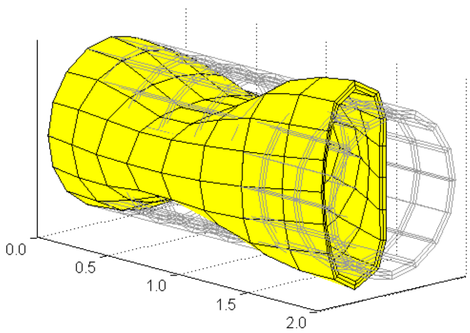
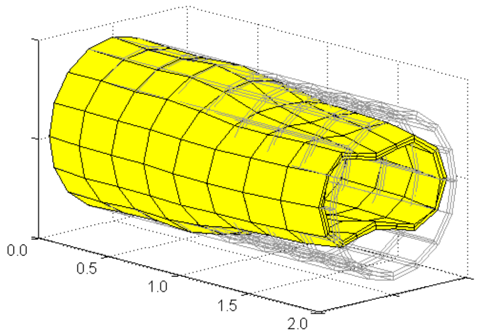


Figura 5.44 Resposta no tempo do tubo viscoelástico.

A Figura 5.45 mostra a deformação do tubo para os dois instantes de tempo indicados na Figura 5.44. Em ambos os casos a carga crítica é ultrapassada. Logo, pode-se ver uma mudança qualitativa no comportamento dos deslocamentos. Antes da carga crítica, a pequena perturbação transversal causa um movimento harmônico com o primeiro modo de vibração. Após a carga crítica, os deslocamentos mais significativos correspondem a uma vibração cuja configuração aproxima-se a modos de vibração mais altos.



(a)



(b)

Figura 5.45 Configuração deformada (a) em *t* = 0,5961 s (b) em *t* = 0,6019 s.

Como referência apresentam-se a carga crítica da coluna de Euler e a carga crítica dinâmica da coluna de Beck, adotando os parâmetros de longo prazo do material viscoelástico como propriedades do material linear elástico.

$$P_{cs} = \frac{\pi^2 E\, I}{4\, L^2} = \frac{\pi^2\; 3432{,}33 \cdot 10^3 \cdot 7.91 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 2^2} = 16747 \;\; \text{KN}$$

$$P_{cd} \cong 20.05 \frac{E\, I}{L^2} = 20.05 \frac{3432{,}33 \cdot 10^3 \cdot 7.91 \cdot 10^{-3}}{2^2} = 136088 \;\; \text{KN} \qquad (5.6)$$

A Figura 5.46 e a Figura 5.47 mostram, respectivamente, os quatro primeiros modos de vibração e quatro primeiros modos de flambagem calculados através de um problema de autovalor linear. A carga para as análises de flambagem é perpendicular à superficie da extremidade livre.

Da Figura 5.47 observa-se que a carga crítica estática para o material elástico corresponde a um modo de flambagem mais localizado, com uma configuração similar à Figura 5.45 (b) e à configuração do segundo modo de vibração.

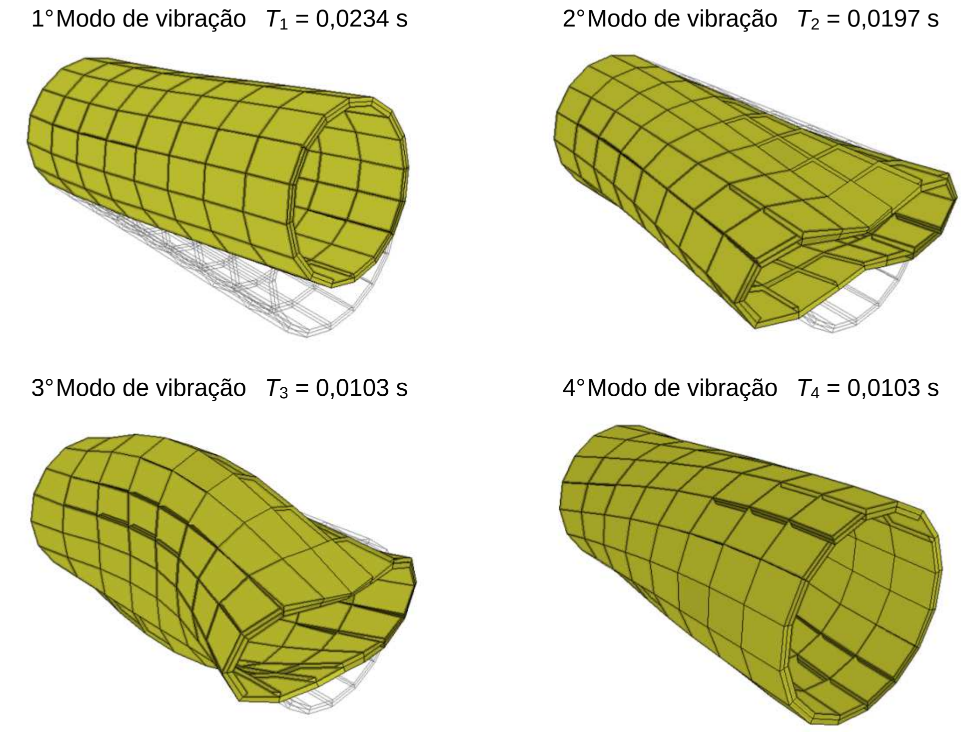


Figura 5.46 Modos de vibração com material elástico.

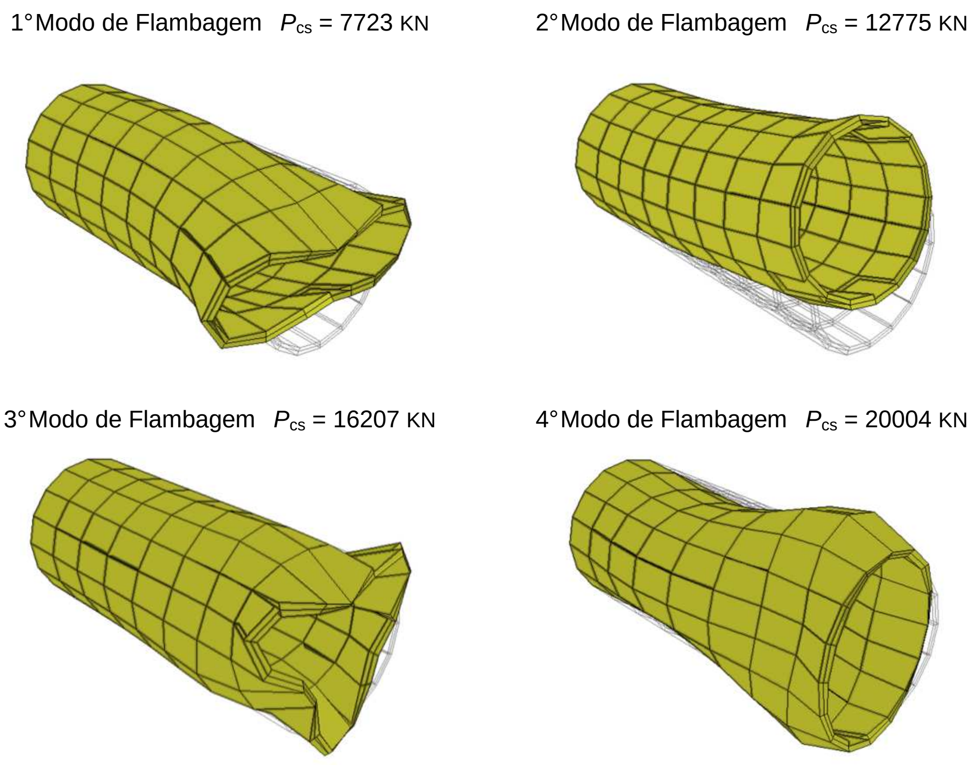


Figura 5.47 Modos de flambagem com material elástico (problema de autovalor linear).

Assim, para uma carga perpendicular à superficie da extremidade livre, o segundo modo de vibração tem menor rigidez do que o primeiro. Portanto para uma carga seguidora, aplicada também perpendicular à superficie da extremidade livre, a acarga crítica dinâmica para um material elástico ocorre no instante em que as frequências do segundo e terceiro modos de vibração se encontram.

Para o tubo viscoelástico analisado a carga crítica dinâmica é maior do que seria a carga crítica do material sem amortecimento, uma vez que os parâmetros viscoelásticos deste exemplo introduzem um amortecimento moderado. Porém, como foi evidenciado em exemplos anteriores, a carga crítica dinâmica não coincide com o encontro de duas frequências, mas o modo de vibração na carga crítica tem forte influência do modo de vibração mais próximo, o que explica a Figura 5.45.