

## 2 Amortecimento

Todo mecanismo de dissipação de energia introduz amortecimento na vibração de uma estrutura. Como mencionado anteriormente, em função do mecanismo relevante na dissipação de energia existem diversas formas de considerar o amortecimento em um sistema. Quando tal mecanismo é muito complexo, o amortecimento é muitas vezes introduzido diretamente na equação de equilíbrio dinâmico. Em situações em que o mecanismo relevante seja a dissipação dentro do próprio material, o amortecimento pode ser incluído como parte das equações constitutivas do material.

Dois tipos de amortecimento são utilizados neste trabalho: o amortecimento viscoso ou proporcional e o amortecimento viscoelástico. O primeiro, por sua simplicidade e uso rotineiro na área da engenharia estrutural, além de servir como parâmetro de comparação para algumas definições características do amortecimento, será usado na obtenção de alguns resultados importantes nos problemas não conservativos. O amortecimento viscoelástico introduzido através de relações constitutivas é indicado em análises de materiais onde a energia dissipada depende da frequência; como polímeros e elastômeros.

### 2.1. Amortecimento viscoso ou proporcional

#### 2.1.1. Sistemas de um grau de liberdade

Assume-se que a força de amortecimento é proporcional à velocidade. Em sistemas com um grau de liberdade a equação de equilíbrio dinâmico é escrita como:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f_{ext} \quad (2.1)$$

onde  $m$  é a massa do sistema de um grau de liberdade,  $c$  é a constante de amortecimento proporcional à velocidade,  $k$  é a rigidez,  $f_{ext}$  a força externa

aplicada e  $u$  é o deslocamento. Para simplificar a solução analítica, é usual escrever esta equação da seguinte forma:

$$m \ddot{u} + 2 \xi_c m \omega \dot{u} + k u = f_{ext} \quad (2.2)$$

com  $\xi$  o coeficiente de amortecimento crítico e  $\omega$  a frequência natural igual a:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

A resposta deste sistema a uma solicitação harmônica do tipo  $\bar{f}e^{i\bar{\omega}t}$ , onde  $\bar{f}$  é a amplitude da força e  $\bar{\omega}$  é a frequência da solicitação, é assumida como sendo:

$$u = \rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} \quad (2.4)$$

onde  $\rho$  é a amplitude da resposta e  $\theta$  é o ângulo de fase entre a resposta e a solicitação, dados por:

$$\rho = \frac{\bar{f}}{k \sqrt{(1 - \beta_\omega^2)^2 + (2\xi_c \beta_\omega)^2}} \quad (2.5)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi_c \beta_\omega}{1 - \beta_\omega^2}\right)$$

com  $\beta_\omega = \bar{\omega}/\omega$ . A equação de equilíbrio dinâmico pode ser escrita em termos de solução assumida:

$$m \ddot{u} + (k + i \bar{\omega} c) u = \bar{f} e^{i\bar{\omega}t} \quad (2.6)$$

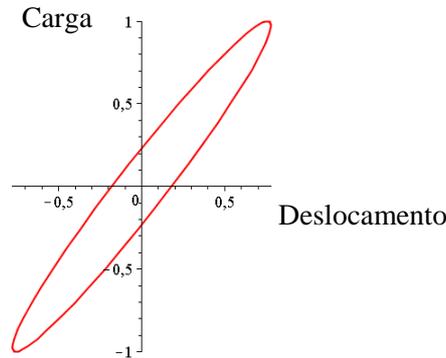
O termo entre parênteses é conhecido como rigidez complexa. A Figura 2.1 mostra a carga harmônica versus o deslocamento. Este gráfico recebe o nome de curva de histerese. O amortecimento estrutural e o amortecimento viscoelástico geram curvas de histerese semelhantes. Observa-se que a variação da curvatura neste caso é contínua, enquanto que se o amortecimento é independente do tempo, como acontece no caso da plasticidade, a curva de histerese apresenta vértices ou descontinuidades na curvatura.

A área dentro da curva de histerese representa a energia dissipada em cada ciclo. Para o amortecimento viscoso tem-se:

$$E_D = 2 \pi \xi_c m \omega \bar{\omega} \rho^2 \quad (2.7)$$

A energia dissipada neste caso é proporcional à frequência da carga aplicada e ao quadrado da amplitude da resposta. Uma crítica que se faz a este tipo de

amortecimento é que a evidência mostra que a energia dissipada em um ciclo independe da frequência da excitação.



**Figura 2.1** Curva de histerese.

Uma forma de obter uma resposta em que a energia dissipada seja independente da frequência da carga é usar o amortecimento estrutural, conhecido como amortecimento histerético (Clough e Penzien, 2010). A rigidez complexa neste caso é igual a:

$$\hat{k} = k(1 + i \zeta) \quad (2.8)$$

onde  $\zeta$  é o fator de amortecimento histerético. É usual assumir  $\zeta = 2 \xi_c$ , que corresponde a igualar as respostas do amortecimento viscoso e do amortecimento estrutural para  $\beta = 1$  (em ressonância). Assim sendo a energia dissipada em um ciclo pelo amortecimento estrutural é igual a:

$$E_D = 2 \pi \xi_c m \omega^2 \bar{\rho}^2 \quad (2.9)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a amplitude máxima da resposta para o amortecimento histerético. Apesar de este amortecimento ser independente da frequência da carga, na atualidade ele é usado somente em algumas análises no domínio da frequência, sendo o amortecimento viscoso ainda muito utilizado para a maioria das análises no domínio do tempo.

Uma medida de amortecimento muito utilizada no caso de amortecimento viscoso, além do coeficiente de amortecimento crítico  $\xi_c$ , é o decremento logarítmico, definido como:

$$\delta_1 = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2\pi\xi_c}{\sqrt{1 - \xi_c^2}} \quad (2.10)$$

com  $u_n$  e  $u_{n+1}$  sendo as amplitudes de dois picos sucessivos da resposta do sistema em vibração livre.

Como visto anteriormente, a amplitude da resposta depende da energia dissipada pelo sistema. À medida que a energia dissipada aumenta a diferença entre dois picos da resposta é maior. Portanto, o decremento logarítmico e o coeficiente de amortecimento crítico dependem da amplitude da resposta que esteja sendo considerada.

### 2.1.2. Sistemas com vários graus de liberdade

No caso de vários graus de liberdade, a eq. (2.1) torna-se um sistema de equações:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  a matriz de amortecimento,  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez,  $\mathbf{R}$  o vetor de forças externas e  $\mathbf{U}$  o vetor de deslocamentos.

De todas as formas possíveis de definir a matriz de amortecimento, a mais conhecida e utilizada na prática estrutural é a matriz de amortecimento proporcional à massa e à rigidez, conhecida como matriz de amortecimento de Rayleigh (Clough e Penzien, 2010).

$$\mathbf{C} = a_1 \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} \quad (2.12)$$

onde  $a_1$  e  $a_0$  são constantes que podem ser calculadas em função dos coeficientes de amortecimento de duas frequências naturais do sistema.

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \begin{bmatrix} -1/\omega_2 & 1/\omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Esta não é a única matriz que desacopla o sistema de equações, porém, não se justifica uma definição mais elaborada da matriz de amortecimento nos casos em que os mecanismos reais de dissipação de energia não estão sendo considerados.

## 2.2. Amortecimento viscoelástico

Os materiais com relações constitutivas definidas através de modelos viscoelásticos dissipam energia quando estão submetidos a um carregamento ou a

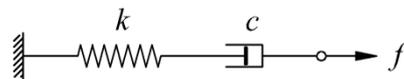
uma deformação, portanto, dependendo dos parâmetros utilizados, podem amortecer a amplitude da resposta dinâmica.

Entre os modelos viscoelásticos mais simples encontram-se os modelos exponenciais, com relações força-deslocamento ou esforço-deformação que podem ser obtidas através do equilíbrio e compatibilidade de modelos discretos formados por arranjos de molas e amortecedores viscosos. Segundo a configuração do modelo discreto tem-se o modelo Maxwell, o modelo Kelvin, o modelo sólido padrão e as cadeias tipo Maxwell ou Kelvin.

Em princípio apresentam-se os modelos exponenciais considerando sistemas de um grau de liberdade. Na sequência se analisam os critérios e alternativas da aplicação destes modelos em elementos discretos com vários graus de liberdade e a relação com o amortecimento de sistemas contínuos.

### 2.2.1. Modelo Maxwell

O modelo Maxwell pode ser representado como uma mola e um amortecedor viscoso em série, Figura 2.2.



**Figura 2.2 Modelo Maxwell.**

A relação força deslocamento deste modelo viscoelástico é dada pela equação:

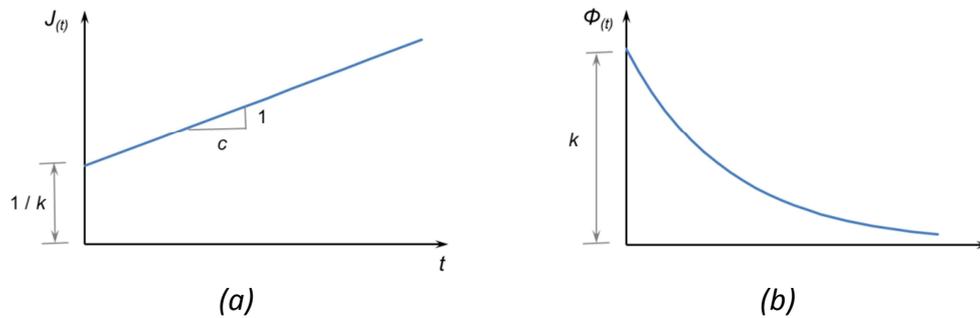
$$\dot{f} + \frac{k}{c}f = k \dot{u} \quad (2.14)$$

A função de fluência ou de deformação lenta, Figura 2.3(a), definida como o deslocamento ao longo do tempo causado por uma força unitária constante aplicada no tempo  $t = 0$ , é igual a:

$$J_{(t)} = \frac{1}{k} + \frac{t}{c} \quad (2.15)$$

A função de relaxação apresentada na Figura 2.3(b) representa a variação da força ao longo do tempo para um deslocamento unitário aplicado no tempo  $t = 0$  e mantido constante, no modelo Maxwell esta função é igual a:

$$\Phi(t) = k e^{-t k/c} \quad (2.16)$$



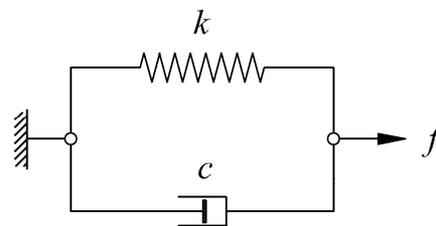
**Figura 2.3 Modelo Maxwell (a) Função de deformação lenta, (b) Função de relaxação.**

Observa-se que, quando se aplica uma força constante ao modelo, o deslocamento aumenta indefinidamente com o tempo. Enquanto que no caso de se aplicar um deslocamento constante a força tende a zero com o tempo tendendo para infinito.

### 2.2.2. Modelo Kelvin

No modelo Kelvin, Figura 2.4, a equação diferencial que relaciona força com deslocamento é igual a:

$$f = c \dot{u} + k u \quad (2.17)$$



**Figura 2.4 Modelo Kelvin.**

A função de fluência, Figura 2.5(a), é a seguinte:

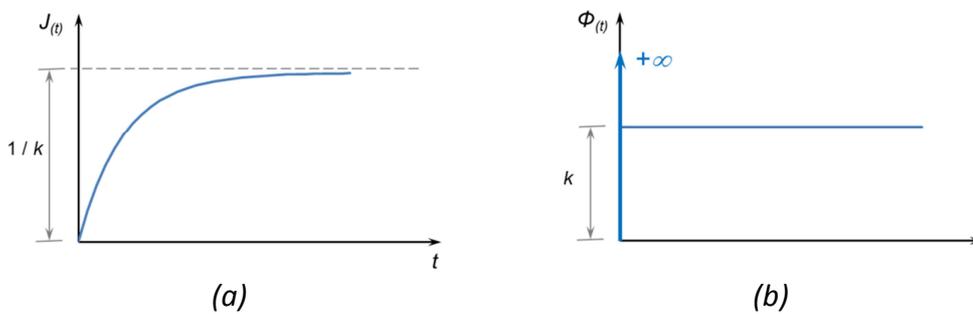
$$J(t) = \frac{1}{k} (1 - e^{-t k/c}) \quad (2.18)$$

Esta função mostra que quando se aplica uma força constante no tempo  $t = 0$  o deslocamento instantâneo é zero, o deslocamento aumenta gradativamente com o tempo até atingir o valor dado pela flexibilidade da mola.

A função de relaxação deste modelo, Figura 2.5(b), é a soma da rigidez  $k$  mais a constante de amortecimento  $c$  multiplicada pela função delta de Dirac:

$$\phi(t) = k + c \delta(t) \quad (2.19)$$

Assim, no modelo Kelvin, um deslocamento instantâneo aplicado no tempo  $t = 0$  pode existir somente no caso teórico de uma força instantânea infinita. Após este ponto singular da função de relaxação a força no modelo é constante ao longo do tempo sendo igual à rigidez multiplicada pelo deslocamento.



**Figura 2.5 Modelo Kelvin (a) Função de deformação lenta, (b) Função de relaxação.**

### 2.2.3. Modelo Sólido Padrão

O modelo sólido padrão é um arranjo em paralelo de uma mola com um modelo Maxwell, Figura 2.6. A equação diferencial em termos de força e deslocamento é a seguinte:

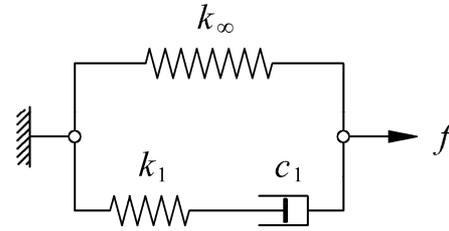
$$\dot{f} + \frac{k_1}{c_1} f = (k_\infty + k_1) \dot{u} + \frac{k_\infty k_1}{c_1} u \quad (2.20)$$

É útil, como será visto no capítulo que trata da implementação do modelo viscoelástico, definir uma variável interna  $\alpha$ , que neste caso representa o deslocamento do amortecedor viscoso, desta forma a equação anterior pode ser substituída por duas equações diferenciais e um limite:

$$f = (k_{\infty} + k_1) u - k_1 \alpha$$

$$\dot{\alpha} + \frac{k_1}{c_1} \alpha = \frac{k_1}{c_1} u \tag{2.21}$$

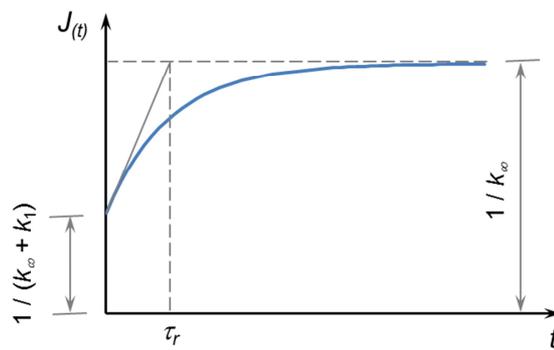
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = 0$$



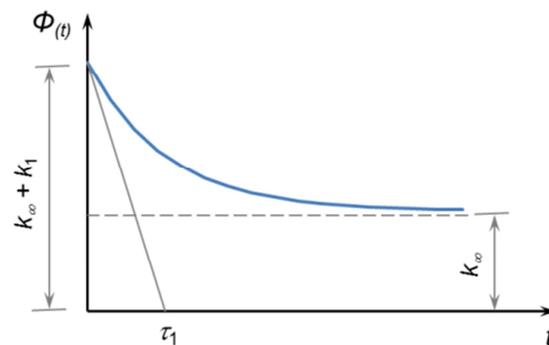
**Figura 2.6 Modelo sólido padrão.**

A Figura 2.7(a) mostra a função de fluência deste modelo que é igual a:

$$J(t) = \frac{1}{k_{\infty}} - \frac{k_1}{k_{\infty}(k_{\infty} + k_1)} e^{-\frac{k_{\infty}k_1}{c_1(k_{\infty}+k_1)}t} \tag{2.22}$$



(a)



(b)

**Figura 2.7 Modelo Sólido Padrão (a) Função de deformação lenta, (b) Função de relaxação.**

Enquanto a função de relaxação da Figura 2.7(b) está dada por:

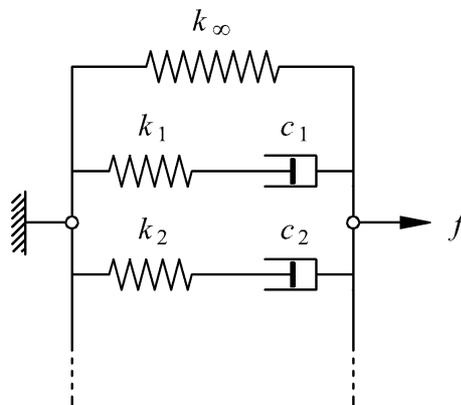
$$\phi(t) = k_{\infty} + k_1 e^{-t/\tau_1} \quad (2.23)$$

onde o tempo de relaxação  $\tau_1 = c_1 / k_1$  pode ser definido como o ponto onde a tangente inicial da curva de relaxação intercepta o eixo do tempo. O tempo de retardo pode ser definido como a interseção da tangente inicial da curva de deformação lenta e a linha assintótica a esta curva quando o tempo tende a infinito, Figura 2.7(a):

$$\tau_r = \frac{k_{\infty} + k_1}{k_{\infty}} \tau_1 \quad (2.24)$$

#### 2.2.4. Modelo Maxwell Generalizado

Este modelo pode ser visto como uma generalização do modelo Sólido Padrão, trata-se de um arranjo em paralelo de uma mola com mais de um modelo Maxwell, Figura 2.8.



**Figura 2.8 Modelo Maxwell Generalizado.**

As relações constitutivas deste modelo são:

$$f = k_0 u - \sum_{i=1}^N k_i \alpha_i \quad (2.25)$$

$$\dot{\alpha}_i + \frac{\alpha_i}{\tau_i} = \frac{u}{\tau_i}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_i(t) = 0$$

onde  $N$  é o número de elementos tipo Maxwell no modelo e

$$k_0 = k_\infty + \sum_{i=1}^N k_i \quad (2.26)$$

$$\tau_i = \frac{c_i}{k_i} \quad (2.27)$$

Nas seções seguintes serão analisadas e comparadas outras características importantes do comportamento dos modelos Kelvin e sólido padrão. O primeiro é tomado como referência porque quando se adiciona massa a este modelo a equação dinâmica obtida é a mesma equação considerada no caso de amortecimento proporcional ou viscoso. Por outra parte, o modelo sólido padrão ou uma generalização dele, a cadeia tipo Maxwell, será aplicado como modelo constitutivo nas análises de elementos finitos com amortecimento viscoelástico.

### 2.3. Módulo dinâmico e ângulo de fase

É interessante analisar as características da vibração harmônica estacionária dos modelos viscoelásticos sem levar em conta ainda o efeito de inércia, ou seja, antes de introduzir massa nos modelos discretos da seção anterior. Assim, considere-se o deslocamento harmônico  $u(t) = u_0 e^{i\bar{\omega}t}$ , com frequência  $\bar{\omega}$ . A força interna no modelo pode ser escrita como (Flügge, 1975; Lakes, 2009):

$$f(t) = \Phi_{(\bar{\omega})}^* u(t) = (\Phi_1^* + i \Phi_2^*) u(t) \quad (2.28)$$

Na equação anterior,  $\Phi_{(\bar{\omega})}^*$  é uma função complexa da frequência. A sua parte real  $\Phi_1^*$ , é conhecida como módulo de armazenamento e corresponde à parte da força que está em fase com o deslocamento, a parte imaginária  $\Phi_2^*$ , conhecida como módulo de perda, define a parte da força que forma um ângulo de fase de  $\pi/2$  com o deslocamento. Portanto, a parte da força que corresponde ao módulo de armazenamento realiza trabalho positivo, enquanto que a componente da força obtida com o módulo de perda produz trabalho negativo, sendo a responsável pela energia dissipada.

Deste modo, a força interna e o deslocamento formam entre eles um ângulo de fase  $\delta$ , a tangente deste ângulo pode ser calculada pela razão entre o módulo de perda e o módulo de armazenamento, assim:

$$\tan \delta_{(\omega)} = \frac{\phi_2^*}{\phi_1^*} \quad (2.29)$$

Define-se como módulo dinâmico o módulo do número complexo  $\phi_{(\bar{\omega})}^*$  que relaciona a força interna máxima com deslocamento máximo  $\rho$ :

$$f_{max} = |\phi_{(\bar{\omega})}^*| \rho \quad (2.30)$$

No modelo Kelvin tem-se:

$$\phi_{(\omega)}^* = k + i c \bar{\omega} \quad (2.31)$$

Portanto o módulo dinâmico é igual a:

$$|\phi_{(\omega)}^*| = \sqrt{k^2 + (c \bar{\omega})^2} \quad (2.32)$$

e a tangente de  $\delta$ :

$$\tan \delta_{(\omega)} = \frac{c \bar{\omega}}{k} \quad (2.33)$$

Pode-se observar que no modelo Kelvin o módulo de armazenamento não depende da frequência e é igual à constante de rigidez  $k$ , enquanto que o módulo de perda varia proporcionalmente com a frequência. Assim, a energia que pode dissipar este modelo não tem limite superior, aumentando com a frequência da vibração harmônica.

Da mesma forma, a tangente do ângulo de fase aumenta proporcionalmente com a frequência. Portanto para valores altos da frequência a força interna estará fora de fase com o deslocamento, com ângulo de fase de quase  $\pi/2$ . O módulo dinâmico também aumenta em função da frequência, logo, à medida que a frequência de vibração aumenta, a força interna no modelo deve aumentar.

No modelo sólido padrão, os módulos de armazenamento e de perda são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= k_\infty + k_1 \frac{c_1^2 \bar{\omega}^2}{k_1^2 + c_1^2 \bar{\omega}^2} \\ \phi_2^* &= \frac{k_1^2 c_1 \bar{\omega}}{k_1^2 + c_1^2 \bar{\omega}^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Assim o módulo dinâmico é igual a:

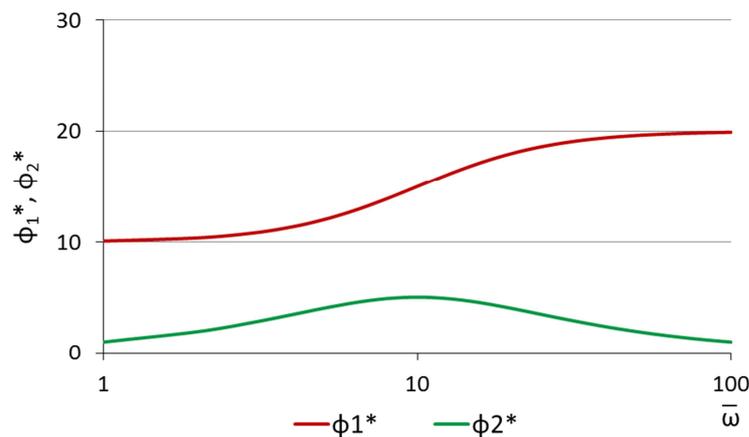
$$|\phi_{(\omega)}^*| = \sqrt{\frac{c_1^2 \bar{\omega}^2 (k_\infty + k_1)^2 + k_\infty^2 k_1^2}{k_1^2 + c_1^2 \bar{\omega}^2}} \quad (2.35)$$

e a tangente do ângulo de fase  $\delta$ :

$$\tan \delta_{(\omega)} = \frac{\bar{\omega} c_1 k_1^2}{k_\infty k_1^2 + \bar{\omega}^2 c_1^2 (k_\infty + k_1)} \quad (2.36)$$

Da Figura 2.9 à Figura 2.11 são adotados os valores arbitrários de  $k = k_\infty = k_1 = 10$  e  $c = c_1 = 1$ , para mostrar qualitativamente o comportamento destes modelos.

A Figura 2.9 apresenta a variação do módulo de armazenamento e de perda para o modelo sólido padrão. Pode-se observar que a maior variação dos dois módulos concentra-se ao longo de uma faixa de frequências. O módulo de perda não aumenta indefinidamente como no caso do modelo Kelvin. Ao contrário, a energia dissipada pelo modelo sólido padrão diminui e tende para zero no caso de vibrações harmônicas de frequência alta.

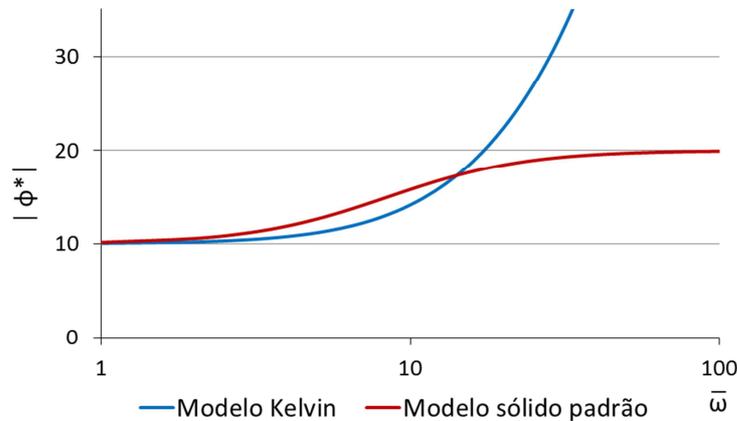


**Figura 2.9** Módulo de armazenamento e perda do modelo sólido padrão.

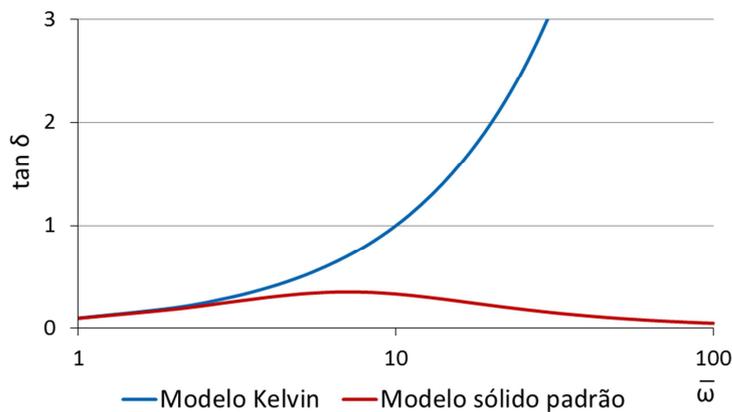
A Figura 2.10 e Figura 2.11 comparam o módulo dinâmico e o ângulo de fase dos modelos de Kelvin e sólido padrão. No modelo sólido padrão o módulo dinâmico não aumenta indefinidamente, assim a força interna permanece com um valor praticamente constante nos casos de vibração harmônica com frequência alta. Nestes casos o ângulo de fase entre a força interna e o deslocamento diminui e tende para zero com a frequência tendendo para infinito.

As características do comportamento do modelo sólido padrão mencionadas acima são observadas em vibrações de alta frequência (Haan e Sluimer, 2001), ou

seja, em testes de movimento harmônico de alta frequência a energia dissipada é independente da frequência e a força interna está em fase com o deslocamento.



**Figura 2.10** Módulo dinâmico do modelo Kelvin e do modelo sólido padrão.



**Figura 2.11** Tangente do ângulo de fase  $\delta$  do modelo Kelvin e do modelo sólido padrão.

Note-se que até agora não foi considerado o efeito de inércia nos modelos viscoelásticos. Quando este efeito é importante o modelo Kelvin e o modelo sólido padrão têm um comportamento similar no caso de vibrações harmônicas estacionárias.

## 2.4. Energia dissipada

A energia dissipada no movimento harmônico estacionário pode ser calculada integrando o trabalho realizado pela força interna ao longo de um ciclo:

$$E_D = \int f du = \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} f \frac{du}{dt} dt \quad (2.37)$$

Assumindo:

$$\begin{aligned} f &= f_{max} \sin(\bar{\omega}t) \\ u &= \rho \sin(\bar{\omega}t - \delta) \end{aligned} \quad (2.38)$$

tem-se:

$$E_D = \int f du = \bar{\omega} f_{max} \rho \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}t) \cos(\bar{\omega}t - \delta) dt \quad (2.39)$$

então:

$$E_D = f_{max} \rho \pi \sin(\delta) \quad (2.40)$$

Com a eq. (2.30) e a fórmula para o módulo de perda:

$$\phi_2^* = |\phi_{(\bar{\omega})}^*| \sin(\delta) \quad (2.41)$$

a energia dissipada por ciclo nos modelos viscoelásticos é igual a:

$$E_D = \pi \phi_2^* \rho^2 \quad (2.42)$$

Assim, no modelo Kelvin tem-se:

$$E_D = \pi c \bar{\omega} \rho^2 \quad (2.43)$$

A energia dissipada no modelo Kelvin aumenta proporcionalmente com a frequência do movimento.

Se o amortecimento viscoso é substituído pelo coeficiente de amortecimento crítico  $c = 2 \xi_c m \omega$ , a energia dissipada pelo modelo Kelvin é igual a energia dissipada pelo amortecimento proporcional, eq.(2.7), que leva em conta a massa.

No modelo sólido padrão:

$$E_D = \frac{\pi k_1^2 c_1 \bar{\omega} \rho^2}{k_1^2 + c_1^2 \bar{\omega}^2} \quad (2.44)$$

A energia dissipada pelo modelo sólido padrão depende também da frequência do movimento, no entanto não aumenta indefinidamente, como mostra a função do módulo de perda da Figura 2.9.

## 2.5. Equações de equilíbrio dinâmico

Quando uma massa concentrada é incorporada no modelo viscoelástico discreto, o movimento do sistema de um grau de liberdade pode ser descrito pela seguinte equação:

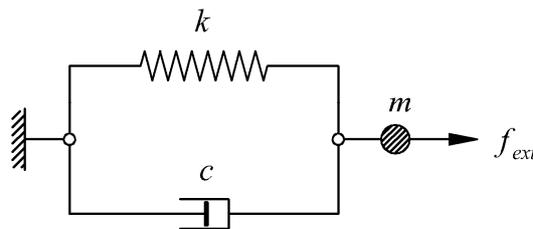
$$m \ddot{u} = f_{ext} - f \quad (2.45)$$

com a força interna definida pela equação constitutiva do modelo viscoelástico.

No caso do modelo Kelvin com massa, Figura 2.12, a equação de movimento resulta ser:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f_{ext} \quad (2.46)$$

Esta é a mesma equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade com amortecimento viscoso ou proporcional.

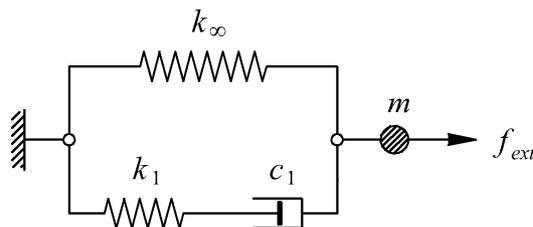


**Figura 2.12 Modelo Kelvin com massa concentrada.**

No caso do modelo sólido padrão com massa, Figura 2.13, a equação de movimento após a substituição da força interna é igual a:

$$\frac{m c_1}{k_1} \ddot{u} + m \dot{u} + c_1 \left(1 + \frac{k_\infty}{k_1}\right) \dot{u} + k_\infty u = \frac{c_1}{k_1} \dot{f}_{ext} + f_{ext} \quad (2.47)$$

A equação anterior é uma equação diferencial linear de terceira ordem, que tem como caso particular a equação de movimento para amortecimento proporcional (modelo Kelvin com massa) quando o parâmetro  $k_1$  tende a infinito.



**Figura 2.13 Modelo sólido padrão com massa concentrada.**

No caso de vibração livre, o termo da direita da equação de movimento para o modelo sólido padrão com massa é igual a zero.

$$\frac{m c_1}{k_1} \ddot{u} + m \dot{u} + c_1 \left(1 + \frac{k_\infty}{k_1}\right) u + k_\infty u = 0 \quad (2.48)$$

Haan e Sluimer (2001) apresentam duas soluções para esta equação:

$$u = A_1 e^{-C_1 t} + A_2 e^{-C_2 t} + A_3 e^{-C_3 t} \quad (2.49)$$

$$u = A_1 e^{-(C_1 + iC_2)t} + A_2 e^{-(C_1 - iC_2)t} + A_3 e^{-C_3 t} \quad (2.50)$$

A primeira solução com três raízes negativas corresponde a uma resposta com amortecimento exponencial não periódica. A segunda solução é a soma de um amortecimento exponencial harmônico e um amortecimento exponencial, esta última pode ser escrita da seguinte forma:

$$u = e^{-C_1 t} [A_1 \cos(C_2 t) + A_2 \sin(C_2 t)] + A_3 e^{-C_3 t} \quad (2.51)$$

onde  $A_i$  são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e  $C_i$  são as raízes da equação característica da equação diferencial.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2^{4/3} m s - 4k_1 m r^{1/3} - 2^{2/3} r^{2/3}}{12 m c_1 r^{1/3}} \\ C_2 &= \frac{2^{4/3} 3^{1/2} m s + 2^{2/3} 3^{1/2} r^{2/3}}{12 m c_1 r^{1/3}} \\ C_3 &= \frac{2^{2/3} r^{2/3} - 2^{4/3} m s - 2k_1 m r^{1/3}}{6 m c_1 r^{1/3}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

sendo

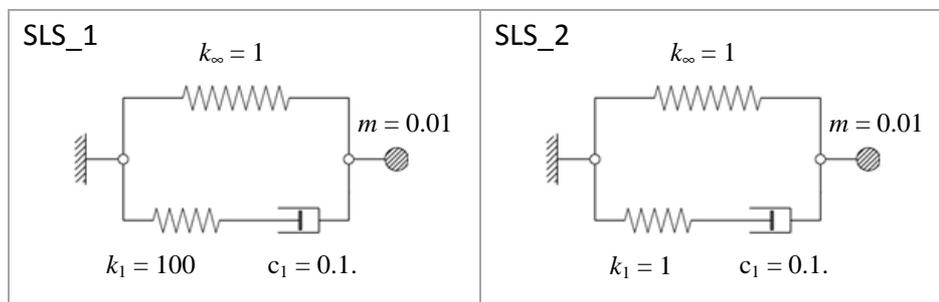
$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2 \\ r_1 &= 9m^2 c_1^2 k_1 (k_1 - 2k_\infty) - 2m^3 k_1^3 \\ r_2 &= 3^{3/2} m c_1 \sqrt{4m c_1^4 (k_\infty + k_1)^3 + m^2 c_1^2 k_1^2 (8k_\infty^2 - 20k_\infty k_1 - k_1^2) + 4k_\infty k_1^2 m^3} \\ s &= 3 c_1^2 (k_\infty + k_1) - m k_1^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Haan e Sluimer (2001) indicam que Struik em 1967 sugeriu que a solução para vibrações livres fosse uma superposição de exponenciais negativos (não periódica), ou a soma de uma vibração harmônica com amortecimento exponencial mais um termo exponencial negativo, eq. (2.51).

É de interesse notar que a solução desta equação precisa de três condições iniciais: deslocamento, velocidade e aceleração. Na vibração livre em que não

existe força externa atuante, a única forma de ter aceleração inicial diferente de zero é com um impulso infinitesimal no início do movimento  $t = 0$ . Na vibração forçada, uma condição de aceleração inicial pode representar, de forma mais adequada, o caso teórico de carga súbita.

Para apresentar qualitativamente a resposta de vibração livre do modelo sólido padrão com massa, aplicam-se três condições iniciais diferentes a dois modelos do tipo sólido padrão com os parâmetros indicados na Figura 2.14 e Tabela 2.1. No primeiro modelo a mola em série com o amortecedor é muito mais rígida que a mola em paralelo. Assim o comportamento do primeiro modelo tende ao que seria o comportamento do modelo Kelvin.



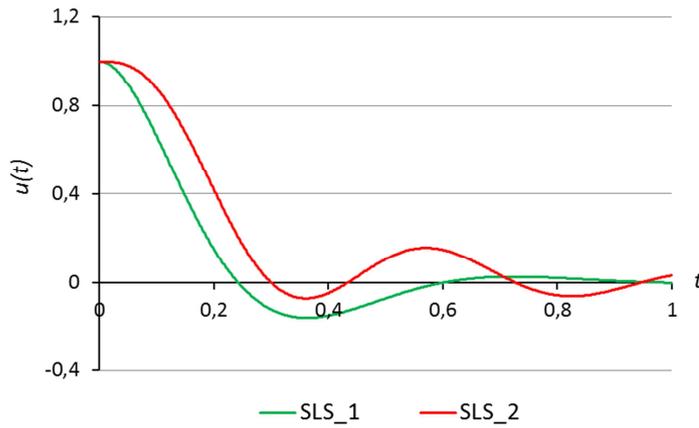
**Figura 2.14** Parâmetros viscoelásticos dos modelos SLS\_1 e SLS\_2.

Figura 2.15 à Figura 2.17 apresentam a resposta dos modelos viscoelásticos para as três condições iniciais: deslocamento  $u(0) = 1$ , velocidade  $\dot{u}(0) = 1$  e aceleração  $\ddot{u}(0) = 1$ , respectivamente.

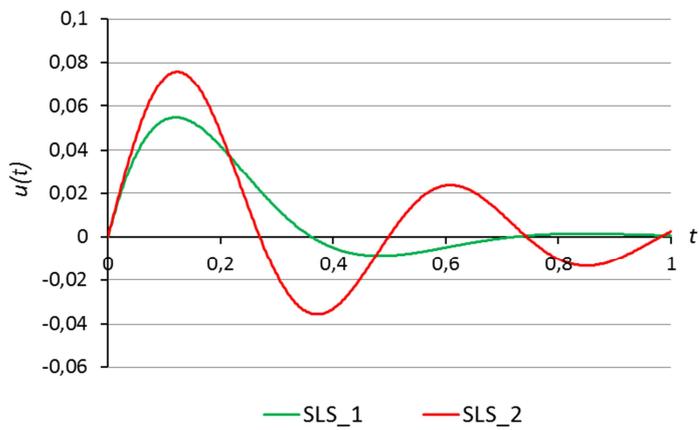
**Tabela 2.1** Parâmetros viscoelásticos dos modelos SLS\_1 e SLS\_2.

Modelo	Parâmetros Viscoelásticos				
	$k_\infty$	$k_1$	$c_1$	$\tau_1$	$\tau_r$
SLS_1	1	100	0.1	0.001	0.101
SLS_2	1	1	0.1	0.1	0.2

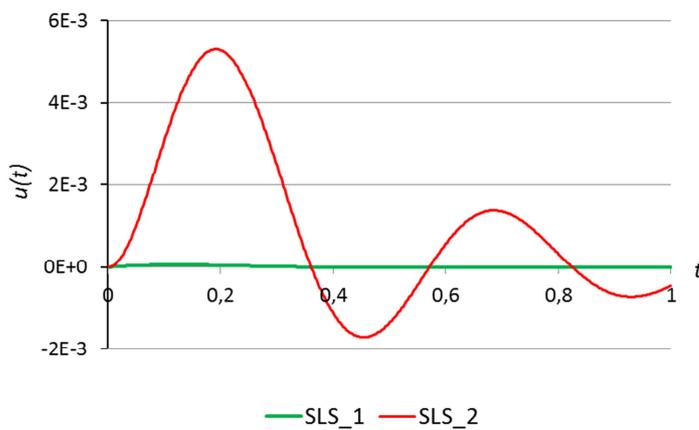
Pode-se observar que nos casos de deslocamento e velocidade inicial igual a um, a diferença na resposta é principalmente causada pela quantidade de amortecimento introduzido por cada modelo. Nota-se que a relação  $k_1 / k_\infty$  é maior no modelo SLS\_1, portanto a energia de deformação que pode ser armazenada no arranjo mola-amortecedor é maior, logo o amortecedor em série do primeiro modelo pode dissipar maior energia, ainda que o valor da constante  $c_1$  nos dois modelos seja o mesmo.



**Figura 2.15** Resposta dos modelos SLS\_1 e SLS\_2 em vibração livre.  
**Condição inicial: deslocamento unitário.**



**Figura 2.16** Resposta dos modelos SLS\_1 e SLS\_2 em vibração livre.  
**Condição inicial: velocidade unitária.**



**Figura 2.17** Resposta dos modelos SLS\_1 e SLS\_2 em vibração livre.  
**Condição inicial: aceleração unitária.**

A diferença nas respostas para a condição de aceleração inicial não é mais justificada pela diferença entre a quantidade de amortecimento. O deslocamento é maior na resposta do segundo modelo porque este apresenta maior flexibilidade para o caso de carga súbita.

## 2.6. Modelo viscoelástico em sistemas discretos

A discretização do contínuo em uma, duas ou três dimensões se dá em geral com a utilização de subdivisões, chamadas elementos. O modelo viscoelástico é aplicado como relação constitutiva do material. Portanto, a implementação deste modelo deve ser realizada a partir da própria idealização do elemento estrutural.

Nos elementos tridimensionais o modelo viscoelástico poderia ser aplicado a todas as deformações, sejam normais e cisalhantes, ou volumétricas e desviadoras. No entanto é assumido em geral que o comportamento viscoelástico é uma característica das deformações desviadoras, em uma analogia com a teoria da plasticidade em que é comum associar o fenômeno plástico com a mudança de forma do material. Assim, as deformações volumétricas permanecem elásticas enquanto as deformações desviadoras têm comportamento viscoelástico.

Deste modo, os parâmetros viscoelásticos  $k_\infty$ ,  $k_I$ ,  $c_I$  e a força interna  $f$ , definidos para sistemas de um grau de liberdade podem ser substituídos por  $2G_\infty$ ,  $2G_I$ ,  $2\eta_I$  e  $S_d$ , respectivamente, onde  $G$  representa o módulo de cisalhamento do material e  $S_d$  o tensor desviador de tensões.

No caso de elementos unidimensionais como vigas, além de aplicar o comportamento viscoelástico nas deformações desviadoras, existe a alternativa de aplicá-lo na deformação cisalhante. Ainda, no primeiro caso, as deformações desviadoras podem ser calculadas com a formulação de Euler-Bernoulli, sem considerar a deformação cisalhante ou com a hipótese de Timoshenko, levando em conta a deformação cisalhante. O segundo caso, que aplica o modelo viscoelástico na deformação cisalhante, deve ser formulado com a hipótese de Timoshenko.

## 2.7.

### Amortecimento viscoelástico em sistemas contínuos

Quando o amortecimento é aplicado como relação constitutiva do material, entende-se que internamente existem mecanismos que dissipam a energia do sistema. Em geral, a energia dissipada depende da tensão aplicada em cada ciclo, portanto dentro de um contínuo com carregamento arbitrário o amortecimento não será uniforme e dependerá da distribuição de tensões. Assim, para medir a capacidade de amortecimento de um material, define-se o amortecimento específico como o amortecimento por unidade de volume submetido a uma tensão constante.

Nos materiais viscoelásticos a tangente do ângulo de fase, eq. (2.29), conhecida como fator de perda do material, pode também ser usada como medida de amortecimento, dado que a energia dissipada por unidade de volume, eq. (2.44), e a energia máxima de deformação armazenada variam com o quadrado da deformação. Portanto o fator de perda não depende da deformação, eq. (2.36), e pode ser usado como uma propriedade do material que varia em função da frequência e da temperatura.

Cuidados devem ser tomados no uso do fator de perda do material,  $\tan(\delta)$ , com outros tipos de amortecimento em que a energia dissipada não é proporcional ao quadrado da deformação.

Da mesma forma, deve-se salientar que outras quantidades usadas para medir o amortecimento, como o decremento logarítmico, na realidade são medidas do amortecimento do sistema e não medidas do amortecimento específico do material.

Nos elementos unidimensionais como vigas, em que não exista necessidade de integração numérica, o amortecimento levará em conta a distribuição de esforços ao longo do contínuo. No caso de elementos finitos bidimensionais e tridimensionais as relações constitutivas do modelo viscoelástico são calculadas nos pontos de integração de Gauss. Assim sendo o amortecimento introduzido estará em função da distribuição de tensões, embora de forma aproximada dependendo da discretização adotada.