

### 3 Metodologia de análise

O método de elementos finitos é utilizado como a base para as análises realizadas neste trabalho. As equações que resultam da aplicação deste método na conservação de momentum devem levar em conta o efeito da não linearidade geométrica, das forças não conservativas e da dissipação de energia, visto que o escopo é a análise de sistemas amortecidos submetidos a cargas seguidoras. Três tipos de elementos finitos são utilizados, dois elementos de viga e um elemento sólido tridimensional.

Um dos elementos de viga considera as hipóteses de Euler-Bernoulli, e portanto não leva em conta a deformação cisalhante. O outro elemento de viga é baseado nas hipóteses de Timoshenko considerando o efeito da deformação cisalhante na sua formulação.

Nas análises com os dois elementos finitos mencionados acima, a não linearidade geométrica e as forças não conservativas são introduzidas através de matrizes geométricas e de carga formuladas na configuração indeformada da viga. Portanto, estas análises não levam em conta grandes deslocamentos, visto que a linearização da equação de conservação de momentum é feita sempre ao redor da configuração indeformada. Assume-se que esta simplificação não introduz um erro significativo na determinação da carga crítica no início da instabilidade dinâmica.

O elemento sólido tridimensional adotado nas análises não lineares que consideram grandes deslocamentos é um elemento de oito nós enriquecido com modos incompatíveis. As matrizes envolvidas são definidas seguindo a formulação Lagrangeana total, ou seja, as equações de equilíbrio são obtidas na configuração deformada, embora todas as grandezas envolvidas tenham como referência a configuração indeformada. Assim, o desenvolvimento da instabilidade dinâmica (que envolve grandes deslocamentos e rotações) pode ser avaliado enquanto as deformações permaneçam pequenas.

Os elementos finitos unidimensionais serão usados em análises de vigas de seção retangular, submetidas à ação de cargas seguidoras, considerando tanto amortecimento proporcional quanto amortecimento viscoelástico. Nas análises obtêm-se a resposta no tempo (“time history”) e os autovalores e autovetores da equação característica. O elemento sólido tridimensional é usado na análise dinâmica de tubos considerando carga seguidora e amortecimento viscoelástico.

Neste capítulo apresentam-se as equações e métodos de solução utilizados nas análises dinâmicas e as matrizes dos elementos finitos segundo as hipóteses mencionadas acima. Também se analisa o cálculo da carga crítica dinâmica nos elementos unidimensionais, especialmente quando o amortecimento proporcional está sendo considerado, uma vez que este caso permite obter resultados importantes na determinação da carga de “flutter”.

### 3.1. Formulação Lagrangeana Total

Considera-se a formulação Lagrangeana total na obtenção das equações para as análises dinâmicas com grandes deslocamentos, as equações diferenciais discretas são integradas implicitamente no tempo.

#### 3.1.1. Equação de conservação de momentum

A equação de conservação de momentum para sistemas discretos, considerando formulação Lagrangeana total e integração implícita, é igual a:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa independente do tempo,  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$  é o vetor de acelerações nodais no tempo  $t+\Delta t$ ,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$  é o vetor de carga nodal aplicada no tempo  $t+\Delta t$  (incluindo a carga não conservativa) e  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais que correspondem aos esforços no elemento no tempo  $t+\Delta t$ .

#### 3.1.2. Integração no tempo

As equações de Newmark  $\beta$  (Belytschko et al., 2000) são utilizadas para a integração no tempo das equações diferenciais discretas. Logo:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}} + \beta_N \Delta t^2 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^{t+\Delta t}\widehat{\dot{\mathbf{U}}} + \gamma_N \Delta t {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta_N) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \\ {}^{t+\Delta t}\widehat{\dot{\mathbf{U}}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + (1 - \gamma_N) \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Adotam-se os valores dos parâmetros  $\beta_N = 0.25$  e  $\gamma_N = 0.50$ , assim a integração implícita é incondicionalmente estável e corresponde à regra trapezoidal sem amortecimento numérico.

Resolvendo a primeira das equações do método de Newmark  $\beta$  tem-se:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}) \quad (3.4)$$

Portanto a equação de conservação de momentum pode ser escrita:

$$\frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{M} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F} \quad (3.5)$$

Este sistema de equações algébrico não linear pode ser resolvido iterativamente usando o método de Newton.

Como foi mencionada acima, esta integração implícita é incondicionalmente estável, o que permite o uso de intervalos de tempo maiores, agora limitados pelas condições do problema dinâmico e não pelo próprio método de integração. Porém a desvantagem da integração implícita está na necessidade de calcular a matriz de rigidez tangente e de resolver o sistema de equações à medida que se avança no tempo.

### 3.1.3. Método de Newton

O método de Newton é um processo iterativo utilizado na solução de equações não lineares.

Denomina-se:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{r} = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{M} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F} \quad (3.6)$$

ao resíduo da equação algébrica que resulta da integração do tempo da equação de conservação de momentum. Este resíduo deveria ser igual a zero caso se

conhecesse *a priori* a solução exata. Expandindo em serie de Taylor ao redor da solução da última iteração tem-se:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}^{(i)} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U} + O(\Delta \mathbf{U}^2) = 0 \quad (3.7)$$

onde

$$\Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i+1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} \quad (3.8)$$

é o incremento dos deslocamentos nodais no processo iterativo. A matriz

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.9)$$

é a matriz Jacobiana do sistema. A derivada do vetor de forças nodais é chamada de matriz de rigidez de deformações incrementais ou matriz de rigidez tangente.

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = {}_0\mathbf{K}_L + {}_0\mathbf{K}_{NL} \quad (3.10)$$

onde  ${}_0\mathbf{K}_L$  e  ${}_0\mathbf{K}_{NL}$  são as matrizes de rigidez linear e não linear, respectivamente.

Para os elementos finitos compatíveis na formulação Lagrangiana total, as equações para a matriz de rigidez de deformações incrementais e para o vetor de forças nodais são (Bathe, 1996):

$${}_0\mathbf{K}_L = \int_{0V} {}_0\mathbf{B}_L^T {}_0\mathbf{C} {}_0\mathbf{B}_L d^0V \quad (3.11)$$

$${}_0\mathbf{K}_{NL} = \int_{0V} {}_0\mathbf{B}_{NL}^T {}_0\mathbf{S} {}_0\mathbf{B}_{NL} d^0V \quad (3.12)$$

$${}_0\mathbf{F} = \int_{0V} {}_0\mathbf{B}_L^T {}_0\hat{\mathbf{S}} d^0V \quad (3.13)$$

Nas equações acima  ${}_0\mathbf{B}_L$  é a matriz de deformação-deslocamento linear,  ${}_0\mathbf{B}_{NL}$  é a matriz de deformação-deslocamento não linear,  ${}_0\mathbf{C}$  é a matriz incremental constitutiva de esforço-deformação do material,  ${}_0\mathbf{S}$  e  ${}_0\hat{\mathbf{S}}$  são, respectivamente, a matriz e o vetor de esforços de Piola-Kirchhoff II.

A derivada do vetor de carga nodal é conhecida como matriz de rigidez de carga.

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} = {}_0\mathbf{K}_{NC} \quad (3.14)$$

Logo, o incremento dos deslocamentos é obtido resolvendo a equação:

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{U} = - {}^t \mathbf{r}^{(i)} \quad (3.15)$$

ou

$$\left( \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{M} + {}_0 \mathbf{K}_L + {}_0 \mathbf{K}_{NL} - {}_0 \mathbf{K}_{NC} \right) \Delta \mathbf{U} = - {}^t \mathbf{r}^{(i)} \quad (3.16)$$

### 3.2. Formulação para pequenos deslocamentos

Quando as mudanças de geometria que ocorrem antes da carga crítica podem ser desprezadas, a linearização da equação de conservação de momentum pode ser feita sempre ao redor da configuração indeformada. Assim as matrizes de rigidez tangente e de carga são constantes e a equação de conservação de momentum pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \mathbf{U} - \mathbf{K}_{NC} \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.17)$$

Aplicando-se a integração no tempo vista anteriormente.

Esta formulação será considerada nas análises dinâmicas das vigas que seguem ambas as hipóteses de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

### 3.3. Elemento de Viga de Euler-Bernoulli

O elemento de viga de Euler-Bernoulli tem dois graus de liberdade em cada extremidade, um deslocamento e uma rotação, Figura 3.1. O campo de deslocamentos neste caso está completamente definido pelo deslocamento vertical do eixo. Dentro do elemento, o campo de deslocamentos é aproximado através dos quatro graus de liberdade e das funções de interpolação de Hermite:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)^2 (2 + \xi) \\ h_2 &= \frac{1}{8} L^e (1 - \xi)^2 (1 + \xi) \\ h_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)^2 (2 - \xi) \\ h_4 &= -\frac{1}{8} L^e (1 + \xi)^2 (1 - \xi) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde  $L^e$  é o comprimento do elemento e  $\xi$  é a coordenada natural do elemento que varia entre -1 e 1.

Assim o deslocamento é igual a:

$$w = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4] \cdot [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T \quad (3.19)$$

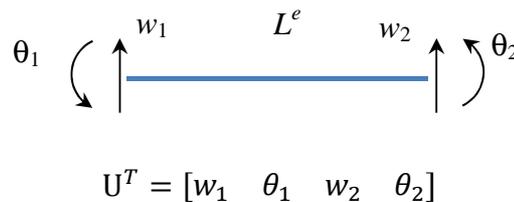
A matriz de rigidez pode ser calculada como:

$$\mathbf{K} = EI \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \det J \, d\xi \quad (3.20)$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação entre coordenadas reais e naturais e

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}'' \quad (3.21)$$

o apóstrofo indica derivada em relação a  $x$  e  $\mathbf{H}$  é o vetor com as funções de Hermite.



**Figura 3.1 Elemento finito de viga segundo as hipóteses de Euler-Bernoulli.**

Assim a matriz de rigidez obtida é igual a

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^{e3}} \begin{bmatrix} 12 & 6L^e & -12 & 6L^e \\ 6L^e & 4L^{e2} & -6L^e & 2L^{e2} \\ -12 & -6L^e & 12 & -6L^e \\ 6L^e & 2L^{e2} & -6L^e & 4L^{e2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A matriz geométrica que leva em conta o efeito não linear das deformações é calculada através da integral (Cook et al., 2002):

$$\mathbf{K}_G = P \int_{-1}^1 \mathbf{H}'^T \mathbf{H}' \det J \, d\xi \quad (3.23)$$

Esta matriz é o resultado de considerar o termo não linear do tensor de deformações de Green-Lagrange que corresponde à deformação axial devida ao deslocamento transversal:

$$\frac{1}{2} w'^2 \quad (3.24)$$

Logo

$$\mathbf{K}_G = \frac{P}{30L^e} \begin{bmatrix} 36 & 3L^e & -36 & 3L^e \\ 3L^e & 4L^{e2} & -3L^e & -L^{e2} \\ -36 & -3L^e & 36 & -3L^e \\ 3L^e & -L^{e2} & -3L^e & 4L^{e2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

A matriz de carga no caso de uma carga seguidora na extremidade direita é igual a:

$$\mathbf{K}_{NC} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Existem várias alternativas para o cálculo da matriz de massa. A matriz de massa consistente é igual a:

$$\mathbf{M} = \rho_m A \int_{-1}^1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} \det J \, d\xi \quad (3.27)$$

Resolvendo a integral, tem-se:

$$\mathbf{M} = \frac{\bar{m}L^e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L^e & 54 & -13L^e \\ 22L^e & 4L^{e2} & 13L^e & -3L^{e2} \\ 54 & 13L^e & 156 & -22L^e \\ -13L^e & -3L^{e2} & -22L^e & 4L^{e2} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde  $\bar{m}$  é a massa por comprimento unitário de viga.

A matriz de massa que considera a massa concentrada em cada nó do elemento é igual a:

$$\mathbf{M} = \frac{\bar{m}L^e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

A seguir são apresentados três casos de cálculo de carga crítica dinâmica para o problema de Beck, mostrando que para conseguir um resultado que seja pelo menos razoável, são necessários no mínimo dois elementos de viga de Euler-Bernoulli e a consideração da matriz de massa consistente.

No caso de modelar o problema de Beck com um elemento finito a matriz de massa deve ser a consistente, já que são necessárias pelo menos duas frequências ou modos de vibração para obter a carga crítica dinâmica.

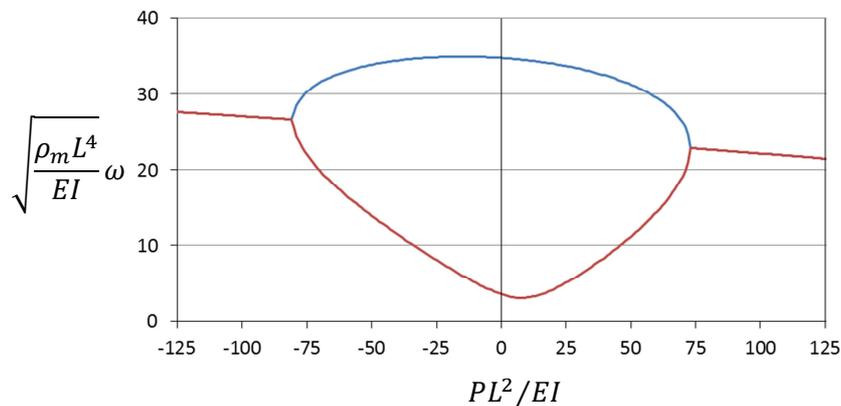
O comprimento do elemento é igual ao comprimento  $L$  da viga, portanto as matrizes utilizadas no problema de autovalor característico são:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_G &= \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L \\ -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{NC} &= P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M} &= \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

A Figura 3.2 mostra a variação das duas frequências de vibração com a carga seguidora, as duas cargas críticas dinâmicas são:

$$\begin{aligned} P_{cd} &= 72,7596 \frac{EI}{L^2} \\ P_{cd} &= -80,2450 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

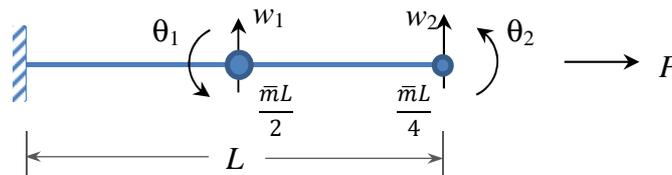
Observa-se que além da carga crítica estar muito afastada da carga crítica teórica, a menor carga crítica dinâmica é de tração.



**Figura 3.2** Frequências vs. carga, problema de Beck com um elemento finito.

Quando a viga é discretizada em dois elementos finitos de comprimento  $L^e$  igual a  $L/2$ , considerando-se a massa concentrada nos nós, como mostra a Figura 3.3, as matrizes utilizadas na equação característica são:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 192 & 0 & -96 & 24L \\ 0 & 16L^2 & -24L & 4L^2 \\ -96 & -24L & 96 & -24L \\ 24L & 4L^2 & -24L & 8L^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_G &= \frac{P}{60L} \begin{bmatrix} 288 & 0 & -144 & 6L \\ 0 & 8L^2 & -6L & -L^2 \\ -144 & -6L & 144 & -6L \\ 6L & -L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{NC} &= P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M} &= \frac{\bar{m}L}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$



**Figura 3.3** Viga com dois elementos finitos e duas massas concentradas.

A carga crítica é igual a:

$$P_{cd} = -14,3477 \frac{EI}{L^2} \tag{3.33}$$

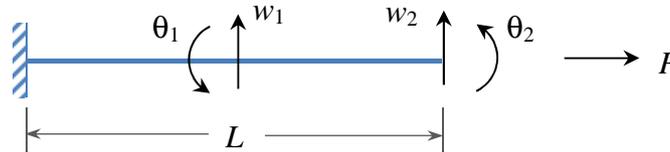
Se a viga é discretizada com dois elementos finitos, Figura 3.4, porém se utiliza a matriz de massa consistente, as matrizes do caso anterior podem ser usadas no problema de autovalor, mas com a seguinte matriz de massa:

$$\mathbf{M} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 27 & -13L/4 \\ 0 & L^2 & 13L/4 & -3L^2/8 \\ 27 & 13L/4 & 78 & -22L/4 \\ -13L/4 & -3L^2/8 & -22L/4 & L^2/2 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Assim a carga crítica obtida é igual a:

$$P_{cd} = -20,1924 \frac{EI}{L^2} \tag{3.35}$$

Este resultado é uma aproximação razoável da carga crítica teórica de Beck. Valores de carga crítica dinâmica em função do número de elementos finitos utilizados e a distribuição de massa adotada podem ser encontrados no trabalho de Suanno (1988).



**Figura 3.4** Viga com dois elementos finitos e matriz de massa consistente.

Neste trabalho, as análises de vigas que não levam em conta o efeito de deformação cisalhante considerarão dois elementos finitos e matriz de massa consistente, uma vez que o objetivo é o estudo qualitativo mais do que quantitativo do comportamento da carga crítica dinâmica considerando amortecimento e deformações cisalhantes.

### 3.4. Elemento de Viga de Timoshenko

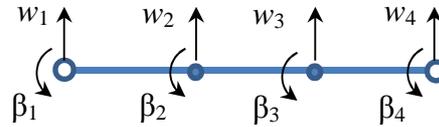
Um elemento finito cúbico que leva em conta o efeito da deformação cisalhante é mostrado na Figura 3.5. Este elemento tem oito graus de liberdade, sendo quatro deslocamentos e quatro rotações. No caso da viga de Timoshenko a rotação da seção plana que inicialmente era normal ao eixo é igual a:

$$\beta = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad (3.36)$$

onde  $\gamma$  é uma distorção angular constante equivalente, que leva em conta a distribuição de tensão cisalhante na seção transversal através de uma constante  $k_s$ , assim:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\tau}{G} \\ \tau &= \frac{V}{k_s A} \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde  $\tau$  é a tensão cisalhante equivalente e  $V$  a força cortante total na seção transversal  $A$ . O fator de correção  $k_s$  para uma seção retangular é igual a  $5/6$ .



$$U^T = [w_1 \quad \beta_1 \quad w_2 \quad \beta_2 \quad w_3 \quad \beta_3 \quad w_4 \quad \beta_4]$$

**Figura 3.5 Elemento finito de viga segundo as hipóteses de Timoshenko.**

Escolhe-se o elemento cúbico para que a aproximação do campo de deslocamentos seja do mesmo grau que no elemento de Euler-Bernoulli.

Assim as funções de interpolação cúbicas de Lagrange são usadas no elemento de viga de Timoshenko.

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{16}(-1 + \xi + 9\xi^2 - 9\xi^3) \\ h_2 &= \frac{1}{16}(9 - 27\xi - 9\xi^2 + 27\xi^3) \\ h_3 &= \frac{1}{16}(9 + 27\xi - 9\xi^2 - 27\xi^3) \\ h_4 &= \frac{1}{16}(-1 - \xi + 9\xi^2 + 9\xi^3) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Os campos de deslocamento e de rotação são interpolados de forma independente.

$$\begin{aligned} w &= H_w \cdot u \\ \beta &= H_\beta \cdot u \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde

$$\begin{aligned} H_w &= [h_1 \quad 0 \quad h_2 \quad 0 \quad h_3 \quad 0 \quad h_4 \quad 0] \\ H_\beta &= [0 \quad h_1 \quad 0 \quad h_2 \quad 0 \quad h_3 \quad 0 \quad h_4] \end{aligned} \quad (3.40)$$

O efeito da deformação cisalhante é introduzido na matriz de rigidez considerando a seguinte energia de deformação (Bathe, 1996):

$$W = \frac{1}{2} E I \int_0^L \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} G k_s A \int_0^L \gamma^2 dx \quad (3.41)$$

ou

$$W = \frac{1}{2} E I \int_0^L \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} G k_s A \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx \quad (3.42)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= B_w \cdot u \\ \frac{d\beta}{dx} &= B_\beta \cdot u \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde

$$\begin{aligned} B_w &= J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix} \\ B_\beta &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial \xi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Logo a matriz de rigidez é igual a:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_{s1} + \mathbf{K}_{s2} \\ \mathbf{K}_{s1} &= EI \int_{-1}^1 B_\beta^T B_\beta \det J \, d\xi \\ \mathbf{K}_{s2} &= G A k_s \int_{-1}^1 (B_w - H_\beta)^T (B_w - H_\beta) \det J \, d\xi \end{aligned} \quad (3.45)$$

A matriz geométrica é igual a:

$$\mathbf{K}_G = P \int_{-1}^1 B_w^T B_w \det J \, d\xi \quad (3.46)$$

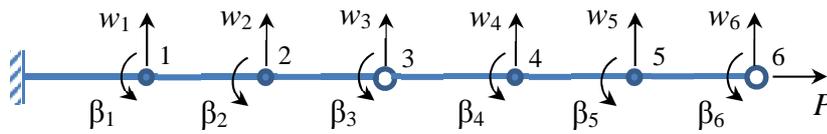
A matriz de carga no caso de uma carga seguidora na extremidade direita é uma matriz que tem somente um termo diferente de zero, o termo  $\mathbf{K}_{NC[7,8]} = P$ .

A matriz de massa consistente é calculada através da integral:

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} H_w \\ H_\beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{m} h^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_w \\ H_\beta \end{bmatrix} \det J \, d\xi \quad (3.47)$$

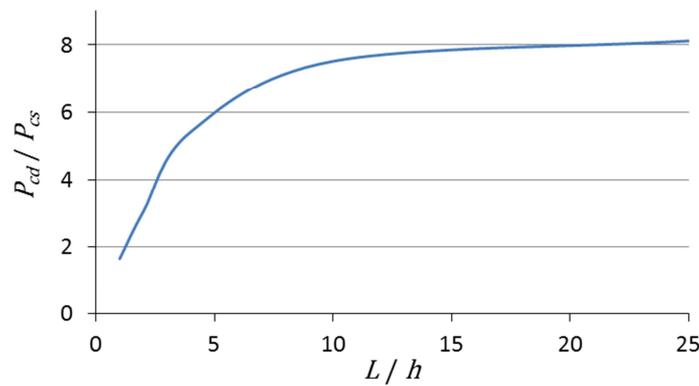
As matrizes do elemento cúbico de viga de Timoshenko estão no Anexo.

Nos exemplos de vigas que levam em conta a deformação cisalhante, a viga será discretizada em dois elementos cúbicos com matriz de massa consistente Figura 3.6.



**Figura 3.6** Viga com dois elementos finitos cúbicos.

Assim, quando a carga crítica dinâmica é calculada para vários valores de esbeltez, obtém-se o gráfico da Figura 3.7 apresentado no trabalho de Suanno (1988). No eixo das ordenadas tem-se a relação entre a carga crítica dinâmica e a carga crítica estática.



**Figura 3.7** Carga crítica dinâmica em função da esbeltez.

### 3.5. Coluna de Beck com amortecimento proporcional

A maioria dos trabalhos que levam em conta o amortecimento na determinação da carga crítica dinâmica, ver por exemplo Kar (1980), consideram amortecimento interno e externo na viga de Euler-Bernoulli baseados na seguinte equação diferencial:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E^* I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \rho_m A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.48}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inercia,  $E^*$  a constante de amortecimento interno viscoso,  $\beta_1$  a constante de amortecimento externo,  $\rho_m$  a massa específica do material e  $w$  é o deslocamento vertical da viga.

O amortecimento externo tem um efeito estabilizador, enquanto que o amortecimento interno pode ter um efeito desestabilizador quando uma pequena quantidade de amortecimento é introduzida, fenômeno conhecido como paradoxo de Ziegler.

A equação discreta equivalente à eq. (3.48) levando em conta somente o amortecimento interno pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{K}_G\mathbf{U} - \mathbf{K}_{NC}\mathbf{U} = \{0\} \quad (3.49)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_G$  e  $\mathbf{K}_{NC}$  são as matrizes de massa, rigidez, geométrica e de carregamento, respectivamente,  $\mathbf{U}$  é o vetor que contém os graus de liberdade do sistema e

$$\mathbf{C} = \frac{E^*}{E}\mathbf{K} = a_1\mathbf{K} \quad (3.50)$$

Observa-se que  $a_1$  tem unidades de tempo.

Conseqüentemente, o amortecimento proporcional de Rayleigh, quando é considerada apenas a matriz de rigidez, é equivalente ao amortecimento interno introduzido na eq. (3.48).

A fim de comparar os resultados de vigas com diferentes relações de comprimento e altura, adota-se o seguinte valor adimensional de amortecimento interno:

$$\eta = a_1 \sqrt{\frac{EI}{\rho_m A L^4}} \quad (3.51)$$

A carga crítica dinâmica da eq. (3.49) é obtida adotando-se a solução:

$$\mathbf{U} = A_1 e^{st} \quad (3.52)$$

sendo  $A_1$  um vetor modal complexo e  $s$  um número complexo conhecido como expoente característico. A parte imaginária de  $s$  é igual à frequência do modo de vibração e a parte real indica o decremento exponencial da amplitude da resposta. Substituindo  $\mathbf{U}$  na eq.(3.49) tem-se:

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_G - \mathbf{K}_{NC}) = \{0\} \quad (3.53)$$

Esta equação característica pode ser convertida em um problema de autovalor simples usando o método de Foss (1958). A eq. (3.49) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_{NC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.54)$$

assim, o seguinte problema de autovalor é obtido:

$$\left( s \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_{NC} \end{bmatrix} \right) = \{0\} \quad (3.55)$$

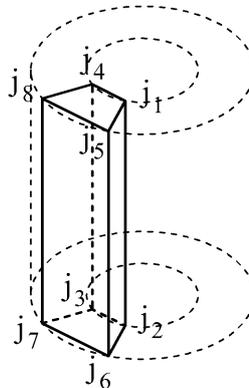
que permite encontrar a carga crítica dinâmica como a menor carga em que pelo menos um dos expoentes característicos tem a parte real positiva.

A resposta no tempo é obtida como solução da seguinte equação:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_G)\mathbf{U} - \mathbf{K}_{NC}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.56)$$

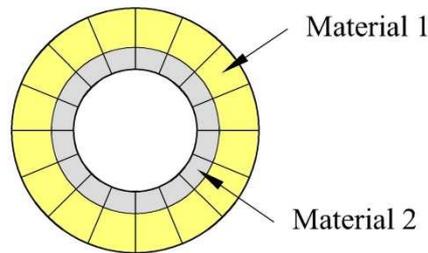
### 3.6. Elemento finito tridimensional incompatível

Um elemento finito incompatível de oito nós é utilizado nas análises tridimensionais de tubos, Figura 3.8. Estas análises baseiam-se em equações definidas através da formulação Lagrangeana total, assim as respostas podem incluir grandes deslocamentos, embora estejam limitadas a pequenas deformações pelas relações constitutivas adotadas.



**Figura 3.8 Elemento finito tridimensional de oito nós.**

Entre as vantagens de uma discretização espacial de tubos com elementos tridimensionais têm-se: as deformações da seção transversal são levadas em conta nas análises, os carregamentos como cargas seguidoras ou carregamento de fluxo podem ser representados de forma mais conveniente, desde que as cargas podem ser modeladas normais à superfície da configuração deformada, levando em conta a mudança de área devida à deformação; e existe a possibilidade de considerar seções transversais com camadas de diferentes materiais, Figura 3.9.



**Figura 3.9 Seção transversal com dois materiais.**

O elemento incompatível interpola as coordenadas de um ponto material dentro do elemento da mesma forma que o elemento compatível, assim:

$${}^0x_i = \sum_{k=1}^8 h_k {}^0x_i^k \quad (3.57)$$

$${}^tx_i = \sum_{k=1}^8 h_k {}^tx_i^k$$

onde  ${}^0x_i$  e  ${}^tx_i$  são as coordenadas de um ponto material na configuração de referencia  $t = 0$  e no tempo  $t$ , respectivamente. Da mesma forma  ${}^0x_i^k$  e  ${}^tx_i^k$  são as coordenadas dos nós  $j_k$  do elemento, Figura 3.8,  $h_k$  são as funções de forma apresentadas no Anexo.

O gradiente de deformações está dado por:

$${}^t\mathbf{X} = {}^t\mathbf{X} \otimes {}_0\nabla \quad (3.58)$$

onde

$${}^t\mathbf{X}^T = [ {}^tx_1 \quad {}^tx_2 \quad {}^tx_3 ]$$

$${}_0\nabla^T = \left[ \frac{\partial}{\partial {}^0x_1} \quad \frac{\partial}{\partial {}^0x_2} \quad \frac{\partial}{\partial {}^0x_3} \right] \quad (3.59)$$

Então:

$${}^t\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^tx_1}{\partial {}^0x_1} & \frac{\partial {}^tx_1}{\partial {}^0x_2} & \frac{\partial {}^tx_1}{\partial {}^0x_3} \\ \frac{\partial {}^tx_2}{\partial {}^0x_1} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial {}^0x_2} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial {}^0x_3} \\ \frac{\partial {}^tx_3}{\partial {}^0x_1} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial {}^0x_2} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial {}^0x_3} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

O método dos modos incompatíveis enriquece o elemento finito no nível do campo de deformações. Assim, assume uma decomposição aditiva do gradiente de deslocamentos (Ibrahimbegovic, 2009):

$$\bar{\mathbf{D}} = {}^t\mathbf{U} \otimes {}_0\nabla + \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.61)$$

Na equação acima o primeiro termo do lado direito é o gradiente de deslocamentos compatível obtido da aproximação isoparamétrica do campo de deslocamentos e o segundo é a parte incompatível do gradiente de deslocamentos.

A decomposição aditiva do gradiente de deslocamentos corresponde à seguinte decomposição multiplicativa do gradiente de deformações:

$${}^t_0\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{I} + {}^t\mathbf{U} \otimes {}_0\nabla + \tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{D}} {}^t_0\mathbf{X}^{-1}) {}^t_0\mathbf{X} \quad (3.62)$$

com:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}^\varphi &= \tilde{\mathbf{D}} {}^t_0\mathbf{X}^{-1} \\ {}^t_0\tilde{\mathbf{X}}^\varphi &= \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{D}}^\varphi \end{aligned} \quad (3.63)$$

tem-se:

$${}^t_0\bar{\mathbf{X}} = {}^t_0\tilde{\mathbf{X}}^\varphi {}^t_0\mathbf{X} \quad (3.64)$$

Caso um campo de deslocamentos incompatível seja adotado a priori, a parte incompatível do gradiente de deslocamentos pode ser obtida aplicando ao campo de deslocamentos incompatível,  ${}^t\tilde{u}_i$  o mesmo operador diferencial aplicado ao campo de deslocamentos compatível. Logo:

$$\tilde{\mathbf{D}} = {}^t\tilde{\mathbf{U}} \otimes {}_0\nabla \quad (3.65)$$

O campo de deslocamentos compatível é interpolado através das funções de forma utilizadas para interpolar as coordenadas:

$${}^t u_i = \sum_{k=1}^8 h_k {}^t u_i^k \quad (3.66)$$

sendo  ${}^t u_i$  é o campo de deslocamentos compatíveis no tempo  $t$ .

O campo de deslocamentos incompatível é igual a (Wilson, 2002):

$${}^t \tilde{u}_i = \sum_{k=1}^8 \phi_k {}^t \tilde{u}_i^k \quad (3.67)$$

com:



Após linearizar estas duas equações pelo método de Newton, têm-se:

$$\left( \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{M} + {}_0\mathbf{K}_L + {}_0\mathbf{K}_{NL} - {}_0\mathbf{K}_{NC} \right) \Delta U + {}_0\mathbf{F}^{\varphi T} \Delta \tilde{U} = - {}_t\mathbf{r}^{(i)} \quad (3.71)$$

$${}_0\mathbf{F}^{\varphi} \Delta U + {}_0\mathbf{H}^{\varphi} \Delta \tilde{U} = - {}_0\mathbf{h}^{\varphi} \quad (3.72)$$

onde

$$\Delta \tilde{U} = {}^{t+\Delta t}\tilde{U}^{(i+1)} - {}^{t+\Delta t}\tilde{U}^{(i)} \quad (3.73)$$

Isolando  $\Delta \tilde{U}$  da segunda equação linearizada e substituindo na primeira encontra-se a equação que permite calcular o incremento de deslocamentos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{M} + {}_0\mathbf{K}_L + {}_0\mathbf{K}_{NL} - {}_0\mathbf{K}_{NC} - {}_0\mathbf{F}^{\varphi T} {}_0\mathbf{H}^{\varphi^{-1}} {}_0\mathbf{F}^{\varphi} \right) \Delta U \\ = - {}_t\mathbf{r}^{(i)} + {}_0\mathbf{F}^{\varphi T} {}_0\mathbf{H}^{\varphi^{-1}} {}_0\mathbf{h}^{\varphi} \end{aligned} \quad (3.74)$$

sendo:

$${}_0\mathbf{F}^{\varphi} = {}_0\mathbf{F}_L^{\varphi} + {}_0\mathbf{F}_{NL}^{\varphi} \quad (3.75)$$

$${}_0\mathbf{H}^{\varphi} = {}_0\mathbf{H}_L^{\varphi} + {}_0\mathbf{H}_{NL}^{\varphi} \quad (3.76)$$

onde:

$${}_0\mathbf{F}_L^{\varphi} = \int_{{}^0V} {}_0\mathbf{G}_L^{\varphi T} {}_0\mathbf{C} {}_0\mathbf{B}_L d {}^0V \quad (3.77)$$

$${}_0\mathbf{F}_{NL}^{\varphi} = \int_{{}^0V} {}_0\mathbf{G}_{NL}^{\varphi T} {}_0\mathbf{S} {}_0\mathbf{B}_{NL} d {}^0V \quad (3.78)$$

$${}_0\mathbf{H}_L^{\varphi} = \int_{{}^0V} {}_0\mathbf{G}_L^{\varphi T} {}_0\mathbf{C} {}_0\mathbf{G}_L^{\varphi} d {}^0V \quad (3.79)$$

$${}_0\mathbf{H}_{NL}^{\varphi} = \int_{{}^0V} {}_0\mathbf{G}_{NL}^{\varphi T} {}_0\mathbf{S} {}_0\mathbf{G}_{NL}^{\varphi} d {}^0V \quad (3.80)$$

Por último, a equação que permite eliminar o campo de tensões das equações variacionais é a condição de ortogonalidade entre tensão e gradiente de deslocamento incompatível. Esta relação é utilizada para garantir que o elemento possa modelar um campo de esforços constantes. Logo:

$$\int_{{}^0V} \tilde{\mathbf{D}} d {}^0V = 0 \quad (3.81)$$

a equação acima é atendida quando o gradiente das funções de forma incompatíveis é corrigido pela expressão:

$$\hat{\Phi} \otimes \nabla = \Phi \otimes \nabla - \frac{1}{V} \int_{V} \Phi \otimes \nabla dV \quad (3.82)$$

onde  $\Phi$  é o vetor com as funções de forma incompatíveis.

Desta forma os elementos incompatíveis têm a propriedade de enriquecer o campo de deformações quando o campo de tensões é heterogêneo, o que acontece quando a malha de discretização é grosseira. Porém a contribuição dos modos incompatíveis ao campo de deformações será desprezível com uma malha refinada em que o campo de tensões em cada elemento seja quase constante.

Adicionalmente, o elemento incompatível é menos sensível às distorções do que elementos sólidos compatíveis com maior número de nós, o que favorece o seu uso em análises com grandes deslocamentos.

Ainda, este elemento pode ser usado com materiais quase incompressíveis, o que o torna útil nas análises viscoelásticas, uma vez que os materiais poliméricos apresentam estas duas características.

Para elementos regulares, a integração de Gauss de terceira ordem corresponde a uma integração numérica completa do elemento incompatível quadrático. Para uma integração reduzida ou em caso de deformações finitas, cuidados devem ser tomados com modos de energia espúrios para estados de tensão de compressão (Wriggers, 2010).

### 3.7. Força seguidora no elemento tridimensional

Uma carga seguidora em forma de pressão pode ser aplicada nas faces do elemento finito tridimensional. Neste caso:

$$\bar{t} = -p \bar{n} \quad (3.83)$$

onde  $\bar{t}$  é o vetor de tensões de superfície,  $\bar{n}$  é o vetor unitário normal à superfície e  $p$  é a pressão aplicada.

Assim a força externa devida à pressão pode ser calculada como segue (Belytschko, 2000):

$${}^0R_{NC} = \int_{{}^0\Gamma} H^T \bar{t} d {}^0\Gamma = - \int_{{}^0\Gamma} H^T p \bar{n} d {}^0\Gamma \quad (3.84)$$

Se a carga está aplicada na face normal à coordenada natural  $r$ , o produto vetorial  $\partial {}^tX/\partial s \times \partial {}^tX/\partial j$  tem a direção da normal à superfície e magnitude igual ao Jacobiano da transformação, logo:

$$p \bar{n} d {}^0\Gamma = p \frac{\partial {}^tX}{\partial s} \times \frac{\partial {}^tX}{\partial j} ds dj \quad (3.85)$$

Portanto:

$${}^0R_{NC} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p H^T \frac{\partial {}^tX}{\partial s} \times \frac{\partial {}^tX}{\partial j} ds dj \quad (3.86)$$

com:

$${}^tX = {}^0X + {}^tU \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial {}^tX^T}{\partial r} \\ \frac{\partial {}^tX^T}{\partial s} \\ \frac{\partial {}^tX^T}{\partial j} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 (H \otimes {}^0\nabla)_k {}^tX^k \quad (3.88)$$

A carga seguidora aplicada desta forma, além de permanecer normal à superfície na configuração deformada, leva em conta a mudança de área da superfície.

### 3.8. Matriz de carga para carga seguidora

A derivada da força seguidora em relação ao tempo, sem considerar a variação da pressão, é igual a (Belytschko, 2000):

$$\begin{aligned} \frac{{}^0R_{NC}}{dt} &= \mathbf{K}_{NC} \frac{\partial {}^tX}{dt} \\ \frac{{}^0R_{NC}}{dt} &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p H^T \left( \frac{\partial^2 {}^tX}{\partial s dt} \times \frac{\partial {}^tX}{\partial j} + \frac{\partial {}^tX}{\partial s} \times \frac{\partial^2 {}^tX}{\partial j dt} \right) ds dj \end{aligned} \quad (3.89)$$

com:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 {}^tX^T}{\partial r dt} \\ \frac{\partial^2 {}^tX^T}{\partial s dt} \\ \frac{\partial^2 {}^tX^T}{\partial j dt} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 (H \otimes {}_0\nabla)_k \frac{\partial {}^tX^k}{dt} \quad (3.90)$$

Explicitando:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial {}^tX^T}{\partial r} \\ \frac{\partial {}^tX^T}{\partial s} \\ \frac{\partial {}^tX^T}{\partial j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^tx_1}{\partial r} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial r} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial r} \\ \frac{\partial {}^tx_1}{\partial s} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial s} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial s} \\ \frac{\partial {}^tx_1}{\partial j} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial j} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial j} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Tem-se:

$$\mathbf{K}_{NC} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p H^T \left[ (H \otimes {}_0\nabla)_{[2..k]} H^\eta - (H \otimes {}_0\nabla)_{[3..k]} H^\xi \right] ds dj \quad (3.92)$$

com:

$$H^\eta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial j} & -\frac{\partial {}^tx_2}{\partial j} \\ -\frac{\partial {}^tx_3}{\partial j} & 0 & \frac{\partial {}^tx_1}{\partial j} \\ \frac{\partial {}^tx_2}{\partial j} & -\frac{\partial {}^tx_1}{\partial j} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$H^\xi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial s} & -\frac{\partial {}^tx_2}{\partial s} \\ -\frac{\partial {}^tx_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial {}^tx_1}{\partial s} \\ \frac{\partial {}^tx_2}{\partial s} & -\frac{\partial {}^tx_1}{\partial s} & 0 \end{bmatrix}$$