3
Formulação de problemas acoplados fluido mecânicos mecânico para fluxo em reservatórios

3.1.
Introdução

Esse capítulo visa apresentar o conjunto de equações necessárias à descrição numérica dos problemas de acoplamento fluido mecânico em fluxo em meio porosos. Primeiramente, apresentam-se algumas hipóteses assumidas para a definição das equações governantes dos problemas e, a seguir, as equações governantes são descritas sob a formulação do método dos elementos finitos, bem como, algumas características da discretização dessas equações no domínio.

3.2.
Conceitos iniciais

Segundo Lewis e Schrefler (1987), a fase sólida é um esqueleto poroso envolto por um ou mais fluidos, as tensões cisalhantes nas fases fluidas são muito pequenas e a pressão é exercida ao redor de toda a fase sólida. Considera-se ainda a aplicação da teoria das pequenas deformações em todo o desenvolvimento das equações governantes, de modo que a Lei de Darcy é válida em termos de velocidade absoluta do fluido.

Inicialmente o comportamento do fluxo em um meio poroso deformável é tratado sob uma abordagem contínua e a nível macroscópico, pois uma descrição geral dos processos a nível microscópico é inviável na prática, devido à complexidade do domínio e à impossibilidade de medições de grandezas físicas. Na abordagem contínua, considera-se que cada fase do sistema preenche todo o domínio do meio poroso, formando uma sobreposição do contínuo ("*over lapping continuum*"). Em cada ponto do domínio e para todas as fases, incluindo a fase sólida, as variáveis são, portanto, definíveis. As variáveis são valores médios de um volume elementar representativo (REV) em torno de qualquer ponto considerado no domínio do meio poroso, de modo a independer do tempo e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

da localização no meio poroso.

Sendo o volume do REV composto pela soma do volume V_π das fases únicas π

$$V = \sum_\pi V_\pi \tag{3.1}$$

A média volumétrica de uma grandeza ζ para uma fase π é dada por

$$\langle \zeta_\pi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \zeta_\pi \, dV \tag{3.2}$$

Onde ζ_π é o valor de ζ dentro da fase π e é assumido igual à zero em todas as outras fases.

A sub-região do REV ocupado pela componente sólida é tratada como uma fase com volume V_s e a sub-região ocupada por fluidos é definida comoV_f .

Se o volume da equação(3.2) é substituído pelo volume da fase π, a média volumétrica intrínseca é obtida por:

$$\langle \zeta_\pi \rangle^\pi = \frac{1}{V_\pi} \int_{V_\pi} \zeta_\pi \, dV \tag{3.3}$$

Desde que ζ_π seja zero em todas as fases $\pi' \neq \pi$,

$$\langle \zeta_\pi \rangle^\pi = \frac{1}{V_\pi} \int_V \zeta_\pi \, dV = \frac{V}{V_\pi} \langle \zeta_\pi \rangle \tag{3.4}$$

De acordo com Whitaker (1968) apud Lewis e Schrefler (1987) os resultados obtidos com o processo da média volumétrica apresentam-se válidos quando a relação(3.5) é satisfeita

$$d \ll l \ll L \tag{3.5}$$

Onde d é o comprimento característico microscópico sobre o qual variações significantes de quantidades dependentes no espaço ocorrem, l é o comprimento característico do volume médio e L é o comprimento característico macroscópico do domínio do meio poroso, sobre o qual ocorrem mudanças significativas. O requisito garante que o tamanho selecionado para o que REV remova o efeito da heterogeneidade microscópica sem eliminar o efeito da heterogeneidade macroscópica. Vale ressaltar que as equações médias obtidas independem da geometria do REV.

A porosidade ϕ é definida como a razão entre o volume total de poros de um REV (V_f)e o volume total do REV, e constitui-se importante informação a respeito do meio poroso estudado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

$$\phi = \frac{V_f}{V} \tag{3.6}$$

A fração do volume do espaço do poro ocupado por algum fluido π, (V_π), é definido como saturação da fase e é denotado S_π para a fase π

$$S_\pi = \frac{V_\pi}{V_f} \tag{3.7}$$

Considerando-se a hipótese do meio poroso estar totalmente preenchido por duas fases de fluido (uma fase molhante (w) e uma fase não molhante (nw)):

$$V_f = V_{\mathrm{nw}} + V_{\mathrm{w}}. \tag{3.8}$$

Assim

$$S_w + S_{nw} = 1 \tag{3.9}$$

Onde S_wé o grau de saturação da fase molhante e S_{nw} é o grau de saturação da fase não molhante.

Considerando a hipótese do meio poroso estar totalmente preenchido por três fases fluidas óleo, água e gás, analogamente:

$$S_o + S_w + S_g = 1 \tag{3.10}$$

Ainda considerando três fluidos e convencionando-se que a tensão na fase sólida σ_s é considerada positiva quando esta for de tração e que a tensão na fase líquida σ_f é positiva em caso de compressão (poro-pressão), o vetor das tensões totais médias a nível macroscópico é dividido em duas componentes: uma que representa o efeito das poro-pressões e outra que deforma o esqueleto sólido, tensões efetivas σ'. Pode-se expressar o vetor das tensões totais médias em termos da média volumétrica intrínseca como

$$\langle\sigma\rangle = \frac{1}{V}\int_V \sigma\, dV = \frac{1}{V}\left[\int_{V_s} \sigma\, dV + \int_{V_f} \sigma\, dV\right]$$

$$\langle\sigma\rangle = \frac{V_s}{V}\langle\sigma_s\rangle^s + \frac{V_f}{V}\left[\frac{V_o}{V_f}\langle\sigma_o\rangle^o + \frac{V_w}{V_f}\langle\sigma_w\rangle^w + \frac{V_g}{V_f}\langle\sigma_g\rangle^g\right]$$

$$\langle\sigma\rangle = (1-\phi)\langle\sigma_s\rangle^s + \phi\left[S_o\langle\sigma_o\rangle^o + S_w\langle\sigma_w\rangle^w + S_g\langle\sigma_g\rangle^g\right] \tag{3.11}$$

Para cada fase de fluido π,o tensor de tensões σ_π é dado por

$$\sigma_\pi = \tau_\pi - \mathrm{m}p_\pi \tag{3.12}$$

Ondeτ_π é o vetor de tensão cisalhante, p_π é a pressão (positiva quando de compressão) e m é igual a uma unidade para as componentes da tensão normal e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

zero para as componentes da tensão cisalhante, de modo que $m = [1,1,1,0,0,0]^T$.

Assumindo-se que τ_πé negligenciada na fase fluida, a tensão total é expressa por:

$$\langle\sigma\rangle = (1-\phi)\langle\sigma_s\rangle^s - \phi m\left[S_o\langle\sigma_o\rangle^o + S_w\langle\sigma_w\rangle^w + S_g\langle\sigma_g\rangle^g\right] \quad (3.13)$$

Para uma única fase fluida preenchendo o espaço poroso, no princípio das tensões efetivas, formulado por primeiramente por Terzaghi (1943), a deformação do esqueleto poroso é governada pelas tensões efetivas σ`, causadas por uma pressão de fluido puro p, considerando a convenção já referida anteriormente

$$\sigma = \sigma` - m \cdot p \quad (3.14)$$

Onde σ é a tensão total, σ'é a tensão efetiva e p a pressão de fluido.

Cada partícula sólida é assumida como circundada por um ambiente fluido, a pressão de fluido (no caso comum, pressão macroscópica) age na interface sólido-fluido para cada grão e causa somente uma deformação volumétrica no grão.

Para o fluxo de somente uma fase π, deriva-se a equação (3.14)em termos da média intrínseca

$$\langle\sigma\rangle = (1-\phi)\langle\sigma_s\rangle^s - \phi m\langle p_\pi\rangle^\pi$$

$$\langle\sigma\rangle = (1-\phi)(\langle\sigma_s\rangle^s + m\langle p_\pi\rangle^\pi) - (1-\phi)m\langle p_\pi\rangle^\pi - \phi m\langle p_\pi\rangle^\pi$$

$$\langle\sigma\rangle = \sigma' - m\langle p_\pi\rangle^\pi \quad (3.15)$$

Onde

$$\sigma' = (1-\phi)(\langle\sigma_s\rangle^s + m\langle p_\pi\rangle^\pi) \quad (3.16)$$

Assim, tal qual a definição de Terzaghi, a tensão efetiva é a soma das pressões e a da tensão média na fase sólida.

O mesmo conceito pode ser estendido ao caso onde mais de uma fase fluida ocupa o espaço poroso. Substituindo $\langle p_\pi\rangle^\pi$ da equação (3.16) pela pressão média dos fluidos:

$$\langle p_f\rangle^f = S_o\langle p_o\rangle^o + S_w\langle p_w\rangle^w + S_g\langle p_g\rangle^g \quad (3.17)$$

Ou, omitindo o símbolo da média, a nível macroscópico

$$\bar{p} = S_o p_o + S_w p_w + S_g p_g \quad (3.18)$$

Considerando-se a hipótese do meio poroso estar preenchido por duas fases de fluido, as pressões das fases molhante e não molhante relacionam-se através da pressão capilar dada por

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

$$p_c = p_{nw} - p_w \tag{3.19}$$

Em um meio isotérmico, a pressão capilar é função do grau de saturação da fase molhante.

3.3. Equação de equilíbrio

Este item visa apresentar as equações governantes do comportamento mecânico dos meios porosos deformáveis.

Segundo Müller, se obtém a equação de equilíbrio geral baseado no princípio dos trabalhos virtuais para problemas quase estáticos. A equação de equilíbrio geral relaciona as velocidades das grandezas estáticas reais, como a tensão total $\dot{\sigma}$, as forças de corpo $\dot{b}$ e as forças de superfície $\dot{t}$ especificadas no contorno Γ do domínio Ω, com as grandezas cinemáticas virtuais como as deformações virtuais $\delta\varepsilon$ e os deslocamentos virtuais δu.

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon^T . \dot{\sigma} . d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T . \dot{b} . d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathrm{u}^{\mathrm{T}} . \dot{\mathrm{t}} . \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{3.20}$$

Ainda segundo Müller, as velocidades das tensões totais podem ser expressas em termos das velocidades das tensões efetivas e das velocidades das poro pressões. Essa relação é demonstrada na equação (3.21):

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma`} - m \cdot \dot{p} \tag{3.21}$$

Onde: $\dot{\sigma`}$ é a velocidade da tensão efetiva, $\dot{p}$ a velocidade das poro pressões.

A equação (3.22) descreve a relação constitutiva em termos de velocidade. Considera-se que essa equação constitutiva é relativa à tensão efetiva e que a deformação do esqueleto independe da poro-pressão p, e que para um material genérico não-linear a equação constitutiva pode ser escrita da forma tangencial, de modo a incluir a plasticidade.

$$\dot{\sigma`} = D_T\left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon_c} - \dot{\varepsilon_p} - \dot{\varepsilon_o}\right) + \dot{\sigma`}_0 \tag{3.22}$$

Onde: D_T é a matriz tangente, dependente do nível e da trajetória de tensões efetivas e possui vários modelos constitutivos podem ser utilizados para defini-la;$\dot{\varepsilon}$ representa a velocidade de deformação total do esqueleto;$\dot{\varepsilon_c}$ representa a velocidade das deformações devido à fluência (expressa por uma função de fluência c, dependente do nível e da trajetória de tensões); $\dot{\varepsilon_p}$ a velocidade das deformações volumétricas globais causadas pela compressão uniforme das

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

partículas pela pressão de fluidos nos poros (deformabilidade dos grãos), $\dot{\varepsilon_o}$ representa as velocidades de deformações autógenas, que são as outras deformações não associadas diretamente às mudanças de tensões (expansão, térmica, química, etc.); e $\dot{\sigma`}_0$ representa a velocidade da tensão efetiva inicial.

$$\dot{\varepsilon_c} = c(\sigma').dt \tag{3.23}$$

$$\varepsilon_p = -m\left(\frac{\dot{p}}{3.K_s}\right) \tag{3.24}$$

Onde: K_s representa o módulo volumétrico da fase sólida.

Em mecânica das rochas ada fase sólida é comparável a do esqueleto, de modo que ε_p não pode ser negligenciada. Por simplificação, omitindo-se as parcelas$\dot{\varepsilon_c}$ e $\dot{\varepsilon_0}$ da equação (3.22), tem-se:

$$\dot{\sigma`} = D_T\dot{\varepsilon} + D_T m\left(\frac{\dot{p}}{3.K_s}\right) + \dot{\sigma`}_0 \tag{3.25}$$

Assim, a equação (3.21) pode ser reescrita como:

$$\dot{\sigma`} = D_T\dot{\varepsilon} + D_T m\left(\frac{\dot{p}}{3.K_s}\right) + \dot{\sigma`}_0 \tag{3.26}$$

E a equação (3.21) pode ser reescrita como:

$$\dot{\sigma} = D_T\dot{\varepsilon} + D_T m\left(\frac{\dot{p}}{3.K_s}\right) + \dot{\sigma`}_0 - m\dot{p} \tag{3.27}$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma''} + D_T m\left(\frac{\dot{p}}{3.K_s}\right) - m\dot{p} \tag{3.28}$$

Onde: $\dot{\sigma''} = D_T\dot{\varepsilon} + \dot{\sigma`}_0$ representa a velocidade da tensão responsável por toda a deformação da fase sólida.

Considerando-se a hipótese de linearidade geométrica pode-se descrever a relação entre velocidades de deslocamentos e velocidades de deformações infinitesimais como a equação (3.29):

$$\dot{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\dot{u_{i,j}} + \dot{u_{j,i}}\right) \tag{3.29}$$

Assim, pode-se reescrever a equação (3.20):

$$\int_\Omega \delta\varepsilon^T.D_T.\dot{\varepsilon}.d\Omega + \int_\Omega \delta\varepsilon^T.D_T.m.\dot{p}.\frac{1}{3K_s}.d\Omega + \int_\Omega \delta\varepsilon^T.\dot{\sigma`}_0.d\Omega$$
$$- \int_\Omega \delta\varepsilon^T m\dot{p}\, d\Omega - \int_\Omega \delta u^T.\dot{b}.d\Omega - \int_\Gamma \delta u^T.\dot{t}.d\Gamma = 0 \tag{3.30}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

No caso multifásico, a pressão é um valor médio conhecido. De modo que utilizando a equação (3.30) podem-se obter os deslocamentos e tensões do sistema. No entanto, em geral, o campo de pressão é acoplado às deformações.

3.4. Análise de fluxo em meios porosos

Esse item visa apresentar, genericamente, a descrição das equações que governam o fluxo em meios porosos. Inicialmente é apresentado o equacionamento de fluxo multifásico em meios porosos de uma forma geral, e a seguir as formulações para fluxo bifásico.

Vários autores apresentam essas formulações, inclusive a respeito de partes não mencionadas nesse texto, de modo que os trabalhos de Aziz e Settari (1979) e Peaceman (1977) são recomendados para eventual esclarecimento.

A revisão para montagem da formulação parabólica é basicamente a mesma que é apresentada em Müller (2007) e Frydman (1996). Para a formulação hiperbólica seguiu-se o trabalho clássico de Peaceman (1977) e o trabalho de Mendonça (2003).

3.4.1. Equação do balanço de massa

3.4.1.1. Equação da continuidade para fluxo trifásico

Esse item visa apresentar, genericamente, a descrição das equações que governam o problema hidromecânico com fluxo trifásico em um meio poroso deformável. A seguir apresenta-se a formulação encontrada em Müller (2007), que por sua vez segue a formulação de Lewis e Schrefler (1987), e a apresentada em Peaceman (1977).

Baseado na premissa da conservação de massa de fluido em um fluxo de fluido efetua-se o balanço de massa de fluido tomando-se como volume de controle um cubo elementar constituído de material poroso, Figura 2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

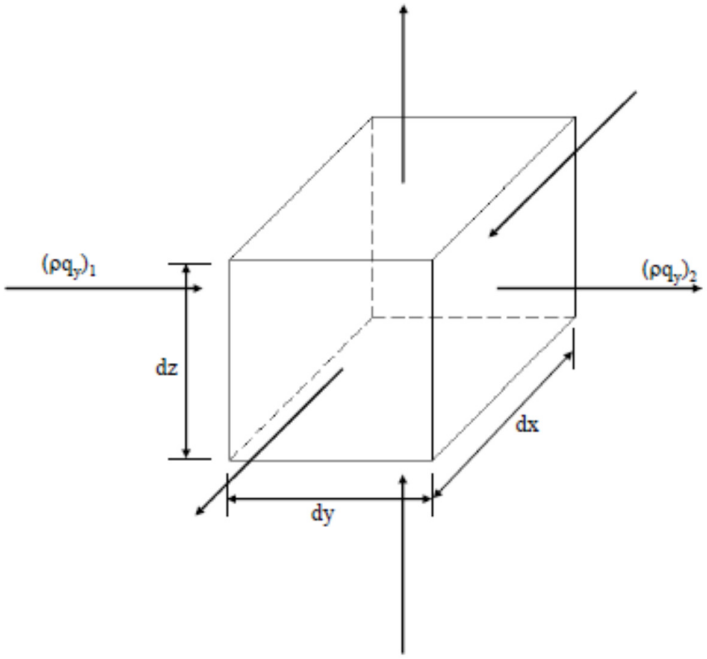

Figura 2 - Volume de controle para balanço de massa do fluido. (Müller, 2007).

Considerando-se que o fluxo de massa de fluido, $(\rho q_y)_1 dxdz$ e $(\rho q_y)_2 dxdz$, na direção dy através da face $dxdz$ seja uma função contínua e diferenciável e sendo ρ e q, respectivamente, densidade do fluido e vazão, pode-se dizer que o fluxo na direção y gera uma diminuição na massa de fluido igual a:

$$(\rho q_y)_2 - (\rho q_y)_1 = \frac{\delta(\rho q_y)}{\delta y} dy \tag{3.31}$$

Adotando procedimento análogo para as demais direções e somando-se as três parcelas, obtém-se o balanço de massa de fluido devido ao fluxo.

$$\left(\frac{\delta(\rho q_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho q_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho q_z)}{\delta z}\right) dxdydz = \nabla^T(\rho q) dxdydz \tag{3.32}$$

Pela equação da continuidade é possível representar o balanço de massa de fluido no meio poroso.

$$\nabla^T(\rho q) dxdydz + \frac{d}{dt}(m_\pi dxdydz) = 0$$

$$\nabla^T(\rho q) + \dot{m}_\pi = 0 \tag{3.33}$$

Onde $\dot{m}_\pi$ é o incremento de massa de fluido numa parcela infinitesimal do meio poroso por unidade de tempo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

Devido à complexidade geométrica do meio poroso, a velocidade do fluido no espaço poroso não pode ser tratada de modo analítico rigoroso, de modo que utilizamos a equação de Darcy para representar o fluxo de fluido. Assim, segundo Müller, em um fluxo trifásico pode-se de uma forma geral expressar a equação da continuidade por

$$-\nabla^T[\lambda_\pi k\nabla(p_\pi+\rho_\pi g h)]+\frac{\phi}{B_\pi}\frac{\partial S_\pi}{\partial t}+\phi S_\pi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{B_\pi}\right)+\phi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{R_{s\pi}S_\pi}{B_\pi}\right)$$
$$+\alpha_f\left[\left(m^T-\frac{1}{3K_s}m^T D_T\right)\dot{\varepsilon}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(1-\phi)}{K_s}-\frac{1}{9{K_s}^2}m^T D_T m\right)\dot{p}\right]=0 \qquad (3.34)$$

Onde:

$$\lambda_\pi=\left(\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi}+R_{s\pi}\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi}\right) \qquad (3.35)$$

$$\alpha_f=\frac{S_\pi}{B_\pi}+\frac{R_{s\pi}S_\pi}{B_\pi} \qquad (3.36)$$

Sendo k a matriz de permeabilidade intrínseca do meio poroso, ϕ a porosidade do meio poroso, $k_{r\pi}$ a permeabilidade relativa do meio, S_π o grau de saturação, p a poro pressão como descrito em (3.17), μ a viscosidade dinâmica do fluido, ga aceleração da gravidade, h a carga de elevação acima de um nível de referência, B o fator de variação de volume, $R_{s\pi}$ o fator de dissolução de gás no líquido, todos referentes à fase π e ∇ o operador de derivação, $\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\quad\frac{\partial}{\partial y}\quad\frac{\partial}{\partial z}\right\}^T$.

A permeabilidade relativa $k_{r\pi}$ é uma função da saturação da π-fase e precisa ser introduzida para modificar a matriz de permeabilidade k, pois em um fluxo multifásico o comportamento do fluido particular é modificado devido à interferência dos outros fluidos no espaço poroso e estudos experimentais mostraram que o fluxo multifásico reduz as permeabilidades do meio da mistura, bem como dos fluidos individualmente.

Quando hidrocarbonetos líquidos, em ambos os estados líquido e gasoso, e água estão fluindo juntos, as fases óleo e água podem ser consideradas imiscíveis. A solução de gás em qualquer uma das fases líquidas traz mudanças no comportamento e nas propriedades do óleo e da água. Esses fenômenos são tratados através da definição de dois parâmetros. Primeiramente, o fator de formação de volume B_π é definido como o volume de uma unidade de massa da π-

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

fase a uma pressão p_π dividido pelo volume padrão ou "*stock tank conditions*" (15,56°C (60°F) sob condições padrões de pressão atmosférica). Para hidrocarbonetos gasosos o volume de referência é o volume nas condições da superfície. A definição de $B_\pi \cdot$, que é função de $p_\pi$difere se o fluido é molhante ou não-molhante.

Se π é não-molhante:

$$B_\pi = \frac{V_\pi}{V_{\pi STC}} \tag{3.37}$$

Na situação da fase molhante tem-se duas componentes, o fluido molhante e o componente não molhante dissolvido. Neste caso:

$$B_\pi(p_\pi) = \frac{V_\pi(p_\pi) + \bar{V}_\pi(p_\pi)}{V_{\pi STC}} \tag{3.38}$$

Onde $\bar{V}_\pi$representa o volume do fluido π não molhante dissolvido sob pressãop_π.

Essa definição requer que $V_{\pi STC} = 0$, ou seja, que a solubilidade sob condições STC seja zero. É evidente que o fator formação de volume relaciona a mudança de densidade com a pressão.

Valores típicos do fator de formação de volume podem ser encontrados em Lewis e Schrefler (1978).

Em segundo lugar, fator de dissolução de gás no líquido $R_{s\pi}$ é utilizado para levar em conta a solubilidade do gás nas fases oleosa e aquosa. Os hidrocarbonetos gasosos no sistema ocorrem em três formas:

(A) gás livre

(B) dissolvido no óleo

(C) dissolvido na água.

A fim de calcular adequadamente o volume de gás dissolvido, o fator de dissolução de gás no líquido $R_{s\pi}$relaciona o volume de gás dissolvido nas condições de pressão padrão e o volume de gás medido nas condições padrão.

$$R_{s\pi} = \frac{V_{dgSTC}}{V_{\pi STC}} \tag{3.39}$$

Os fatores enumerados abaixo contribuem com a taxa de acumulação do fluido e estão contemplados na a equação da continuidade apresentada na equação (3.34).

(a) velocidade de variação da saturação da fase π, representada por

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

$$\left(\frac{\phi}{B_\pi}\frac{\partial S_\pi}{\partial t}\right) \tag{3.40}$$

(b) velocidade de variação da densidade de fluido da fase π

$$\left(\phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{B_\pi}\right) + \phi \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi}\right)\right) \tag{3.41}$$

(c) velocidade de variação volumétrica do esqueleto sólido

$$(m^T \dot{\varepsilon}) \tag{3.42}$$

(d) velocidade de variação do volume de grãos devido às tensões efetivas

$$\left(\frac{1}{3K_s} m^T D_T \dot{\varepsilon} + \frac{1}{9{K_s}^2} m^T D_T m \dot{p} - \frac{(\dot{1} - \phi)}{K_s} \dot{p}\right) \tag{3.43}$$

A equação da continuidade, apresentada na equação (3.34), está submetida à condição estabelecida pela equação (3.18) e necessita ser resolvida simultaneamente à equação de equilíbrio, equação (3.30), e à expressão envolvendo $\bar{p}$.

Para controle da estabilidade e acurácia da solução deve-se avaliar o equilíbrio do balanço de massa, pois o modelo deve conservar a massa para manter a estabilidade.

3.4.1.2. Equação da continuidade para fluxo bifásico

Particularizando-se o problema hidromecânico para um fluxo bifásico em um meio poroso deformável, considerando o fluxo de óleo (fluido não molhante) e água (fluido molhante), a equação da continuidade pode ser expressa por

$$\begin{aligned} -\nabla^T[\lambda_\pi k \nabla(p_\pi + \rho_\pi g h)] + \frac{\phi}{B_\pi}\frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{B_\pi}\right) \\ + \alpha_f . \left[\left(m^T - \frac{1}{3K_s} m^T D_T\right)\dot{\varepsilon} \right. \\ \left. + \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9{K_s}^2} m^T D_T m\right)\dot{p}\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Onde:

$$\lambda_\pi = \left(\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi}\right) \tag{3.45}$$

$$\alpha_f = \frac{S_\pi}{B_\pi} \tag{3.46}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

3.4.2.
Formulações para fluxo bifásico

As equações com o intuito de modelar o fenômeno de fluxo bifásico em meios porosos podem ser formuladas em termos de equações diferenciais parciais, que segundo a nomenclatura de Aziz e Settari (1979), são postas em dois tipos: parabólica e hiperbólica. Essa nomenclatura não está associada à classificação normalmente adotada em textos matemáticos.

Segundo Kreyszig (1993), na solução numérica dessas equações, quando da substituição das derivadas por termos em diferenças, não há garantia de convergência da solução aproximada com o refinamento da discretização. Assim, outros critérios e restrições para a adequada convergência e estabilidade da solução aproximada se fazem necessários. Segundo Ribeiro (2011), essa definição ainda pode se apresentar híbrida com a possibilidade de variar de acordo com o espaço das variáveis independentes.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

3.4.2.1.
Formulação Parabólica

Segundo Ribeiro (2011), dada a equação geral de balanço de massa, a formulação para fluxo bifásico pode ser posta de diversas formas, seja em seu arranjo, seja nas variáveis empregadas.

De acordo com Aziz e Settari (1979), e ainda por Ribeiro (2011), Müller (2007) e Frydman (1996), uma formulação parabólica é possível, de modo que a equação de balanço de massa para ambos fluidos, água e óleo, torna-se:

$$-\nabla^T[\lambda_{\mathrm{nw}} k\nabla(p_{nw}+\rho_{nw}gh)]+\frac{\phi}{B_{nw}}\frac{\partial S_{nw}}{\partial t}+\phi \mathrm{S_{nw}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\frac{1}{\mathrm{B_{nw}}}\right)+\frac{S_{nw}}{\mathrm{B_{nw}}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.47}$$

$$-\nabla^T[\lambda_{\mathrm{w}} k\nabla(p_{w}+\rho_{w}gh)]+\frac{\phi}{B_{w}}\frac{\partial S_{w}}{\partial t}+\phi \mathrm{S_{w}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\frac{1}{\mathrm{B_{w}}}\right)+\frac{S_{w}}{\mathrm{B_{w}}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.48}$$

Considerando a definição de pressão capilar, equação(3.19), e que os vazios do esqueleto sólido são preenchidos parcialmente por fluido molhante e parcialmente por fluido não-molhante de acordo com a equação (3.9), pode-se ainda obter formulações diferentes conforme as variáveis selecionadas, seja o par $(\mathrm{p_{nw}}, \mathrm{S_w})$ ou $(\mathrm{p_w}, \mathrm{S_{nw}})$, como segue:

- Formulação $(\mathrm{p_{nw}}, \mathrm{S_w})$:

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{w} k\nabla(p_w - p_c + \rho_w g h)] + \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + \phi \mathrm{S_w}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\frac{1}{\mathrm{B_w}}\right) + \frac{S_w}{\mathrm{B_w}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.49)$$

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{nw} k\nabla(p_{nw} + \rho_{nw} g h)] + \frac{\phi}{B_{nw}}\frac{\partial(1-S_w)}{\partial t} + \phi(1-S_w)\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\frac{1}{\mathrm{B_{nw}}}\right) + \frac{(1-S_w)}{\mathrm{B_{nw}}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.50)$$

- Formulação$(\mathrm{p_w}, \mathrm{S_{nw}})$:

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{nw} k\nabla(p_w + \rho_w g h)] + \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial(1-S_{nw})}{\partial t} + \phi(1-S_{nw})\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\frac{1}{\mathrm{B_w}}\right) + \frac{(1-S_{nw})}{\mathrm{B_w}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.51)$$

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{w} k\nabla(p_{nw} + p_c + \rho_{nw} g h)] + \frac{\phi}{B_{nw}}\frac{\partial S_{nw}}{\partial t} + \phi S_{nw}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\frac{1}{\mathrm{B_{nw}}}\right) + \frac{S_{nw}}{\mathrm{B_{nw}}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.52)$$

Considerando as incompressibilidades de fluidos e do meio sólido a formulação $(\mathrm{p_{nw}}, \mathrm{S_w})$ torna-se:

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{w} k\nabla(p_w - p_c + \rho_w g h)] + \phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.53)$$

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{nw} k\nabla(p_{nw} + \rho_{nw} g h)] + \phi\frac{\partial(1-S_w)}{\partial t} + (1-S_w)\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.54)$$

3.4.2.2. Formulação Hiperbólica

Segundo Aziz e Settari (1979), outra maneira de se formular as equações de fluxo bifásico é uma formulação hiperbólica, que é apresentada também por Peaceman (1977). Nessa formulação é apresentada uma equação para a pressão e outra para a equação de saturação, conforme apresentado a seguir.

Para obter a equação da pressão, somam-se as equações para ambas as fases, equações (3.55) e (3.56), de modo a eliminar o termo referente à derivada da saturação, que resulta em (3.57):

$$-\nabla^T\left[k\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\nabla(p_w + \rho_w g h)\right] + \phi\frac{\partial \mathrm{S_w}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{S_w}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.55)$$

$$-\nabla^T\left[k\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\nabla(p_{nw} + \rho_{nw} g h)\right] + \phi\frac{\partial(1-\mathrm{S_w})}{\partial \mathrm{t}} + (1-\mathrm{S_w})\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \quad (3.56)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

$$-\nabla^T\left[k\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\nabla(p_{nw}+\rho_{nw}gh)+k\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\nabla(p_w+\rho_w gh)\right]+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{3.57}$$

A equação acima pode ser reescrita de modo simplificado em termos da velocidade total de fluxo, v_t, como:

$$-\nabla^T v_t+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{3.58}$$

Onde:

$$v_t=v_w+v_{nw} \tag{3.59}$$

$$v_w=-k\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\nabla(p_w+\rho_w gh) \tag{3.60}$$

$$v_{nw}=-k\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\nabla(p_{nw}+\rho_{nw}gh) \tag{3.61}$$

De forma que:

$$v_t=-k\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\nabla p_w-k\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\nabla p_{nw} - k\nabla\left(\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\rho_{nw}gh+\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\rho_w gh\right) \tag{3.62}$$

Dado que $p_c=p_{nw}-p_w$, derivando-se é obtido:

$$\nabla p_c=\nabla p_{nw}-\nabla p_w \tag{3.63}$$

$$\nabla p_w=\nabla p_{nw}-\frac{dp_c}{dS_w}\nabla S_w \tag{3.64}$$

Substituindo a equação (3.64) na equação (3.62):

$$v_t=-k\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\left(\nabla p_{nw}-\frac{dp_c}{dS_w}\nabla S_w\right)-k\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\nabla p_{nw} - k\nabla\left(\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\rho_{nw}gh+\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\rho_w gh\right) \tag{3.65}$$

Assim, a equação da pressão é dada por:

$$-\nabla^T\left(-k\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\left(\nabla p_{nw}-\frac{dp_c}{dS_w}\nabla S_w\right)-k\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\nabla p_{nw} - k\nabla\left(\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}}\right)\rho_{nw}gh+\left(\frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)\rho_w gh\right)\right)+Q_t=0 \tag{3.66}$$

Onde $Q_t=\frac{\partial\phi}{\partial t}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

A saturação de uma fase é definida como a fração do volume poroso ocupado por uma determinada fase, quando os vazios do meio poroso estão preenchidos por dois ou mais fluidos imiscíveis. Para o desenvolvimento da equação da saturação se tomará como ponto de partida a equação que relaciona a pressão capilar com as pressões das fases molhante e não molhante, equação (3.63).

As velocidades das fases molhante e não molhante, equações (3.60) e (3.61)podem ser reescritas como:

$$v_w = -\lambda_{\mathrm{w}} k \nabla(p_w + \rho_w g h) \tag{3.67}$$

$$v_{nw} = -\lambda_{\mathrm{nw}} k \nabla(p_{nw} + \rho_{nw} g h) \tag{3.68}$$

Isolando termos, é possível escrever a equação das pressões em função das velocidades:

$$\nabla p_w = -\frac{1}{\lambda_{\mathrm{w}}} v_w + \nabla(\rho_w g h) \tag{3.69}$$

$$\nabla p_{nw} = -\frac{1}{\lambda_{\mathrm{nw}}} v_{nw} + \nabla(\rho_{nw} g h) \tag{3.70}$$

Substituindo as equações (3.70) e(3.69) na equação (3.63):

$$\nabla p_c = -\frac{1}{\lambda_{\mathrm{nw}}} v_{nw} + \nabla(\rho_{nw} g h) + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{w}}} v_w - \nabla(\rho_w g h) \tag{3.71}$$

Multiplicando a equação (3.71) por$(\lambda_{\mathrm{w}}\lambda_{\mathrm{nw}})$:

$$(\lambda_{\mathrm{w}}\lambda_{\mathrm{nw}})\nabla p_c = -\lambda_{\mathrm{w}} v_{nw} + \lambda_{\mathrm{nw}} v_w + (\lambda_{\mathrm{nw}}\lambda_{\mathrm{w}})\nabla(\rho_{nw} g h - \rho_w g h) \tag{3.72}$$

Sendo a velocidade total expressa pela equação (3.59),a velocidade da fase não molhante pode ser escrita em função das velocidades total e da fase molhante:

$$v_{nw} = v_t - v_w \tag{3.73}$$

Substituindo a equação(3.73) na (3.72) pode ser obtida a expressão para a velocidade da fase molhante:

$$(\lambda_{\mathrm{nw}}\lambda_{\mathrm{w}})\nabla p_c = -\lambda_{\mathrm{w}} v_t + (\lambda_{\mathrm{nw}} + \lambda_{\mathrm{w}}) v_w + (\lambda_{\mathrm{w}}\lambda_{\mathrm{nw}})\nabla(\rho_{nw} g h - \rho_w g h) \tag{3.74}$$

Isolando termos:

$$v_w = \frac{(\lambda_{\mathrm{nw}}\lambda_{\mathrm{w}})}{(\lambda_{\mathrm{nw}}+\lambda_{\mathrm{w}})} \nabla p_c + \frac{\lambda_{\mathrm{nw}}\lambda_{\mathrm{w}}}{(\lambda_{\mathrm{nw}}+\lambda_{\mathrm{w}})} v_t + \frac{(\lambda_{\mathrm{nw}}\lambda_{\mathrm{w}})}{(\lambda_{\mathrm{nw}}+\lambda_{\mathrm{w}})} \nabla(\rho_{nw} g h - \rho_w g h) \tag{3.75}$$

Sendo:

$$f_w = \frac{\lambda_{\mathrm{w}}}{(\lambda_{\mathrm{nw}} + \lambda_{\mathrm{w}})} \tag{3.76}$$

$$h_w = -\frac{(\lambda_{\mathrm{nw}}\lambda_{\mathrm{w}})}{(\lambda_{\mathrm{nw}} + \lambda_{\mathrm{w}})} \frac{dp_c}{dS_w} \tag{3.77}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

Em que f_w é a função de fluxo fracionário da face molhante e h_w é a função de mobilidade da fase molhante. A equação (3.75) torna-se:

$$v_w = f_w v_t - h_w \nabla S_w + T_{mnw} f_w \nabla(\rho_{nw} g h - \rho_w g h) \tag{3.78}$$

Reescrevendo a equação da continuidade da fase molhante em função da velocidade:

$$\nabla^T [v_w] + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{3.79}$$

Substituindo a equação(3.78) na equação(3.79) pode ser obtida a equação da saturação:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \nabla^T \left[+h_w \nabla S_w - f_w \left(v_t + \lambda_{nw} \nabla(\rho_{nw} g h - \rho_w g h) \right) \right] - S_w \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.80}$$

Da equação (3.79) percebe-se a necessidade da obtenção do vetor velocidade no passo intermediário, sendo que vários procedimentos são apresentados na literatura e esse item será abordado a seguir.

Vale ressaltar que, embora as formulações propostas sejam denominadas parabólica e hiperbólica, o comportamento dessas equações pode ser classificado ora como parabólico, com solução mais suave, ou ora como hiperbólico com solução que apresenta ondas de rarefação e/ou ondas de choque. Considerando a equação da saturação, quando não se considera a pressão capilar no sistema de equações, a equação da saturação se torna do tipo hiperbólica, enquanto que a inclusão da parcela referente a pressão capilar torna o comportamento parabólico.

Desconsiderando totalmente os efeitos mecânicos a equação de saturação, para o fluxo de dois fluidos incompressíveis e imiscíveis em um meio poroso, pode ser dada por:

$$\emptyset \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla . (v_\alpha) = F_\alpha, \quad \alpha = nw, w \tag{3.81}$$

Onde $\emptyset$ é a porosidade do meio, o subscrito n e w denotam as fases não-molhante e molhante, respectivamente, S_α,F_α, e v_α são a saturação, a taxa de fluxo volumétrico externa e a velocidade volumétrica da fase α, respectivamente.

3.4.2.3. Formulação da equação da pressão em termos da pressão média

Ainda pode-se desenvolver a equação da pressão em termos da pressão média (P_{avg})ou *average pressure*, visto que as pressões das fases molhante e não

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA

molhante são relacionadas pela pressão capilar $P_c = P_{nw} - P_w$ e as saturações seguem a relação $S_{nw} = 1 - S_w$. Assim, pode-se escrever uma pressão média para a meio dada por:

$$P_{avg} = \frac{1}{2}(P_{nw} + P_w) \tag{3.82}$$

Dessa forma:

$$P_w = P_{avg} - \frac{1}{2}P_c \tag{3.83}$$

$$P_{nw} = P_{avg} + \frac{1}{2}P_c \tag{3.84}$$

Tendo como ponto de partida a equação (3.34), e considerando que essa abordagem não considerará integralmente os efeitos mecânicos causados pelo fluxo bifásico, incluiremos apenas uma taxa de variação da porosidade com o tempo, a equação abaixo representa a continuidade para este caso particular de fluxo bifásico:

$$-\nabla^T[\lambda_\pi k\nabla(p_\pi + \rho_\pi gh)] + \phi\frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \mathrm{S}_\pi\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.85}$$

Com:

$$\lambda_\pi = \left(\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi}\right) \tag{3.86}$$

Onde π representa o fluido molhante ou não molhante, de modo reescrevendo a equação para cada fase tem-se:

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{w} k\nabla(p_w + \rho_w gh)] + \phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + \mathrm{S}_\mathrm{w}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.87}$$

$$-\nabla^T[\lambda_\mathrm{nw} k\nabla(p_{nw} + \rho_{nw} gh)] + \phi\frac{\partial S_{nw}}{\partial t} + \mathrm{S}_\mathrm{nw}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.88}$$

Escrevendo as equações acima em função de P_{avg} e $\mathrm{S_w}$:

$$-\nabla^T\left[\lambda_\mathrm{w} k\nabla\left(P_{avg} - \frac{1}{2}P_c + \rho_w gh\right)\right] + \phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + \mathrm{S}_\mathrm{w}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.89}$$

$$-\nabla^T\left[\lambda_\mathrm{nw} k\nabla\left(P_{avg} + \frac{1}{2}P_c + \rho_{nw} gh\right)\right] + \phi\frac{\partial S_{nw}}{\partial t} + \mathrm{S}_\mathrm{nw}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.90}$$

Somando essas duas equações obtemos a equação da pressão:

$$-\nabla^T\left[(\lambda_\mathrm{w} + \lambda_\mathrm{nw})k\nabla P_{avg} + \frac{1}{2}(-\lambda_\mathrm{w} + \lambda_\mathrm{nw})k\nabla P_c + \lambda_\mathrm{w} k\nabla(\rho_w gh) + \lambda_\mathrm{nw} k\nabla(\rho_{nw} gh)\right] + \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3.91}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1112037/CA