3
Modelagem matemática

Nesta seção é apresentada a base matemática que foi utilizada para modelar o problema de interferências entre sistemas via satélite. Aspectos técnicos envolvendo o cálculo da razão portadora - interferência e a modelagem probabilística dos ganhos das antenas das estações terrenas são apresentados nas seções seguintes.

3.1
Calculo da Razão Portadora-Interferência

Nesta seção são desenvolvidas expressões para as razões portadora-interferência de entrada única e agregada. Para o cálculo da razão portadora-interferência de entrada única, considere a situação apresentada na Figura 3.1 onde estão ilustrados dois enlaces de comunicação por satélite um deles pertencente à rede interferente, que utiliza o satélite S_1, e o outro pertencente à rede interferida, que utiliza o Satélite S_V. Note que os parâmetros associados ao enlace da rede interferente estão indicados por letras assinaladas superiormente com o sinal "′". Ainda nesta figura, T_1, R_1, T_V e R_V indicam, respectivamente, as posições geográficas das estações terrenas de transmissão e recepção das redes interferente e vítima.

Considerando a Figura 3.1, a razão portadora-interferência nos terminais da antena de recepção no satélite S_V (razão portadora-interferência no lance de subida), em condições de propagação em espaço livre, se escreve.

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{up} = \frac{P_2 g_3(0) \frac{1}{g_3(\gamma)\ell'_1}}{\frac{P'_2 g'_3(0)}{g'_1(0)} \frac{g'_1(\theta)\ g_2(\rho)}{g'_2(\alpha)} \frac{1}{g'_3(\beta)\ell'_3}} \tag{3-1}$$

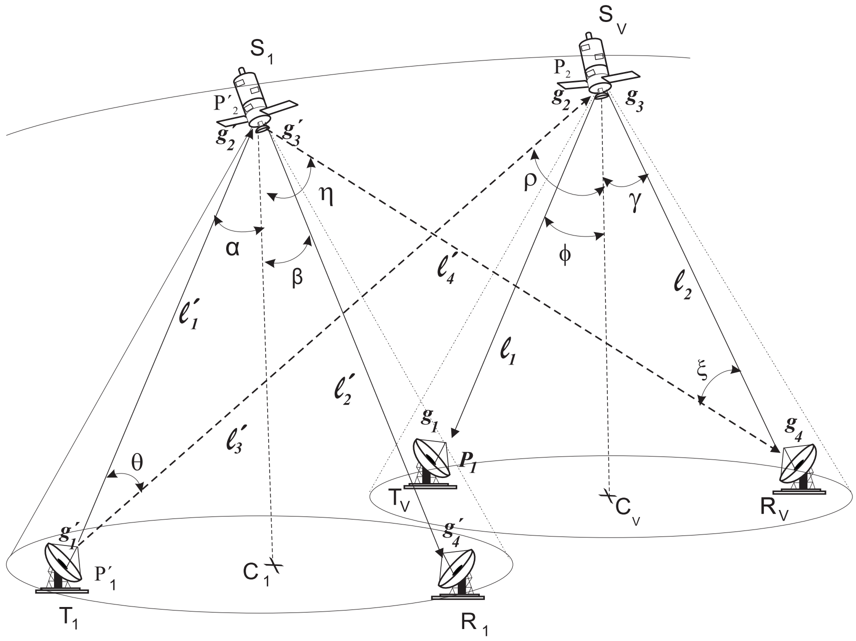

Figura 3.1: Geometria utilizada no cálculo de interferência numa rede de comunicações via Satélite

onde P_2 é a potência da portadora interferida na saída da antena receptora do satélite S_V (correspondente a situação em que R_V está no centro do feixe de transmissão da antena desse satélite), P'_2 é a potência da emissão interferente na faixa da portadora interferida, na saída na antena receptora do satélite S_1 (na situação em que R_1 está no centro do feixe de transmissão da antena desse satélite), ℓ_1 é a perda de espaço livre associada ao percurso do sinal desejado no lance de subida e ℓ'_3 é a perda de espaço livre associada ao percurso da interferência no lance de subida.

Os ganhos de antenas que aparecem em (3-1) correspondem a:

- $g_3(0)$ ganho máximo da antena transmissora do Satélite S_V
- $g'_3(0)$ ganho máximo da antena transmissora do Satélite S_1
- $g_3(\gamma)$ ganho da antena transmissora do satélite S_V numa direção forma um ângulo γ com a direção de apontamento do feixe.
- $g'_3(\beta)$ ganho da antena transmissora do satélite S_1 numa direção forma um ângulo β com a direção de apontamento do feixe.
- $g'_1(\theta)$ ganho da antena da estação terrena transmissora numa direção que forma um ângulo θ com a direção de apontamento da antena
- $g'_1(0)$ ganho máximo da antena da estação terrena transmissora

$g'_2(\alpha)$ ganho da antena receptora do satélite S_1 numa direção que forma um ângulo α com a direção de apontamento do feixe

$g_2(\rho)$ ganho da antena receptora do satélite S_V numa direção que forma um ângulo ρ con a direção de apontamento do feixe

Note que na obtenção de (3-1) a partir do diagrama da Figura 3.1 considerou-se que, independentemente das posições das estações terrenas transmissoras, as potências nos terminais das antenas receptoras dos satélites interferente e vítima seriam constantes e respectivamente iguais a P'_2 e P_2. Isto significa, dependendo das posições das estações terrenas transmissoras das redes interferente e vítima, as potências de transmissão das antenas das estações terrenas, P'_1 e P_1, são ajustadas para garantir os valores de P'_2 e P_2.

Observe que no caso de satélites geoestacionário, as perdas de espaço livre ℓ'_1 e ℓ'_3 podem ser considerados aproximadamente iguais neste caso, (3-1) pode ser escrita a seguir:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{up} = \frac{P_2 g_3(0) g'_1(0) g'_2(\alpha) g'_3(\beta)}{P'_2 g'_3(0) g'_1(\theta) g_2(\rho) g_3(\gamma)} \tag{3-2}$$

De modo análogo, a razão portadora-interferência nos terminais da antena da estação terrena receptora da rede interferida (razão portadora-interferência no lance de descida), em condições de propagação em espaço livre, se escreve

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{down} = \frac{P_2 g_3(\gamma) \delta g_4(0) \frac{1}{\ell_2}}{P'_2 g'_3(0) \delta' \frac{1}{g'_3(\beta)} \frac{g'_3(\eta) g_4(\xi)}{\ell'_4}} \tag{3-3}$$

onde ℓ_2 é a perda de espaço livre associada ao percurso do sinal desejado, no lance de descida, ℓ'_4 é a perda de espaço livre associada ao percurso da interferência no lance de descida.

Os ganhos de antenas que aparecem em (3-3) correspondem a:

$g'_3(\eta)$ ganho da antena transmissão do satélite numa direção que forma um ângulo η com a direção de apontamento do feixe,

$g_4(\xi)$ ganho da antena da estação terrena receptora numa direção que forma um ângulo ξ com a direção de apontamento da antena.

$g_4(0)$ ganho máximo da antena da estação terrena receptora.

δ ganho do Satélite

Em (3-3) δ e δ' representam os ganhos dos satélites vitima e interferente, que podem ser determinados utilizando-se o diagrama da Figura 3.2. Observe que conforme indicado na Figura 3.2 os ganhos de transmissão γ_V e γ_1 podem ser escritos como

$$\gamma_V = \frac{\delta g_3(\gamma) g_4(0)}{\ell_2} \tag{3-4}$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta' g'_3(\beta) g'_4(0)}{\ell'_2} \tag{3-5}$$

onde δ e δ' correspondem, respectivamente, aos ganho da estação satélite das redes vitima e interferente.

Alternativamente, note que γ_V e γ_1 podem ainda ser escritas como

$$\gamma_V = \gamma_{V0} \frac{g_3(\gamma)}{g_3(0)} \tag{3-6}$$

e

$$\gamma_1 = \gamma_{10} \frac{g'_3(\beta)}{g'_3(0)} \tag{3-7}$$

onde γ_{V0} é o ganho de transmissão desde a saída da antena de recepção do satélite S_V até a saída da antena de recepção de uma estação terrena localizada no centro do feixe de transmissão da antena do mesmo satélite de modo análogo γ_{10} é o ganho de transmissão desde a saída da antena de recepção do satélite S_1 até a saída da antena de recepção de uma estação terrena localizada no centro do feixe de transmissão da antena do mesmo satélite.

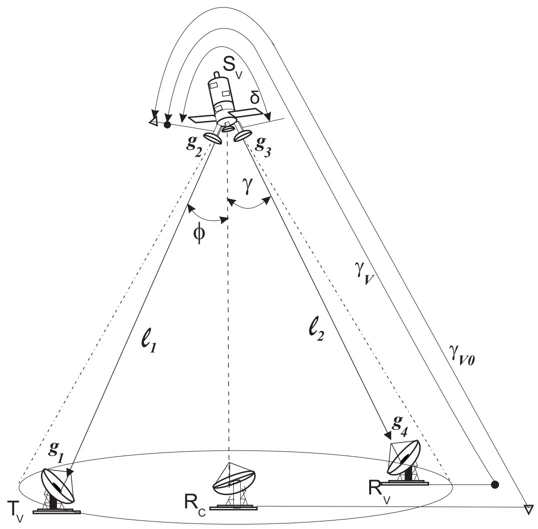

Figura 3.2: Cálculo de fator Gama γ

Comparando-se (3-4) e (3-6) e (3-5) e (3-7) é possível obter os ganhos δ e δ' dos satélites das redes vítimas e interferentes, dados por

$$\delta = \frac{\gamma_{V0}\ell_2}{g_4(0)g_3(0)} \tag{3-8}$$

e

$$\delta' = \frac{\gamma_{10}\ell_2'}{g_4'(0)g_3'(0)} \tag{3-9}$$

Substituindo se (3-8) e (3-9) em (3-3) obtém-se

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{down} = \frac{P_2 g_3(0)\frac{\gamma_{V0}\ell_2}{g_4(0)g_3(0)}g_4(0)\frac{1}{\ell_2}}{P_2' g_3'(0)\frac{\gamma_{10}\ell_2'}{g_4'(0)g_3'(0)}\frac{1}{g_3'(\beta)}\frac{g_3'(\eta)g_4(\xi)}{\ell_4'}}$$

ou ainda, considerando-se ℓ_2' e ℓ_4' como sendo iguais, (3-10) pode ser escrita como

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{down} = \frac{P_2\gamma_{V0}g_4'(0)g_3'(\beta)}{P_2'\gamma_{10}g_3'(\eta)g_4(\xi)} \tag{3-10}$$

A razão portadora-interferência total, é obtida utilizando-se a conhecida relação,

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{tot}^{-1} = \left(\frac{C}{I}\right)_{up}^{-1} + \left(\frac{C}{I}\right)_{down}^{-1} \tag{3-11}$$

Considerando-se (3-11) , (3-2) e (3-10), obtém-se finalmente

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{tot} = \left[\frac{P_2' g_3'(0) g_3(\gamma) g_2(\rho) g_1'(\theta)}{P_2 g_3(0) g_1'(0) g_2'(\alpha) g_3'(\beta)} + \frac{P_2' \gamma_{10} g_3'(\eta) g_4(\xi)}{P_2 \gamma_{V0} g_4'(0) g_3'(\beta)}\right]^{-1} \tag{3-12}$$

3.2 Ganhos das Antenas das Estações Terrenas

Neste trabalho, os ganhos das antenas das estações terrenas transmissora interferente e receptora interferida são modelados como variáveis aleatórias. Para tal, observa-se inicialmente que (3-12) pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{tot}^{-1} = \left(\frac{I}{C}\right)_{tot} = k_u \; g_1'(\theta) + k_d \; g_4(\xi) \tag{3-13}$$

onde k_u e k_d são dados por

$$k_u = \frac{P_2' g_3'(0) g_3(\gamma) g_2(\rho)}{P_2 g_3(0) g_3'(\beta) g_2'(\alpha) g_1'(0)} \tag{3-14}$$

e

$$k_d = \frac{P_2' \gamma_{10} g_3'(\eta)}{P_2 \gamma_{V0} g_3'(\beta) g_4'(0)} \tag{3-15}$$

Em (3-13), k_u e k_d são considerados constantes e os ganhos $g_1'(\theta)$ e $g_4(\xi)$ são modeladas como variáveis aleatórias estatisticamente independentes, com funções densidade de probabilidade que dependem dos ângulos θ e ξ, respectivamente. Sejam então x e y variáveis aleatórias que modelam respectivamente os ganhos $g_1(\theta)$ e $g_4(\xi)$. Neste caso (3-13) se escreve

$$\left(\frac{I}{C}\right)_{tot} = k_u \; x + k_d \; y \; , \tag{3-16}$$

indicando que, neste caso, a razão interferência-portadora total resultante da interferência do sistema S_1 sobre o sistema S_V, é caracterizada por uma variável aleatória que pode ser expressa como uma combinação linear das variáveis aleatórias x e y.

Uma situação mais geral, envolvendo a interferência agregada produzida por múltiplos sistemas interferentes sobre o sistema vítima, pode ser analisada observando-se na Figura 3.3.

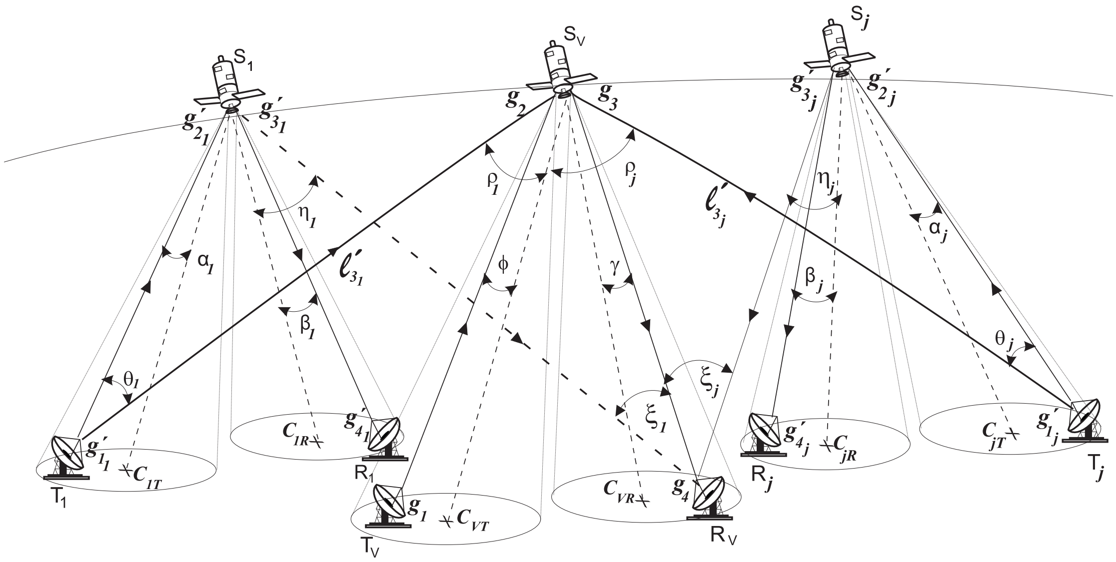

Figura 3.3: Geometria utilizada no calculo de interferência envolvendo multiples redes interferentes.

Considerando-se (3-11), (3-12) e a geometria da Figura 3.3, observa-se que a razão portadora-interferência total resultante da interferência do sistema S_j sobre o sistema vitima S_V pode ser escrito como

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{tot_j} = \left[\frac{P'_{2j} g'_{3j}(0) g_3(\gamma) g_2(\rho_j) g'_{1j}(\theta_j)}{P_2 g_3(0) g'_{3j}(\beta_j) g'_{2j}(\alpha_j) g'_{1j}(0)} + \frac{P'_{2j} \gamma_{10j} g'_{3j}(\eta_j) g_4(\xi_j)}{P_2 \gamma_{V0} g'_{3j}(\beta_j) g'_{4j}(0)}\right]^{-1} \quad (3\text{-}17)$$

Um desenvolvimento análogo ao que foi feito para obter (3-13), no qual os ganhos das antenas das estações terrenas (transmissora interferente e receptora vitima) foram modelados por variáveis aleatórias, pode ser utilizado a partir de (3-17) para obter.

$$\left(\frac{I}{C}\right)_{tot_j} = k_{uj}\ x_j + k_{dj}\ y_j \quad (3\text{-}18)$$

onde as constantes k_{uj} e k_{dj} são obtidas diretamente de (3-14) e (3-15), sendo dadas por

$$k_{uj} = \frac{P'_{2j} g'_{3j}(0) g_3(\gamma) g_2(\rho_j)}{P_2 g_3(0) g'_{3j}(\beta_j) g'_{2j}(\alpha_j) g'_{1j}(0)} \quad (3\text{-}19)$$

e

$$k_{dj} = \frac{P'_{2j} \gamma_{10j} g'_{3j}(\eta_j)}{P_2 \gamma_{V0} g'_{3j}(\beta_j) g'_{4j}(0)} \quad (3\text{-}20)$$

Em (3-18), x_j e y_j modelam, respectivamente os ganhos $g'_{1j}(\theta_j)$ e $g_4(\xi_j)$. Note que (3-18) corresponde à razão interferência-portadora quando apenas a j-ésima rede interferente é considerada.

Considerando-se a interferência total devida a todas as N redes interferentes, obtém-se a razão interferência agregada-portadora , dada por

$$\left(\frac{I_{agg}}{C}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{N} I_j}{C} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{I_j}{C}\right) \tag{3-21}$$

onde I_{agg} é a potência interferente total, na estação terrena receptora do sistema vítima, e I_j é a potência interferente devida apenas à rede j, na mesma estação terrena.

A partir de (3-21), e considerando-se (3-18),obtêm-se

$$\left(\frac{C}{I}\right)^{-1}_{tot_{agg}} = \left(\frac{I_{agg}}{C}\right) = \sum_{j=1}^{N} [k_{uj}\ x_j + k_{dj}\ y_j] \tag{3-22}$$

onde k_{uj} e k_{dj} são dados por (3-19) e (3-20).

Note que (3-22) indica que a razão interferência agregada-portadora, resultante da interferência de múltiplos sistemas ($S_j,\ j = 1, 2 \ldots N$) sobre o sistema vítima S_V é caracterizada por uma variável aleatória que pode também ser expressa como a combinação linear das $2N$ variáveis aleatórias $x_1, x_2, \ldots, x_N,\ \ y_1, y_2, \ldots, y_N$

Note que x_j é a variável aleatória que modela o ganho da antena da estação terrena interferente considerada na rede j, na direção do satélite S_V. De maneira a análoga, y_j modela o ganho, da antena da estação terrena receptora vítima do enlace considerado na rede interferida, na direção do satélite S_j.

3.3 Função Densidade de Probabilidade da Razão Interferência-Portadora

Seja R_{1j} a região angular correspondente aos lóbulos laterais da antena da estação terrena transmissora da j-ésima rede interferente. Neste trabalho, considera-se que, se $\theta_j \in R_{1j}$, x_j é modelado por uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $p_{x_j}(X_j)$. Caso $\theta_j \notin R_{1j}$, x_j corresponde a um parâmetro não aleatório com valor igual a $g'_{1j}(\theta_j)$. Neste caso x_j pode ser considerado como uma variável aleatória que assume o valor $g'_{1j}(\theta_j)$ com probabilidade 1, ou seja, como uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $\delta(X_j - g'_{1j}(\theta_j))$.

De maneira análoga, seja R_4 a região angular correspondente aos lóbulos laterais da antena da estação terrena receptora da rede vítima. Considera-se que, se $\xi_j \in R_4$, y_j é modelado por uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $p_{y_j}(Y_j)$. Caso $\xi_j \notin R_4$, y_j corresponde a um parâmetro não aleatório com valor igual a $g_4(\xi_j)$. Neste caso y_j pode ser considerado como uma variável aleatória que assume o valor $g_4(\xi_j)$ com probabilidade 1, ou seja, como uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $\delta(Y_j - g_4(\xi_j))$.

Note que (3-22) pode ainda ser escrita como

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{tot}^{-1} = \sum_{j=1}^{N} [w_j + v_j] \tag{3-23}$$

onde

$$w_j = k_{uj} x_j \tag{3-24}$$

e

$$v_j = k_{dj} y_j \tag{3-25}$$

com x_j e y_j modelando respectivamente, os ganhos $g'_{1j}(\theta_j)$ e $g_4(\xi)$.
Neste caso, obtém-se facilmente

$$p_{w_j}(W_j) = \begin{cases} \frac{1}{|k_{uj}|}\, p_{x_j}(\frac{W_j}{k_{uj}}) & ; \quad \theta_j \in R_{1j} \\ \\ \delta(W_j - k_{uj} g'_{1j}(\theta_j)) & ; \quad \theta_j \notin R_{1j} \end{cases} \tag{3-26}$$

e

$$p_{v_j}(V_j) = \begin{cases} \frac{1}{|k_{dj}|}\, p_{y_j}(\frac{V_j}{k_{dj}}) & ; \quad \xi_j \in R_4 \\ \\ \delta(V_j - k_{dj} g_4(\xi_j)) & ; \quad \xi_j \notin R_4 \end{cases} \tag{3-27}$$

De modo a facilitar o desenvolvimento matemático ao longo desta seção, é conveniente que que (3-23) seja escrita em termos de um único somatório. Assim, a variável aleatória z, que caracteriza a o inverso da razão portadora-interferência agregada total, pode ser escrita como a soma de $2N$ variáveis aleatórias z_j, $j = 1, 2, \ldots, 2N$ ou seja,

$$z = \left(\frac{I}{C}\right)_{tot_{agg}} = \sum_{j=1}^{2N} z_j \tag{3-28}$$

onde

$$z_j = \begin{cases} w_j & ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \\ \\ v_{j-N} & ; \quad j = N+1, N+2, \ldots, 2N \end{cases} \tag{3-29}$$

Note que as funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias z_j são dadas por

$$p_{z_j}(Z_j) = \begin{cases} p_{w_j}(Z_j) & ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \\ \\ p_{v_{j-N}}(Z_j) & ; \quad j = N+1, N+2, \ldots, 2N \end{cases} \tag{3-30}$$

com $p_{w_j}(\ )$ e $p_{v_j}(\ )$ dados por (3-26) e (3-27), respectivamente.

Substituindo-se (3-26) e (3-27) em (3-30), obtém-se

$$p_{z_j}(Z_j) = \begin{cases} \frac{1}{|k_{uj}|}\, p_{x_j}(\frac{Z_j}{k_{uj}}) & ; \quad \theta_j \in R_{1j} & ; \quad j = 1, \ldots, N \\ \\ \delta(Z_j - k_{uj} g'_{1j}(\theta_j)) & ; \quad \theta_j \notin R_{1j} & ; \quad j = 1, \ldots, N \\ \\ \frac{1}{|k_{d(j-N)}|}\, p_{y_j}(\frac{Z_j}{k_{d(j-N)}}) & ; \quad \xi_{j-N} \in R_4 & ; \quad j = N+1, \ldots, 2N \\ \\ \delta(Z_j - k_{d(j-N)} g_4(\xi_{j-N})) & ; \quad \xi_{j-N} \notin R_4 & ; \quad j = N+1, \ldots, 2N \end{cases} \tag{3-31}$$

Considerando-se que em (3-28) as variáveis aleatórias z_j são estatisticamente independentes, a função característica da variável aleatória z se escreve

$$M_z(v) = \prod_{j=1}^{2N} M_{z_j}(v) \tag{3-32}$$

onde $M_{z_j}(v), j = 1, 2. \ldots, 2N$, representam as funções características das parcelas z_j.

Levando-se em conta (3-24), (3-25) e o fato da função característica de uma variável aleatória x com função densidade de probabilidade $\delta(X - A)$ ser dada por

$$M_x(v) = e^{ivA} \tag{3-33}$$

(com i representando a raíz quadrada de -1), obtém-se, a partir de (3-26)

$$M_{w_j}(v) = \begin{cases} M_{x_j}(k_{uj}v) & ; \quad \theta_j \in R_{1j} \\ \\ \exp\,(ivk_{uj}g'_{1j}(\theta_j)) & ; \quad \theta_j \notin R_{1j} \end{cases} \tag{3-34}$$

e a partir de (3-27)

$$M_{v_j}(v) = \begin{cases} M_{y_j}(k_{dj}v) & ; \quad \xi_j \in R_4 \\ \\ \exp\,(ivk_{dj}g_4(\xi_j)) & ; \quad \xi_j \notin R_4 \end{cases} \tag{3-35}$$

Tem-se então, de (3-31),

$$M_{z_j}(v) = \begin{cases} M_{x_j}(k_{uj}v) & ; \quad \theta_j \in R_{1j} & ; \quad j = 1, \ldots, N \\ \\ \exp\,(ivk_{uj}g'_{1j}(\theta_j)) & ; \quad \theta_j \notin R_{1j} & ; \quad j = 1, \ldots, N \\ \\ M_{y_{j-N}}(k_{d(j-N)}v) & ; \quad \xi_{j-N} \in R_4 & ; \quad j = N+1, \ldots, 2N \\ \\ \exp\,(ivk_{d(j-N)}g_4(\xi_{j-N})) & ; \quad \xi_{j-N} \notin R_4 & ; \quad j = N+1, \ldots, 2N \end{cases} \tag{3-36}$$

Considerando-se (3-36), (3-32), se escreve

$$M_z(v) = \prod_{j\in\mathcal{U}} M_{x_j}(k_{uj}v) \cdot \prod_{j\in\bar{\mathcal{U}}} e^{ivk_{uj}g'_{1j}(\theta_j)} \cdot \prod_{j\in\mathcal{D}} M_{y_{j-N}}(k_{d(j-N)}v) \cdot \prod_{j\in\bar{\mathcal{D}}} e^{ivk_{d(j-N)}g_4(\xi_{j-N})} \tag{3-37}$$

onde os conjuntos $\mathcal{U}$, $\bar{\mathcal{U}}$, $\mathcal{D}$ e $\bar{\mathcal{D}}$ constituem a partição do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2N\}$ dada por

$$\mathcal{U} = \{j \in \{1, 2, \ldots, N\} : \theta_j \in R_{1j}\} \tag{3-38}$$

$$\bar{\mathcal{U}} = \{j \in \{1, 2, \ldots, N\} : \theta_j \notin R_{1j}\} \tag{3-39}$$

$$\mathcal{D} = \{j \in \{N+1, N+2, \ldots, 2N\} : \xi_{j-N} \in R_4\} \tag{3-40}$$

$$\bar{\mathcal{D}} = \{j \in \{N+1, N+2, \ldots, 2N\} : \xi_{j-N} \notin R_4\} \tag{3-41}$$

Note que (3-37) pode ainda ser escrita como

$$M_z(v) = \left(e^{ivK}\right) \left[\prod_{j\in\mathcal{U}} M_{x_j}(k_{uj}v) \prod_{j\in\mathcal{D}} M_{y_{j-N}}(k_{d(j-N)}v)\right] \tag{3-42}$$

onde

$$K = \sum_{j\in\bar{\mathcal{U}}} k_{uj}g'_{1j}(\theta_j) + \sum_{j\in\bar{\mathcal{D}}} k_{d(j-N)}g_4(\xi_{j-N}) \tag{3-43}$$

Finalmente, a função densidade de probabilidade da variável aleatória z, que caracteriza o inverso da razão portadora-interferência agregada total, pode ser obtida a partir de (3-42), chegando-se a

$$p_z(Z) = p_{I/C}(Z) = F(Z - K) \tag{3-44}$$

onde

$$F(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j\in\mathcal{U}} M_{x_j}(k_{uj}v) \prod_{j\in\mathcal{D}} M_{y_{j-N}}(k_{d(j-N)}v)\right] e^{-jvZ}\, dv \tag{3-45}$$

com K dado por (3-43).

Considere agora que $\frac{i}{c}$ seja a razão interferência-portadora, expressa em dB, ou seja,

$$\frac{i}{c} = 10 \log\left(\frac{I}{C}\right) \tag{3-46}$$

Neste caso, a função densidade de probabilidade da razão interferência-portadora em dB se escreve

$$p_{i/c}(\alpha) = \frac{\ln 10}{10}\, 10^{\alpha/10}\, p_{I/C}\left(10^{\alpha/10}\right) \tag{3-47}$$

com $p_{I/C}(Z)$ dada por (3-44).

A partir de (3-47) é possível obter a Distribuição cumulativa de probabilidade da razão i/c, dada por

$$C_{i/c}(\alpha) = P\left(\frac{i}{c} > \alpha\right) = \int_{\alpha}^{\infty} p_{i/c}(\beta) d\beta \tag{3-48}$$

e a Função distribuição de probabilidade da razão portadora-interferência, dada por

$$F_{c/i}(\alpha) = P\left(\frac{c}{i} \leq \alpha\right) = P\left(\frac{i}{c} \geq -\alpha\right) = C_{i/c}\left(-\alpha\right) + P\left(\frac{i}{c} = \alpha\right) \tag{3-49}$$

Neste trabalho, são consideradas 3 probabilidades para a modelagem dos ganhos nos lóbulos laterais das antenas das estações terrenas:

(i) Modelagem como variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade exponencial;

(ii) Modelagem como variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade gamma. e

(iii) Modelagem aproximada dos casos (i) e (ii), considerando-se, o Teorema do Limite Central.

Cada um destas possibilidades é abordada nas seções seguintes.

3.3.1
Caso exponencial

Nesta seção, considera-se que , no caso dos ganhos nos lóbulos laterais, das antenas das estações terrenas, as funções densidades de probabilidade das variáveis aleatórias x_j e y_j são dadas por

$$p_{x_j}(X_j) = a_j \; e^{-a_j X_j} \; u(X_j) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-50}$$

e

$$p_{y_j}(Y_j) = b_j \; e^{-b_j Y_j} \; u(Y_j) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-51}$$

Consequentemente, as funções características destas variáveis, são dadas por

$$M_{x_j}(v) = \tfrac{a_j}{(a_j - iv)} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-52}$$

e

$$M_{y_j}(v) = \tfrac{b_j}{(b_j - iv)} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-53}$$

Neste caso particular, obtêm-se de (3-42)

$$M_z(v) = \left(e^{ivK}\right) \left[\prod_{j \in \mathcal{U}} \frac{a_j}{a_j - ivk_{uj}} \cdot \prod_{j \in \mathcal{D}} \frac{b_{j-N}}{b_{j-N} - ivk_{d(j-N)}} \right] \tag{3-54}$$

com um valor de K dado por (3-43)

Note que os produtórios que aparecem em (3-54) podem ainda ser escritos como

$$\prod_{j \in \mathcal{U}} \frac{a_j}{a_j - ivk_{uj}} \prod_{j \in \mathcal{D}} \frac{b_{j-N}}{b_{j-N} - ivk_{d(j-N)}} = \prod_{j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})} \frac{c_j}{c_j - iv} \tag{3-55}$$

onde

$$c_j = \begin{cases} \frac{a_j}{k_{uj}} & ; \quad j \in \mathcal{U} \\ \\ \frac{b_{j-N}}{k_{d(j-N)}} & ; \quad j \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{3-56}$$

Finalmente, considerando-se (3-42) e (3-55), obtém-se a partir de (3-44) e (3-45)

$$p_z(Z) = F(Z - K) \tag{3-57}$$

onde

$$F(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})} \frac{c_j}{c_j - iv} \right] \; e^{-jvZ} \; dv \tag{3-58}$$

com c_j dado por (3-56) e K dado por (3-43).

A integral em (3-58) pode ser calculada por resíduos sendo, em geral dada por

$$F(Z) = \left(-\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell \right) u(Z) \ , \tag{3-59}$$

onde L é o número de singularidades da função

$$f(x) = \left(\prod_{j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})} \frac{c_j}{c_j - x} \right) \ e^{-xZ} \ , \tag{3-60}$$

no semi-plano direito e r_ℓ é o resíduo desta função na ℓ-ésima singularidade. Se a função tem um polo de ordem m em x_0, correspondente à ℓ-ésima singularidade, tem-se

$$r_\ell = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{x \to x_0} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \ (x - x_0)^m f(x) \tag{3-61}$$

No caso particular em que a função $f(x)$ tem apenas L polos de primeira ordem em $c_j, j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})$, sendo L a cardinalidade do conjunto $\mathcal{U} \cup \mathcal{D}$, $F(Z)$ se escreve

$$F(Z) = \sum_{\ell \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})} A_\ell \ e^{-c_\ell Z} \tag{3-62}$$

onde

$$A_\ell = \left(\prod_{j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})} c_j \right) \left(\prod_{\substack{j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D}) \\ j \neq \ell}} (c_j - c_\ell) \right)^{-1} \tag{3-63}$$

3.3.2 Caso gama

Neste seção, considera-se que, no caso de ganhos nos lóbulos laterais,das antenas das estações terrenas, as funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias x_j e y_j são dados por

$$p_{x_j}(X_j) = \frac{1}{\Gamma(q_j)}\, a_j^{q_j}\, X_j^{q_j-1}\, e^{-a_j X_j}\, u(X_j) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-64}$$

e

$$p_{y_j}(Y_j) = \frac{1}{\Gamma(r_j)}\, b_j^{r_j}\, Y_j^{r_j-1}\, e^{-b_j Y_j}\, u(Y_j) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-65}$$

Consequentemente, as funções características destas variáveis aleatórias, são dadas por

$$M_{x_j}(v) = \frac{(a_j)^{q_j}}{(a_j - iv)^{q_j}} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-66}$$

e

$$M_{y_j}(v) = \frac{(b_j)^{r_j}}{(b_j - iv)^{r_j}} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-67}$$

Neste caso particular, obtêm-se de (3-42)

$$M_z(v) = \left(e^{ivK}\right) \left[\prod_{j \in \mathcal{U}} \frac{(a_j)^{q_j}}{(a_j - ivk_{uj})^{q_j}} \cdot \prod_{j \in \mathcal{D}} \frac{(b_{j-N})^{r_{j-N}}}{(b_{j-N} - ivk_{d(j-N)})^{r_{j-N}}} \right] \tag{3-68}$$

com um valor de K dado por (3-43)

Note que os produtórios que aparecem em (3-68) podem ainda ser escritos como

$$\prod_{j \in \mathcal{U}} \frac{(a_j)^{q_j}}{(a_j - ivk_{uj})^{q_j}} \cdot \prod_{j \in \mathcal{D}} \frac{(b_{j-N})^{r_{j-N}}}{(b_{j-N} - ivk_{d(j-N)})^{r_{j-N}}} = \prod_{j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})} \frac{(c_j)^{s_j}}{(c_j - iv)^{s_j}} \tag{3-69}$$

onde

$$c_j = \begin{cases} \frac{a_j}{k_{uj}} & ; \quad j \in \mathcal{U} \\ \\ \frac{b_{j-N}}{k_{d(j-N)}} & ; \quad j \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{3-70}$$

e

$$s_j = \begin{cases} q_j & ; \quad j \in \mathcal{U} \\ \\ r_{j-N} & ; \quad j \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{3-71}$$

Finalmente, considerando-se (3-68) e (3-69), obtém-se a partir de (3-44) e (3-45)

$$p_z(Z) = F(Z - K) \tag{3-72}$$

onde

$$F(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j \in (\mathcal{U} \cup \mathcal{D})} \frac{(c_j)^{s_j}}{(c_j - iv)^{s_j}} \right] e^{-jvZ} \, dv \tag{3-73}$$

com c_j dado por (3-70) e K dado por (3-43).

Conforme indicado em [1], a integral em (3-73) pode ser calculada utilizando-se a série

$$F(Z) = C \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{Z^{\rho+k-1} \, (c^*)^{\rho+k}}{\Gamma(\rho + k)} e^{-c^* Z} \quad ; \qquad Z > 0 \tag{3-74}$$

onde

$$\rho = \sum_{j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{D}} s_j \tag{3-75}$$

$$c^* = \max_{j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{D}} c_j \tag{3-76}$$

e

$$C = \prod_{j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{D}} \left(\frac{c_j}{c^*} \right)^{s_j} \tag{3-77}$$

Em (3-74), os coeficientes δ_k são dados por

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} i \, \gamma_i \, \delta_{k+1-i} \quad ; \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{3-78}$$

com $\delta_0 = 1$ onde

$$\gamma_{k+1} = \sum_{j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{D}} \frac{s_j \left(1 - \frac{c_j}{c^*}\right)^k}{k} \quad ; \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3-79}$$

A convergência da série em (3-74) é demostrada em [1].

3.3.3 Aproximação gaussiana

Conforme indicado em (3-28), a variável aleatória z, que caracteriza o inverso da razão portadora interferência agregada, pode ser escrita como a soma de $2N$ variáveis aleatórias. O Teorema de Limite Central garante que para valores de N suficientemente grandes, a função densidade de probabilidade de variável aleatória z tende a uma função densidade de probabilidade gaussiana. Assim, para cada um dos casos analisados (caso exponencial e caso gama), considerou-se também uma aproximação gaussiana para a função densidade de probabilidade de z, ou seja, No caso exponencial as parcelas $z_j,\ j = 1, 2, \ldots, 2N$ em (3-28), correspondem a variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade exponenciais de parâmetros $c_j, j = 1, 2, \ldots, 2N$, respectivamente. Consequentemente a variável aleatória z tem média dada por

$$m_z = \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{c_j} \tag{3-80}$$

e, no caso de parcelas z_j estatisticamente independentes, variância dada por

$$\sigma_z^2 = \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{c_j^2} \tag{3-81}$$

Em (3-80) e (3-81), o parâmetro c_j é dado por (3-56).

No caso gamma as parcelas $z_j,\ j = 1, 2, \ldots, 2N$ em (3-28), correspondem a variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade gamma de parâmetros $(c_j, s_j) j = 1, 2, \ldots, 2N$, respectivamente. Consequentemente a variável aleatória z tem média dada por

$$m_z = \sum_{j=1}^{2N} \frac{s_j}{c_j} \tag{3-82}$$

e, no caso de parcelas z_j estatisticamente independentes, variância dada por

$$\sigma_z^2 = \sum_{j=1}^{2N} \frac{s_j}{(c_j)^2} \tag{3-83}$$

Em (3-82) e (3-83), os parâmetros c_j e s_j são dados por (3-70) e (3-71), respectivamente.