

# 1 Introdução

## 1.1. Introdução

O estudo de cargas críticas de sistemas não conservativos foi promovido pelos grandes avanços da indústria aeronáutica e aeroespacial no século vinte. São vários os sistemas ou elementos estruturais que suportam cargas que não podem ser derivadas a partir de um potencial. Exemplos são o problema conhecido como a coluna de Beck, os eixos rotativos de máquinas e as asas de aviões em voo.

Ziegler (1968) e Bolotin (1963) escreveram tratados clássicos sobre sistemas não conservativos. Nestes trabalhos encontram-se os conceitos básicos, a classificação e a solução de vários problemas de estabilidade dinâmica. A principal diferença com o estudo da estabilidade de sistemas conservativos é que o problema deixa de ser estático, portanto deve-se incluir o efeito da inércia que corresponde à massa do sistema.

Foram realizados vários trabalhos e pesquisas na determinação de cargas críticas de sistemas não conservativos, cada trabalho investigando problemas específicos de estabilidade dinâmica como: métodos de análise, condições de contorno, carregamentos externos, modelos constitutivos do material e métodos numéricos.

O trabalho de Argyris e Straub (1982) apresenta a formulação de equações discretas de elementos finitos não lineares com pequenas deformações, mostrando resultados para uma viga engastada com carregamento e amortecimento transversal na extremidade livre.

Suanno (1988) mostra que a deformação cisalhante tem influência significativa no cálculo da carga crítica dinâmica de vigas curtas. Observa-se uma redução mais pronunciada da carga crítica pelo efeito da deformação cisalhante do que no caso de sistemas conservativos. Esta deformação ocasiona uma redução mais rápida da frequência de vibração do segundo modo, levando ao acoplamento das duas primeiras frequências com um menor valor da carga, ao passo que no

cálculo da carga crítica estática, a influência da deformação cisalhante é desprezível uma vez que precisa somente da consideração do primeiro modo.

Bolotin e Zhinzher (1969) e Kar (1980) entre outros, investigaram a influência do amortecimento na carga crítica dinâmica de vigas. Na maioria dos trabalhos o amortecimento é considerado viscoso e proporcional à velocidade, seja com elementos externos aplicados a graus de liberdade discretos, com amortecimento contínuo proporcional à velocidade do ponto material ou ainda amortecimento interno proporcional à velocidade de deformação. Em menor número, existem trabalhos que consideram amortecimento viscoelástico aplicado no modelo constitutivo do material.

Nos casos de amortecimento interno e viscoelástico observa-se que a carga crítica dinâmica para pequenos valores de amortecimento é menor que a carga crítica dinâmica sem levar em conta o amortecimento, contrário do que seria esperado. Este fenômeno desestabilizador é conhecido como paradoxo de Ziegler.

Kirillov (2004, 2007), Kirillov e Seyranian (2005) e Kirillov e Verhulst (2010), apresentam uma formulação aproximada para o cálculo da carga crítica dinâmica que permite o cálculo do efeito desestabilizador em forma analítica. Esta formulação é aplicada a vários exemplos de sistemas estruturais e mecânicos que exibem este fenômeno desestabilizador.

Kar (1980) calcula a carga crítica dinâmica para uma viga em balanço não prismática com amortecimento interno e externo, considerando a teoria de Euler-Bernoulli para vigas. Bolotin e Zhinzher (1969) estudam o efeito do amortecimento na estabilidade de sistemas contínuos e discretos. A solução do problema de autovalor característico é obtida através do desenvolvimento dos coeficientes de amortecimento em séries de potências fracionárias. Nesse trabalho, é adotado o modelo viscoelástico sólido padrão para analisar o efeito desestabilizador de pequenos valores de amortecimento.

O uso de modelos viscoelásticos para introduzir amortecimento na resposta dinâmica não é recente: ao longo da história várias formas de dissipação de energia foram estudadas.

Desde as primeiras observações de amortecimento realizadas por Coulomb no século XVIII, vários estudos e definições de amortecimento encontram-se na literatura, alguns deles referidos nos trabalhos de Neumark (1957), Snowdon (1968), Koten (1977), Muravskii (2004) e Muscolino et. al. (2005). Em geral

podem-se distinguir três tipos de amortecimento em função da sua origem: amortecimento interno ou do material, amortecimento produzido em nós e interfaces, às vezes denominado amortecimento estrutural, e o amortecimento produzido pela interação fluido-estrutura.

Em função da hipótese adotada para o amortecimento, as seguintes definições são utilizadas: amortecimento sólido ou estrutural, amortecimento viscoso e amortecimento viscoelástico. O amortecimento sólido é aquele que provoca uma força dissipativa em fase com a velocidade, mas proporcional à rigidez. Este tipo de amortecimento é também denominado de amortecimento com histerese, embora o termo histerese possa ser usado também para outras formas de amortecimento. O amortecimento viscoso ou proporcional faz referência a uma força de amortecimento proporcional à velocidade. Quando esta força é somada diretamente com a força proporcional à rigidez o amortecimento corresponde a um arranjo de mola-amortecedor em paralelo conhecido como modelo Kelvin. O amortecimento viscoelástico, embora possa incluir na sua definição o amortecimento viscoso (modelo Kelvin), tem sido usado para representar outros tipos de arranjos de componentes, por exemplo, o modelo Maxwell e o modelo sólido padrão.

No que se trata de sistemas com vários graus de liberdade, o amortecimento viscoso ou amortecimento de Rayleigh foi amplamente utilizado na engenharia estrutural, principalmente pela sua simplicidade e devido a que os resultados obtidos com este tipo de amortecimento não apresentavam grandes erros quando comparados com medições de campo, não sendo necessário um maior esforço para representar melhor o efeito do amortecimento em estruturas comuns de concreto ou aço.

No entanto, no livro de Wilson (2002), o amortecimento viscoso ou de Rayleigh é definido como uma propriedade do modelo computacional e não como uma propriedade real da estrutura. Ainda, apresenta casos nos quais o uso de amortecimento viscoso introduz erros significativos no cálculo da reação basal de pórticos submetidos a cargas sísmicas. A causa para estes erros são as forças externas fictícias devidas ao amortecimento.

No trabalho de Adhikari (2000), no que se refere a sistemas com vários graus de liberdade, o amortecimento é definido como viscoso ou não viscoso. O primeiro é o amortecimento proporcional conhecido como amortecimento de

Rayleigh. No segundo tipo de amortecimento a relação esforço deformação inclui uma integral de convolução através da história do movimento, o amortecimento viscoelástico definido pela integral de Boltzmann pertence a esta categoria.

Definições e tipos mais recentes de amortecimento interno encontram-se em Piersol e Paez (2010). Nesse trabalho indicam-se duas categorias de amortecimento do material: amortecimento com histerese estática e amortecimento com histerese dinâmica. Na primeira as relações de esforço deformação não dependem do tempo, portanto pertencem a este grupo o amortecimento causado pela plasticidade e pela magnetoelasticidade. Na segunda categoria encontram-se os tipos de amortecimento com relações esforço-deformação dependentes do tempo, entre eles o amortecimento viscoelástico e o amortecimento termoelástico.

A teoria de materiais viscoelásticos tem sido amplamente estudada, seja para introduzir amortecimento do tipo viscoelástico como expressado nos parágrafos anteriores, seja para modelar processos dependentes do tempo como, por exemplo, a deformação lenta do concreto ou a relaxação do aço. No caso em que o efeito do amortecimento precisa ser modelado, os tempos de relaxação serão pequenos. Enquanto que nos processos de deformação lenta e relaxação, em geral, os tempos de relaxação serão maiores. Na atualidade, a consideração de amortecimento viscoelástico tem recebido maior atenção, em grande parte, devido à utilização de materiais como os polímeros e elastômeros para reduzir as vibrações em vários tipos de estruturas, a vantagem destes materiais é a sua maior leveza e maior amortecimento.

O estudo da teoria de materiais viscoelásticos começa já no século XIX com o trabalho sobre viscoelasticidade linear de Boltzmann em 1874. Naquele trabalho formulou-se o princípio de superposição e em consequência a relação conhecida até agora como integral de superposição de Boltzmann.

Várias leis constitutivas para materiais viscoelásticos têm sido adotadas ao longo do século passado, entre as mais simples estão aquelas que resultam de modelos mecânicos obtidos de algum tipo de arranjo de molas e amortecedores, dando origem a funções exponenciais de relaxação e deformação lenta. O livro de Flügge (1975) apresenta um estudo completo sobre esse tipo de modelos.

Entre outras relações constitutivas têm-se as derivadas fracionárias (Surguladze, 2002), leis potenciais, exponenciais estendidas e modelos de Kuhn ou deformação lenta logarítmica (Lakes, 2009).

O artigo de Coleman e Noll (1961) apresenta os fundamentos da aplicação da viscoelasticidade linear em problemas com deformações infinitesimais e deformações finitas.

Entre os primeiros algoritmos para elementos finitos que implementam materiais viscoelásticos representados por integrais hereditárias, têm-se o algoritmo de Taylor et. al. (1970) e o algoritmo de Bažant e Spencer (1973), o segundo algoritmo utiliza series de Dirichlet relacionadas a cadeias Kelvin e Maxwell para a análise de deformação lenta do concreto.

Baseados em Taylor et.al. (1970), Simo e Hughes (1998), apresentam um algoritmo para a implementação de modelos viscoelásticos exponenciais na formulação de elementos finitos. Este algoritmo utiliza uma fórmula recorrente para a determinação de esforços, portanto somente os esforços do passo anterior precisam ser armazenados. Uma matriz constitutiva consistente com a integração de esforços é usada no processo iterativo. Este algoritmo tem aproximação de segunda ordem e é incondicionalmente estável.

Vasques et. al. (2010) apresentam uma descrição de alguns métodos de implementação no domínio do tempo e da frequência, usados com outras relações constitutivas de viscoelasticidade linear. No domínio da frequência encontram-se entre outros o método de energia modal de deformação e o método de autovalor complexo. No domínio do tempo, o método de Golla-Hughes-McTavish e o modelo de deslocamentos anelásticos de Trindade et. al. (2000) são apresentados.

Outros vários trabalhos consideram comportamento viscoelástico do material na modelagem numérica, entre eles Reese e Govindjee (1998) em problemas de deformação finita, Kaliske e Rothert (1997) em análises dinâmicas de curta e longa duração com elementos tridimensionais e Müller et. al. (2009) na análise dinâmica com elementos finitos híbridos e deformações finitas.

A resposta dinâmica de materiais viscolásticos depende do modelo viscoelástico e dos parâmetros adotados. Essa resposta está em função da rigidez, que é variável com o tempo, e do amortecimento ou energia dissipada pelo modelo.

Elementos unidimensionais e tridimensionais são usados neste trabalho para a modelagem de vigas e tubos, respectivamente. Os elementos tridimensionais são sólidos isoparamétricos com modos de deformação incompatíveis. A formulação destes elementos pode ser encontrada em Ibrahimbegovic (2009), Wilson (2002), Gharzeddine e Ibrahimbegovic (2000), Simo e Armero (1992), Simo e Rifai (1990) e Simo et.al. (1993).

## **1.2. Objetivo**

O interesse deste trabalho é o estudo do efeito do amortecimento e da deformação de cisalhamento na estabilidade dinâmica de vigas e tubos. O amortecimento é introduzido através de amortecimento proporcional (amortecimento de Rayleig) ou amortecimento viscoelástico, este último aplicado na forma de relação constitutiva do material. Alternativas na forma de aplicação do amortecimento viscoelástico são brevemente discutidas. Comparam-se os resultados de vigas que levam em conta a deformação cisalhante e vigas que seguem a teoria de Euler-Bernoulli, em que tal deformação é desprezada.

Em analogia à plasticidade dos metais, assume-se em geral que o comportamento viscoelástico se aplica unicamente às deformações desviadoras. Portanto, espera-se que o amortecimento tenha maior influência nos modos de deformação de ordem mais alta afetando os resultados de carga crítica dinâmica.

## **1.3. Metodologia**

A carga crítica dinâmica ou de “flutter” é obtida através da solução do problema de autovalor da equação característica. Esta carga indica o início iminente de “flutter”. Estes resultados são complementados com o estudo de respostas de deslocamentos no tempo. A formulação das equações segue o método dos elementos finitos.

Um programa em MatLab é implementado para as análises estática, dinâmica e de carga crítica de elementos de viga com as hipóteses de Euler-Bernoulli, elementos de viga com as hipótese de Timoshenko e para elementos tridimensionais incompatíveis de oito nós.

Amortecimento proporcional ou amortecimento viscoelástico podem ser considerados nas análises com vigas. O amortecimento viscoelástico pode ser aplicado às deformações desviadoras ou às deformações cisalhantes.

Para efeitos de comparação, as análises estáticas lineares e não lineares do programa implementado incluem elementos tridimensionais compatíveis de oito e vinte e sete nós. Os elementos de viga (“frame”) e o elemento tridimensional de oito nós do programa Sap2000 são também utilizados em análises estáticas.

#### **1.4. Organização do trabalho**

O capítulo 2 apresenta conceitos gerais sobre amortecimento, mostrando algumas características importantes na análise de dissipação de energia que permitem comparar o amortecimento viscoelástico com o amortecimento viscoso ou proporcional. Ambos os amortecimentos são utilizados neste trabalho com o intuito de estudar o comportamento de vigas e tubos frente a cargas dinâmicas, com ênfase nas cargas seguidoras não conservativas.

No capítulo 3 apresenta-se a formulação de elementos finitos utilizada, os algoritmos escolhidos para a solução das equações do problema dinâmico, conservativo e não conservativo, e os tipos de elementos usados na discretização de vigas e tubos.

O capítulo 4 trata da implementação do amortecimento viscoelástico nas equações que resultam da formulação de elementos finitos, começando pelo algoritmo geral apresentado por Simo e Hughes (1998) e apresentando as expressões resultantes para cada tipo de elemento finito utilizado neste trabalho.

O capítulo 5 mostra exemplos de análises dinâmicas de vigas comparando amortecimento viscoelástico com amortecimento proporcional, análises de carga crítica dinâmica de elementos de viga formulados com a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko, cargas críticas “flutter” de vigas unidimensionais de material viscoelástico e, por último, análises de cargas críticas estáticas e dinâmicas de tubos modelados com elementos tridimensionais com relações constitutivas viscoelásticas.

O capítulo 6 apresenta as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros. Por último, o anexo mostra equações e matrizes que pelo tamanho não foram incluídas como equações no corpo do texto.