

## 4

### Implementação do modelo viscoelástico

O algoritmo de integração para o modelo Maxwell generalizado apresentado por Simo e Hughes (1998) é aplicado nas análises de elementos finitos de vigas e tubos. Este algoritmo de segunda ordem é incondicionalmente estável.

#### 4.1.

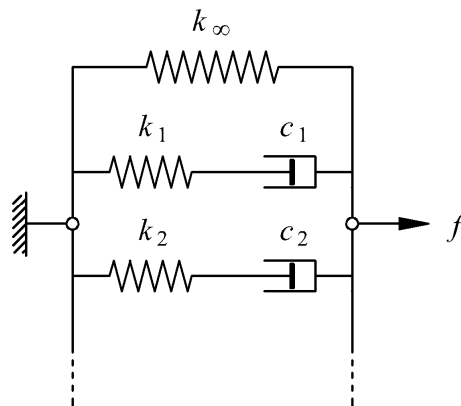
##### Modelo Maxwell generalizado

O modelo Maxwell generalizado ou modelo de relaxação generalizado da Figura 4.1 foi apresentado no capítulo 2. As equações constitutivas deste modelo são:

$$f = k_0 u - \sum_{i=1}^N k_i \alpha_i$$

$$\dot{\alpha}_i + \frac{\alpha_i}{\tau_i} = \frac{u}{\tau_i} \quad (4.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_{i(t)} = 0$$



**Figura 4.1 Modelo Maxwell generalizado.**

É interessante para o desenvolvimento do algoritmo de integração usar uma formulação alternativa para as equações acima. Substituindo as deformações  $\alpha_i$  nos amortecedores por variáveis internas  $q_i$ , que podem ser vistas como pseudo esforços nos amortecedores, tem-se:

$$q_i = k_i \alpha_i \quad (4.2)$$

Definindo, as variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{k_i}{k_0} \\ \gamma_\infty &= \frac{k_\infty}{k_0} \\ \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i &= 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

e a energia de deformação instantânea como:

$$W^0 = \frac{1}{2} u k_0 u \quad (4.4)$$

As equações constitutivas do material podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial W^0}{\partial u} - \sum_{i=1}^N q_i \\ \dot{q}_i + \frac{q_i}{\tau_i} &= \frac{\gamma_i}{\tau_i} \frac{\partial W^0}{\partial u} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} q_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

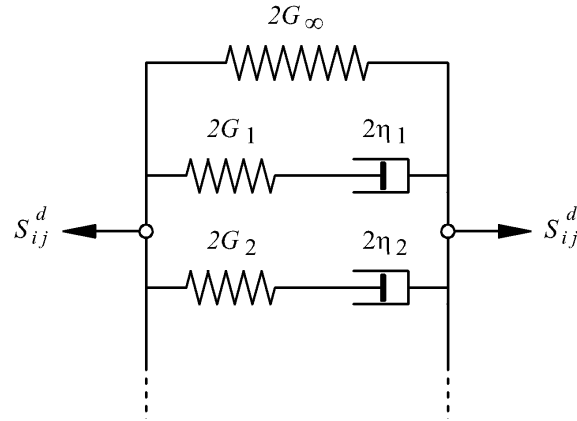
Esta formulação simplifica a aplicação do algoritmo em problemas com deformações finitas e pode ser usada com qualquer função de energia convexa.

## 4.2. Modelos Tridimensionais

Na modelagem de materiais viscoelásticos assume-se, em geral, que somente as deformações desviadoras apresentam um comportamento viscoelástico, enquanto as deformações volumétricas permanecem elásticas. Assim a energia de deformação instantânea pode ser escrita da seguinte forma:

$$W^0 = W_v^0 + W_d^0 \quad (4.6)$$

onde  $W_v^0$  e  $W_d^0$  são as componentes volumétrica e desviadora, respectivamente. Para definir a energia desviadora instantânea os parâmetros do modelo Maxwell generalizado para um grau de liberdade podem ser substituídos conforme mostra a Figura 4.2.



**Figura 4.2 Modelo Maxwell generalizado aplicado às deformações desviadoras.**

Logo:

$$W^0 = \frac{1}{2} \text{tr}({}_0\epsilon) B \text{tr}({}_0\epsilon) + \text{dev}({}_0\epsilon) G_0 \text{dev}({}_0\epsilon) \quad (4.7)$$

onde  ${}_0\epsilon$  é o tensor de deformações de Green-Lagrange,  $B$  é o módulo volumétrico e  $G_0$  é o módulo de cisalhamento inicial:

$$G_0 = G_{\infty} + \sum_{i=1}^N G_i \quad (4.8)$$

A parte desviadora do tensor de deformações é igual a:

$$\text{dev}({}_0\epsilon) = {}_0\epsilon - \frac{1}{3}({}_0\epsilon : \mathbf{1})\mathbf{1} \quad (4.9)$$

Definindo o tensor:

$$\bar{S}^0 = \frac{\partial W^0}{\partial {}_0\epsilon} = \frac{\partial W_v^0}{\partial {}_0\epsilon} + \frac{\partial W_d^0}{\partial {}_0\epsilon} = B \text{tr}({}_0\epsilon) \mathbf{1} + 2 G_0 \text{dev}({}_0\epsilon) \quad (4.10)$$

As equações constitutivas podem ser escritas em correspondência com o modelo para um grau de liberdade do parágrafo anterior:

$$\begin{aligned} {}_0S &= \bar{S}^0 - \sum_{i=1}^N q_i \\ \dot{q}_i + \frac{q_i}{\tau_i} &= \frac{\gamma_i}{\tau_i} \frac{\partial W_d^0}{\partial {}_0\epsilon} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} q_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  ${}_0S$  é o tensor de esforços de Piola-Kirchhoff II e

$$\begin{aligned}\tau_i &= \eta_i / G_i \\ \gamma_i &= G_i / G_0\end{aligned}\tag{4.12}$$

A solução de eq. (4.11)<sub>2</sub> é igual a:

$$q_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp[-(t - \tau')/\tau_i] \frac{\partial W_d^0}{\partial {}_0\epsilon} d\tau' \tag{4.13}$$

Substituindo este resultado na eq.(4.11)<sub>1</sub>:

$${}_0^t S = \frac{\partial W_v^0}{\partial {}_0\epsilon} + \int_{-\infty}^t g(t - \tau') \frac{d}{d\tau'} \left( \frac{\partial W_d^0}{\partial {}_0\epsilon} \right) d\tau' \tag{4.14}$$

ou

$${}_0^t S = B \operatorname{tr}({}_0\epsilon) \mathbf{1} + \int_{-\infty}^t g(t - \tau') \frac{d}{d\tau'} \left( \frac{\partial W_d^0}{\partial {}_0\epsilon} \right) d\tau' \tag{4.15}$$

com

$$g(t) = \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t/\tau_i) \tag{4.16}$$

### 4.3. Algoritmo de integração

No desenvolvimento do algoritmo de integração, Simo e Hughes (1998), definem-se as seguintes variáveis internas:

$$\hat{h}_i(t) = \int_{T_0}^t \exp\left(-\frac{t - \tau'}{\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} (\bar{S}_d^0) d\tau' \tag{4.17}$$

onde  $\bar{S}_d^0$  é a parte desviadora do tensor  $\bar{S}^0$ :

$$\bar{S}_d^0 = \frac{\partial W_d^0}{\partial {}_0\epsilon} = 2 G_0 \operatorname{dev}(\epsilon) \tag{4.18}$$

A seguir é obtida a fórmula recorrente para as variáveis internas que utiliza somente os dados da última solução incremental, sem necessidade da história completa ao longo do tempo. A variável interna no tempo  $t + \Delta t$  pode ser escrita como:

$${}^{t+\Delta t} \hat{h}_i(t) = \int_{T_0}^{t+\Delta t} \exp\left(-\frac{t + \Delta t - \tau'}{\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} (\bar{S}_d^0) d\tau' \tag{4.19}$$

A integral pode ser decomposta em dois intervalos de tempo:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{h}_i(t) = & \int_{T_0}^t \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) \exp\left(-\frac{t-\tau'}{\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} (\bar{S}_d^0) d\tau' \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \exp\left(-\frac{t+\Delta t-\tau'}{\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} (\bar{S}_d^0) d\tau' \end{aligned} \quad (4.20)$$

Assim:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{h}_i(t) = & \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) {}^t\hat{h}_i(t) \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \exp\left(-\frac{t+\Delta t-\tau'}{\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} (\bar{S}_d^0) d\tau' \end{aligned} \quad (4.21)$$

O segundo termo da equação acima é integrado pela regra do ponto médio:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \exp\left(-\frac{t+\Delta t-\tau'}{\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} (\bar{S}_d^0) d\tau' \\ & \cong \exp\left(-\frac{t+\Delta t-\tau'}{\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} (\bar{S}_d^0) \Big|_{\tau'=\frac{2t+\Delta t}{2}} \cdot \Delta t \\ & = \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right) \frac{d}{d\tau'} [\bar{S}_d^0(\frac{2t+\Delta t}{2})] \cdot \Delta t \\ & = \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right) ({}^{t+\Delta t}\bar{S}_d^0 - {}^t\bar{S}_d^0) \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde a parte desviadora do tensor  $\bar{S}^0$  no tempo  $t$  é igual a:

$${}^t\bar{S}_d^0 = 2 G_0 \text{dev}({}_0^t\epsilon) \quad (4.23)$$

Logo:

$${}^{t+\Delta t}\hat{h}_i(t) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) {}^t\hat{h}_i(t) + \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right) ({}^{t+\Delta t}\bar{S}_d^0 - {}^t\bar{S}_d^0) \quad (4.24)$$

Usando este resultado e as eq. (4.14) à (4.18), obtém-se o tensor de esforços de Piola-Kirchhoff II no tempo  $t+\Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}_0S = B \text{tr}({}^{t+\Delta t}_0\epsilon) \mathbf{1} + 2G_0 \gamma_\infty \text{dev}({}^{t+\Delta t}_0\epsilon) + \sum_{i=1}^N \gamma_i {}^{t+\Delta t}\hat{h}_i(t) \quad (4.25)$$

A função de energia utilizada na eq. (4.7) corresponde ao material de Saint-Venant (Wriggers, 2010), assim sendo, esta equação constitutiva é adequada para modelagem de grandes deslocamentos, grandes rotações, mas pequenas deformações.

#### 4.4.

##### Matriz constitutiva

A matriz constitutiva incremental consistente com o algoritmo de integração de esforços é obtida através da derivada do tensor de esforços  ${}^{t+\Delta t}_0 S$  com relação ao tensor de deformações:

$${}_0 \mathbf{C} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}_0 S}{\partial {}^{t+\Delta t}_0 \epsilon} \quad (4.26)$$

Uma vez que:

$$\frac{\partial}{\partial {}^{t+\Delta t}_0 \epsilon} [\text{dev}({}^{t+\Delta t}_0 \epsilon)] = \left( \mathbb{E} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (4.27)$$

onde  $\mathbb{E}$  é o tensor unitário de quarta ordem. A derivada das variáveis internas é igual a:

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \hat{h}_i(t)}{\partial {}^{t+\Delta t}_0 \epsilon} = 2 G_0 \exp\left(-\frac{\Delta t}{2 \tau_i}\right) \left( \mathbb{E} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (4.28)$$

Assim, da eq. (4.25) tem-se:

$$\begin{aligned} {}_0 \mathbf{C} &= B \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 G_0 g^* \left( \mathbb{E} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \\ g^* &= \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-\Delta t / 2 \tau_i) \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### 4.5.

##### Elemento de viga de Timoshenko

Aplica-se o algoritmo de integração de Simo e Hughes (1998) aos elementos de viga de Timoshenko. Duas alternativas para a aplicação da viscoelasticidade na viga são analisadas. A primeira considera o comportamento viscoelástico nas deformações desviadoras e a segunda nas deformações cisalhantes. Em ambos os casos considera-se somente o caso do modelo sólido padrão, ou seja, o modelo de relaxação generalizado com um elemento Maxwell.

##### 4.5.1.

##### Viscoelasticidade aplicada na deformação desviadora

Na viga que leva em conta a deformação cisalhante, viga de Timoshenko, o tensor de deformações é igual a:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{\gamma}{2} \\ 0 & -\nu \varepsilon_x & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & -\nu \varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Este tensor pode ser dividido nos tensores de deformações volumétricas e desviadoras:

$$\varepsilon = \varepsilon^v + \varepsilon^d \quad (4.31)$$

Assim, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{(1-2\nu)\varepsilon_x}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(1+\nu)}{3} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_x & 0 & \frac{3\gamma}{2(1+\nu)} \\ 0 & -\varepsilon_x & 0 \\ \frac{3\gamma}{2(1+\nu)} & 0 & -\varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

A energia de deformação instantânea que corresponde a estes tensores é igual a:

$$W_v^0 = \frac{B(1-2\nu)^2}{2} \varepsilon_x^2 \quad (4.33)$$

$$W_d^0 = \frac{4G_0(1+\nu)^2}{6} \varepsilon_x^2 + \frac{G_0}{2} \gamma^2$$

Considerando os campos de deformação utilizados na formulação do elemento finito, tem-se:

$$W_v^0 = \frac{B(1-2\nu)^2}{2} w^2 \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 \quad (4.34)$$

$$W_d^0 = \frac{4G_0(1+\nu)^2}{6} w^2 \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 + \frac{G_0}{2} \left( \frac{dw}{dx} - \beta \right)^2$$

Substituindo as equações anteriores na eq. (4.14), aplicando o princípio dos trabalhos virtuais e a interpolação do campo de deformações do elemento finito, encontra-se:

$${}^tF = K_v {}^tU + \int_{-\infty}^t (\gamma_{\infty} + \gamma_1 e^{-(t-\tau')/\tau_1}) \frac{d}{d\tau'} [K_d U(\tau')] d\tau' \quad (4.35)$$

ou simplificando:

$${}^tF = K_v {}^tU + \gamma_\infty K_d {}^tU + \gamma_1 K_d \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau')/\tau_1} \frac{d}{d\tau'} [U(\tau')] d\tau' \quad (4.36)$$

onde

$$\begin{aligned} K_v &= B(1-2\nu)^2 I \int_{-1}^1 B_\beta^T B_\beta \det J d\xi = \frac{B(1-2\nu)^2}{E} \mathbf{K}_{s1} \\ K_d &= \frac{4G_0(1+\nu)^2 I}{3} \int_{-1}^1 B_\beta^T B_\beta \det J d\xi \\ &\quad + G_0 A k_s \int_{-1}^1 (B_w - H_\beta)^T (B_w - H_\beta) \det J d\xi \\ &= \frac{4G_0(1+\nu)^2}{3E} \mathbf{K}_{s1} + \frac{G_0}{G} \mathbf{K}_{s2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para obter o algoritmo de integração, definem-se as variáveis internas:

$${}^{t+\Delta t} \hat{h}_i(t) = K_d \int_{T_0}^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-\tau'}{\tau_1}} \frac{d}{d\tau'} [U(\tau')] d\tau' \quad (4.38)$$

Após seguir o mesmo procedimento utilizado no elemento tridimensional no desenvolvimento do algoritmo, tem-se:

$${}^{t+\Delta t} \hat{h}_i(t) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_1}} {}^t \hat{h}_i(t) + e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_1}} K_d ({}^{t+\Delta t}U - {}^tU) \quad (4.39)$$

Logo:

$${}^{t+\Delta t}F = K_v {}^{t+\Delta t}U + \gamma_\infty K_d {}^{t+\Delta t}U + \gamma_1 {}^{t+\Delta t} \hat{h}_i(t) \quad (4.40)$$

Portanto, a equação de momentum pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{M}\ddot{U} + F + \mathbf{K}_G U - \mathbf{K}_{NC} U = R \quad (4.41)$$

A resposta no tempo (“time history”) é obtida usando o método de integração de Newmark  $\beta$  e o algoritmo de integração de esforços descrito acima.

Para o cálculo da carga crítica considera-se a seguinte equação:

$$\mathbf{M}\ddot{U} + F + \mathbf{K}_G U - \mathbf{K}_{NC} U = 0 \quad (4.42)$$

substituindo o vetor de forças internas  $F$  pela forma integral da eq. (4.36) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{U} + K_v U + \gamma_\infty K_d U + \gamma_1 K_d \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau')/\tau_1} \frac{d}{d\tau'} [U(\tau')] d\tau' \\ + \mathbf{K}_G U - \mathbf{K}_{NC} U = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação acima se obtém a equação característica:



$$\left( s^2 \mathbf{M} + K_v + \gamma_\infty K_d + \frac{\gamma_1 s \tau_1}{s \tau_1 + 1} K_d + \mathbf{K}_G - \mathbf{K}_{NC} \right) \bar{U} = 0 \quad (4.44)$$

sendo:

$$\bar{U} = \mathcal{L}(U) \quad (4.45)$$

onde  $\mathcal{L}(\cdot)$  denota a transformada de Laplace.

A equação característica também pode ser obtida substituindo a solução:

$$U = A_1 e^{st} \quad (4.46)$$

na eq. (4.43) em lugar de aplicar a transformada de Laplace.

Quando um autovalor complexo  $s$  tem uma parte real positiva, a solução da equação (4.46) implica oscilações com amplitudes exponencialmente crescentes, portanto na instabilidade dinâmica do sistema. A carga crítica dinâmica é a menor carga aplicada que causa este tipo de instabilidade.

#### 4.5.2.

##### Viscoelasticidade aplicada na deformação cisalhante

Quando o efeito da viscoelasticidade é aplicado somente à parcela de deformação cisalhante, a energia de deformação instantânea é igual a:

$$W^0 = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} G_0 \gamma^2 \quad (4.47)$$

Aplicando os mesmos conceitos da seção anterior obtêm-se as seguintes equações do algoritmo de integração de esforços.

$${}^{t+\Delta t}\hat{h}_i(t) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_1}} {}^t\hat{h}_i(t) + e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_1}} K_d ({}^{t+\Delta t}U - {}^tU) \quad (4.48)$$

e

$${}^{t+\Delta t}F = K_v {}^{t+\Delta t}U + \gamma_\infty K_d {}^{t+\Delta t}U + \gamma_1 {}^{t+\Delta t}\hat{h}_i(t) \quad (4.49)$$

onde

$$\begin{aligned} K_v &= \mathbf{K}_{s1} \\ K_d &= \frac{G_0}{G} \mathbf{K}_{s2} \end{aligned} \quad (4.50)$$