



Luciene Gomes de Souza

**Comparação de métodos de micro-dados e de
triângulo run-off para previsão da quantidade
IBNR**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho

Rio de Janeiro
Setembro de 2013



Luciene Gomes de Souza

**Comparação de métodos de micro-dados e de
triângulo run-off para previsão da quantidade
IBNR**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

Prof. André Machado Caldeira

SulAmérica Seguros

Dr. Rodrigo Simões Atherino

JGP Global de Recursos Ltda

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de Setembro de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luciene Gomes de Souza

Graduou-se em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da universidade do Estado do Rio de Janeiro IME/UERJ em 2004. Nos últimos anos, atuou no mercado de seguros, primeiramente com cálculo de reserva IBNR e, por último, modelagem de risco e precificação de seguro de automóveis.

Ficha Catalográfica

Gomes de Souza, Luciene

Comparação de métodos de micro-dados e de triângulo run-off para previsão da quantidade IBNR / Luciene Gomes de Souza; orientador: Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho. – 2013.

83 f.: il. ; 30 cm

1. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Tese. 2. IBNR. 3. Triangulo de Run-off. 4. Chain ladder. 5. Bornhuetter-Ferguson Estendido. 6. Algoritmo EM. 7. Distribuições Truncadas. 8. Mistura de Exponenciais. I. de Lima Veiga Filho, Álvaro. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. título.

CDD: 621.3

Agradecimentos

A Deus por me conceder saúde, paz, dias lindos e de clima ameno que não pude aproveitar ao ar livre, mas que produziam em mim esperança e conforto para que eu trabalhasse com tranquilidade; e por conceder saúde às pessoas que amo, me dando a oportunidade de aproveitar um pouquinho mais a companhia delas agora.

Aos meus pais cujo apoio jamais encontrarei igual.

Ao meu orientador Professor Álvaro Veiga pelo apoio em todas as horas, por SEMPRE recobrar o fôlego com sua alegria e simpatia de sempre para continuarmos, apesar de qualquer barreira, até a “conclusão” deste trabalho que não se finalizou em nossas mentes.

Aos meus colegas da PUC–Rio e amigos de jornada por me emprestarem seus ouvidos em momentos de aflição e pelas conquistas partilhadas.

Ao Francisco Oliver pela colaboração e incentivo.

À Equipe da Seguradora Líder, responsável pela administração do DPVAT, em especial, meu amigo Anderson Schuenck que muito me ajudou em questões específicas do contexto deste trabalho.

À própria Seguradora Líder pela concessão da utilização desses dados para gerar os resultados apresentados.

À CAPES e à PUC–Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao pessoal do departamento de Engenharia Elétrica pela ajuda de todos os dias.

Ao meu amigo Ricardo Cavalcante que, declarando o seu grande desejo de realizar um mestrado, acabava me incentivando a concluir o meu sem nem perceber.

Um agradecimento especial ao meu amigo Edcarllos que me salvou dos problemas da codificação deste texto em latex.

Resumo

Gomes de Souza, Luciene; de Lima Veiga Filho, Álvaro(Orientador). **Comparação de métodos de micro-dados e de triângulo run-off para previsão da quantidade IBNR**. Rio de Janeiro, 2013. 83p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A reserva IBNR é uma reserva de suma importância para as seguradoras. Seu cálculo tem sido realizado por métodos, em sua grande maioria, determinísticos, tradicionalmente aplicados a informações de sinistros agrupadas num formato particular intitulado *triângulo de run-off*. Esta forma de cálculo foi muito usada por décadas por sua simplicidade e pela limitação da capacidade de processamento computacional existente. Hoje, com o grande avanço dessa capacidade, não haveria necessidade de deixar de investigar informações relevantes que podem ser perdidas com agrupamento dos dados. Muitas são as deficiências dos métodos tradicionais apontadas na literatura e o uso de informação detalhada tem sido apontado por alguns artigos como a fonte para superação dessas deficiências. Outra busca constante nas metodologias propostas para cálculo da IBNR é pela obtenção de boas medidas de precisão das estimativas obtidas por eles. Neste ponto, sobre o uso de dados detalhados, há a expectativa de obtenção de medidas de precisão mais justas, já que se tem mais dados. Inspirada em alguns artigos já divulgados com propostas para modelagem desses dados não agrupados esta dissertação propõe um novo modelo, avaliando sua capacidade de predição e ganho de conhecimento a respeito do processo de ocorrência e aviso de sinistros frente ao que se pode obter a partir dos métodos tradicionais aplicados à dados de quantidade para obtenção da quantidade de sinistros IBNR e sua distribuição.

Palavras-chave

IBNR; Triângulo de Run-off; Chain ladder; Bornhuetter-Ferguson Estendido; Algoritmo EM; Distribuições Truncadas; Mistura de Exponenciais;

Abstract

Gomes de Souza, Luciene; de Lima Veiga Filho, Álvaro(Orientador). **Comparison of methods of micro-data and run-off triangle for prediction amount of IBNR**. Rio de Janeiro, 2013. 83p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The IBNR reserve is a reserve of paramount importance for insurers. Its calculation has been accomplished by methods, mostly, deterministic, traditionally applied to claims grouped information in a particular format called *run-off triangle*. This method of calculation was very adequate for decades because of its simplicity and the limited computational processing capacity existing in the past. Today, with the breakthrough of this capacity, no waiver to investigating relevant information that may be lost with grouping data would be need. Many flaws of the traditional methods has been mentioned in the literature and the use of detailed information has been pointed as a form of overcoming these deficiencies. Another frequent aim in methodologies proposed for the calculation of IBNR is get a good measure of the accuracy of the estimates obtained by them and that is another expectation about the use of detailed data, since if you got more data you could get better measures. Inspired by some articles already published with proposals for modeling such not grouped data, this dissertation proposes a new model and evaluate its predictive ability and gain of knowledge about the process of occurrence and notice of the claim against that one can get from the traditional methods applied to data of amount of claims for obtain the amount of IBNR claims and their distribution.

Keywords

IBNR; Runoff Triangle; Chain ladder; Extended Bornhuetter-Ferguson; EM Algorithm; Truncated distributions; Mixture of Exponential Distributions;

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Reserva de Sinistros Não Pagos e a IBNR	11
1.2	Formato dos Dados	12
1.3	Trabalhos Anteriores	13
1.4	Contribuições	16
2	Métodos Tradicionais	18
2.1	Triângulo de Run-off	18
2.2	Chain ladder	19
2.3	Bornhuetter-Ferguson Estendido	20
2.4	Medidas para Avaliação da Qualidade da Previsão	23
3	Modelos para Micro-dados	25
3.1	Abordagem de Parodi	27
3.2	Abordagem de Weissner - Estimção da Distribuição de Atrasos de Aviso por Máxima Verossimilhança	32
3.3	Abordagem de Antonio e Plat	34
3.4	Abordagem proposta	38
4	Aplicações	48
4.1	Dados	48
4.2	Distribuição de Atrasos e frequência de sinistros	50
4.3	Erros de previsão e estimativa da quantidade IBNR	62
4.4	Intervalos de confiança obtidos na abordagem proposta	64
5	Conclusões e trabalhos futuros	66
	Referências Bibliográficas	68
A	Contas	72
A.1	Algoritmo EM	72
A.2	Estimadores MV	78
A.3	Distribuição da Quantidade IBNR	81

Lista de figuras

2.1	Triângulo de <i>run-off</i> Incremental.	18
2.2	Triângulo de <i>run-off</i> Acumulado.	19
3.1	Ciclo de vida de um sinistro.	25
3.2	Representação Gráfica das Equações 3-3 e 3-4	29
4.1	Histogramas dos atrasos de aviso observados em 9 dias selecionados	51
4.2	Curvas Exponenciais Ajustadas - 9 dias selecionados	52
4.3	Curvas da Mistura de Exponenciais Ajustadas - 9 dias selecionados	52
4.4	Valores esperados dos atrasos \times Truncamento/2 por dia de ocorrência - Distribuição de atrasos exponencial	53
4.5	Valores esperados dos atrasos da distribuição 1 de misturas de exponenciais \times Truncamento/2 por dia de ocorrência - Distribuição de atrasos mistura de exponenciais	53
4.6	Valores esperados dos atrasos da distribuição 2 de misturas de exponenciais \times Truncamento/2 por dia de ocorrência - Distribuição de atrasos mistura de exponenciais	54
4.7	Atrasos esperados - Exponencial (Proposta Weissner)	55
4.8	Atrasos esperados - Mistura de Exponenciais (Proposta Weissner)	55
4.9	Parâmetro alfa - Atrasos como mistura de Exponenciais (Proposta Weissner)	56
4.10	Valores esperados dos atrasos - Exponencial (Proposta Dissertação)	57
4.11	Parâmetro γ - Atraso Exponencial (Proposta Dissertação)	58
4.12	Valores esperados dos atrasos - Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação) - Amostras com e sem últimos anos de aviso observados	58
4.13	Parâmetro γ - Atrasos como Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação)	59
4.14	Valores esperados dos atrasos - Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação) - Amostras com e sem últimos meses de aviso observados	60
4.15	Ultimate $\times k_d \times \gamma$ - Mistura de Exponenciais (Proposta Weissner)	61
4.16	Ultimate $\times k_d \times \gamma$ - Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação)	61
4.17	Quantidades Observadas \times Estimadas Mistura Exp.(Proposto) \times Mistura Exp.(Weissner)	63

Lista de tabelas

4.1	Estatísticas Descritivas	49
4.2	Dias de ocorrência selecionados(y)	50
4.3	Medidas dos Erros B-F Estendido - Previsões Anuais	62
4.4	Medidas dos Erros B-F Estendido - Previsões Mensais	64
4.5	IC(90%) x Quantidade Observada por Ano de Aviso fora da Amostra	64
4.6	IC(90%) x Quantidade Observada por Mês de Aviso fora da Amostra	65

1

Introdução

A sigla IBNR (Incurred but not reported) identifica uma importante reserva que deve ser constituída pelas companhias de seguro em geral em todos os seguimentos. Esta reserva, em um determinado instante de tempo t , deve corresponder ao montante necessário para o pagamento de indenizações de todos os sinistros já ocorridos, porém ainda não informados à seguradora. Portanto, a IBNR é definida através de uma estimativa dos sinistros ainda não observados.

Rob Kaas et al.(1) afirmam que há décadas atrás, as carteiras de seguros não-vida eram financiadas através de um sistema “pay-as-you-go”. Todas as reivindicações em um determinado ano eram pagas a partir da receita de prêmios do mesmo ano, independentemente do ano de origem do sinistro. Ganhos e perdas técnicas surgiram devido à diferença entre a receita de prêmios em um ano e os sinistros pagos durante o ano. A IBNR busca antecipar o custo dos sinistros de responsabilidade da seguradora, porém ainda não conhecidos, reduzindo essas perdas e ganhos, e assim fazendo com que balanço financeiro do portfólio de cada ano seja mais próximo do real e sempre haja recursos para cobrir as indenizações a serem pagas.

Diversos autores enfatizam a importância da precisão da estimativa da reserva IBNR. Segundo Friedland(2) podemos ver a importância da acurácia da estimativa de sinistros não pagos em geral por 3 pontos de vista, a saber:

Gestão Interna: a precisão na estimativa de indenizações não pagas é essencial para a correta tomada de decisão em praticamente todas as áreas das operações de uma companhia de seguros como subscrição, precificação, estratégica e financeira.

Investidores: Reservas imprecisas podem levar a balanços e demonstrações de resultados errados. Assim, os principais indicadores financeiros utilizados pelos investidores podem ser enganadores. Uma seguradora com reservas insuficientes pode apresentar-se em uma posição mais forte do que realmente é. Por outro lado, uma seguradora com reservas excessivas pode mostrar uma posição mais fraca do que o seu verdadeiro

estado. Isso poderia afetar as decisões dos investidores relacionados com a seguradora.

Reguladores: Reservas imprecisas podem resultar em uma distorção da verdadeira situação financeira de uma seguradora. Se uma seguradora com problemas financeiros está mascarando seu verdadeiro estado com reservas inadequadas, um regulador pode não ser envolvido no processo para ajudar a seguradora a recuperar sua força a tempo.

No Brasil a constituição da reserva IBNR é obrigatória desde 1998. A SUSEP (Superintendência de Seguros Privados) estabelece critérios para cálculo desta reserva e acompanha as reservas estabelecidas pelas seguradoras. Como signatária da IAIS (International Association of Insurance Supervisors), a SUSEP, em sua regulação das sociedades seguradoras, segue os princípios estabelecidos pela IAIS que passou a adotar as abordagens de avaliação de solvência, identificação de riscos e requerimento de capital do Solvência II, projeto de consolidação de normas relativas à solvência de seguradoras iniciado na Europa. O requerimento de capital trata do capital mínimo requerido pelas seguradoras para que as seguradoras possam operar. Este capital regulatório deve visar à capacidade das seguradoras de pagar todas as suas obrigações em uma situação de liquidação ou, ainda, de transferência de sua carteira a uma companhia cessionária. O Solvência II instituiu a forma de requerimento de “capital baseado em risco”, substituindo as formas anteriores, baseadas no volume de operações da companhia. O capital requerido deve ser capaz de fazer frente a diversos tipos de risco que a companhia suporta em suas atividades, controlando (mantendo em níveis aceitáveis) o risco de que a companhia venha a ter o seu passivo superando seus ativos. A esses riscos inclui-se o risco de reservas, risco das provisões estabelecidas se mostrarem inadequadas, incluindo-se entre elas a IBNR. Assim, mostram-se cada vez mais necessárias técnicas que meçam a precisão da previsão de reserva necessária e risco de que o valor de reserva definido a partir dela seja insuficiente. Mais detalhes sobre solvência e informações relacionadas à solvência no mercado brasileiro podem ser encontrados em Altieri(3).

1.1

Reserva de Sinistros Não Pagos e a IBNR

Segundo Friedland(2) a estimativa de sinistros não pagos inclui cinco componentes:

- i Pagamentos excepcionais de sinistros conhecidos;
- ii Provisão para desenvolvimento de pagamento de sinistros conhecidos;

- iii Estimativa para sinistros reabertos;
- iv Provisão para sinistros ocorridos e não avisados; e
- v Provisão para sinistros em trânsito (sinistros avisados, mas não registrados).

Pagamentos excepcionais de sinistros conhecidos não inclui desenvolvimento futuro. Atuários referem-se à soma das últimas quatro componentes como uma IBNR abrangente. Neste trabalho trataremos como IBNR somente a quarta componente da lista acima, que também é chamada de IBNR Pura ou verdadeira IBNR ou IBNYR (Incurred But Not Yet Reported). Os demais itens que compõem a IBNR em seu sentido abrangente, são componentes do chamado IBNER (Incurred But Not Enough Reported) ou RBNS (Reported But Not Settled) ou IBNFR (Incurred But Not Fully Reported) (4). No Brasil a IBNER foi usualmente chamada de ajuste PSL (Provisão de Sinistros a Liquidar), já que esta medida é usada para ajustar a reserva para pagamento de sinistros já avisados porém não liquidados.

Em geral, a reserva IBNR necessária é estimada através de triângulos de run-off utilizando-se como dados a soma do montante pago e reservado para pagamento de indenizações em cada período corrente após a ocorrência dos sinistros observados. Os métodos mais tradicionais usam a relação entre data de ocorrência de sinistro contra a data de pagamento e data da posição da reserva como componentes para avaliação da reserva necessária. A maioria desses métodos estima a IBNR em seu sentido abrangente e são necessárias aplicações adicionais aos seus resultados para separar deste montante a verdadeira IBNR. Em nossas aplicações, desde os métodos mais tradicionais, até os métodos propostos, estimaremos a quantidade de sinistros da verdadeira IBNR e através dos métodos propostos chegaremos a uma distribuição para esta medida. Os métodos propostos e tradicionais serão comparados em termos de performance na previsão da quantidade de avisos futuros de sinistros já ocorridos. O produto dessa estimativa com a severidade estimada para cada sinistro IBNR nos daria a estimativa final da IBNR. A estimação da severidade não está inclusa no escopo deste trabalho.

1.2

Formato dos Dados

A grande maioria das metodologias de cálculo de reserva propostas até hoje utiliza um formato de dados particular chamado triângulo de *run-off*, onde os dados são agrupados conforme datas de ocorrência e pagamento ou aviso do sinistro, entre outras. Alguns autores criticam fortemente este formato de

dados, pois o agrupamento dos dados pode gerar uma perda de informações importantes sobre eles. Conforme dito anteriormente, tratar dados agrupados era uma solução para a limitação de processamento existente há décadas atrás. Dada a evolução computacional alcançada hoje, não há mais necessidade da agregação de dados e informações importantes de sinistros individuais, antes perdidas, podem contribuir para a precisão das previsões feitas sobre eles e construção de uma distribuição para reserva necessária mais realista. Este nível de informação foi chamado de diferentes formas por diversos autores, como exemplo Micro-dado, Micro-level ou simplesmente sinistro individual. Parodi(5) faz uma aplicação a dados neste nível e chama de “livre de triângulo”.

O foco deste trabalho é testar aplicações sobre dados de sinistros individuais e testar seu desempenho em relação às previsões obtidas.

1.3

Trabalhos Anteriores

Friedland(2) aborda os métodos tradicionais mais utilizados no mercado segurador, suas nuances, vantagens, desvantagens e performance dando orientações de utilização e análise. Dentre esses métodos estão os mais famosos e utilizados chain ladder e Bornhuetter-Ferguson(6). Chain ladder é a técnica mais antiga - Taylor(7) atribui o nome da técnica ao trabalho de um professor no Reino Unido no início dos anos 70 - e também a mais usada no mercado segurador(6, 8).

Há um grande volume literário sobre técnicas de cálculo de reservas produzidos, principalmente, a partir da década de 80. Uma bibliografia levantada em Schmidt(9), contém quase 800 itens, entre eles poucos livros, algumas monografias e muitos artigos. A partir deste levantamento, vemos que a produção de material sobre o assunto praticamente dobrou nos anos 80, redobrou nos anos 90 e, a partir do ano 2000, mais de 300 materiais publicados são citados.

A grande maioria dos artigos existentes na literatura faz fortes críticas ao método chain ladder. Inicialmente, a principal crítica se concentrava no fato de ser um método determinístico, sem um arcabouço estatístico por trás e que não oferece uma forma de cálculo da variabilidade de suas previsões. Diversos artigos foram escritos atribuindo um arcabouço estatístico ao chain ladder, porém geravam estimativas distintas do chain ladder. Em(10) Mack derivou uma fórmula para obtenção do desvio padrão das estimativas do chain ladder livre de distribuição, a partir de suposições simples, utilizando os estimadores originais do método, obtendo assim uma fórmula para cálculo dessa variabilidade com as mesmas estimativas do método original e merecendo

o mérito de ser mencionado por diversos artigos posteriores que incluíam a variabilidade do chain ladder em suas análises.

England e Verrall(11) fazem um levantamento dos métodos estocásticos para cálculo de reservas, apontando as conexões entre eles, mostrando como eles podem ser implementados, discutindo características, interpretando seus resultados e sua utilidade mais ampla. Segundo eles, esses métodos estocásticos são utilizados por um número muito limitado de profissionais. England e Verrall(11) atribuem este fato a falta de entendimento desses métodos, falta de flexibilidade, falta de softwares adequados e apontam como provável razão principal a falta de necessidade destes métodos quando métodos tradicionais são suficientes para o cálculo da melhor estimativa de reservas de sinistros. Porém, dadas as novas exigências de regulação e controle de riscos advindas do Solvência II, conforme mencionado no início do capítulo, não será mais suficiente calcular “a melhor estimativa”; e o cálculo de reservas por métodos estocásticos passa a ser uma necessidade para obtenção do risco de insuficiência do valor da reserva estimado.

Muitos outros artigos foram escritos com o intuito de aprimorar o método chain ladder em diversos outros aspectos que não só a estocasticidade, como Wright(12), Schnieper(13), Verrall(14), Mack(15), Verdonck(16),(17). Taylor(18) faz um levantamento dos métodos propostos até sua época e cria uma taxonomia caracterizando-os como estocásticos ou determinísticos, com estimação de parâmetros ótima ou heurística, dinâmicos ou estáticos, fenomenológicos ou microestruturais. Essas características combinadas determinam diversos grupos de métodos. Neste levantamento Taylor mostra maior entusiasmo em relação à característica de dinamismo dedicando boa parte de seu artigo à exposição de uma generalização do filtro de Kalman para obtenção de reservas adaptativas - o filtro de Kalman foi introduzido na literatura atuarial por De Jong e Zenhwirth(19) e uma nova forma de aplicação do filtro de Kalman para estimação de reservas, que apresenta resultados promissores, pode ser encontrada em Atherino(20). Outra ênfase dada por Taylor em seu artigo foi à utilização de dados crus, os dados não agregados que estão por trás dos triângulos de *run-off*. Ele também afirma que o uso de triângulo foi impulsionado pelas restrições computacionais de uma época passada e não há razão aparente para ser mantido como estrutura para análise de dados e, dessa forma, uma estrutura de dados mais compreensiva deve ser considerada. England e Verrall(11) também afirmam que, dado o contínuo crescimento do poder computacional, deve-se o questionar quando não seria melhor examinar dados de sinistros individuais ao invés de agregados. Acima de tudo a principal motivação para utilização de dados não

agregados é o não desperdício de informações que podem ser preciosas para adequada estimação das reservas e possivelmente uma distribuição associada a elas(21, 22, 5). Porém Jessen et al.(23) questionam o uso de dados de sinistros individuais devido a difícil disponibilidade de dados detalhados confiáveis pelas seguradoras, tempo e esforço gastos para tratamento desses dados e complexidade dos métodos já propostos aplicados a eles e propõem o uso de princípios básicos do nível individual dos sinistros aplicados aos dados agregados.

Uma pequena literatura com foco em reserva estocástica ao nível individual de sinistro pode ser encontrada hoje. Taylor(21) aponta Norberg(24, 25) e Jewell(4, 26) como as prováveis primeiras tentativas de estabelecer uma ampla arquitetura para modelagem individual de sinistros. Outros trabalhos são Hachemeister(27) ,Arjas(28), Haastrup(29), Norberg(30), Larsen(31), Zhao et al.(32), Zhao e Zhou(33), Antonio e Plat(22), e Parodi(5).

Haastrup e Arjas(29) e Norberg(25, 30) estabelecem uma estrutura para ocorrência de sinistros, aviso e processo de pagamento no nível de sinistros individuais, enquanto que Parodi(5) estabelece uma estrutura para ocorrência, atraso do aviso dos sinistros, mas não modela o processo de pagamento, mas sim o montante de pagamento esperado. Zhao et al.(32) e Zhao e Zhou(33) tem configuração semelhante às de Haastrup e Arjas(29) e Norberg(25, 30), e utilizam técnicas semi-paramétricas de análise de sobrevivência e método de cópulas. Jewel se propõe a estimar a IBNYR através de um modelo bayesiano de distribuição de atrasos e frequência de sinistros.

Taylor(21) formula modelos em termos de análise de sobrevivência e modelos lineares generalizados. O documento também aborda um problema persistente em métodos de cálculo de reserva, que consiste em quando confiar em dados de sinistros pagos ou incorridos. O modelo tenta integrar ambos. Porém não gera uma solução para outro problema persistente que seira a separação da IBNR Pura e IBNER estimadas conjuntamente.

Diversos artigos científicos foram escritos para solucionar estes problemas em dados agregados. Schnieper(13), Jessen e Verrall(23), Liu e Verrall(34) e Verrall et al.(35) oferecem uma solução para o problema de separação das reservas IBNR Pura e IBNER. Já Taylor(36), Quarg e Mack(15), Merz e Wüthrich(37), entre outros tem como foco a solução sobre que dados utilizar. Antonio e Plat(22) prometem solucionar estes dois problemas em seu modelo que explicita a quantificação da IBNR Pura e IBNER, pela utilização de ambas as informações de atrasos de aviso e pagamento de sinistro separadamente em seu desenvolvimento. Além desses problemas o modelo sugerido por eles elimina uma série de problemas apontados na literatura e elencados por eles

no artigo. Muitas das soluções são consequências diretas do uso de dados de sinistros individuais. Na proposta de Parodi(5) também há estimação distinta da IBNR Pura e IBNER.

Neste trabalho seguiremos a estrutura sugerida em Parodi(5) para estimação da quantidade IBNR. Apesar de o autor não fazer qualquer menção de uso de uma estrutura já existente na literatura, a estrutura utilizada por ele gera estimadores semelhantes a outros trabalhos com micro-dados. Antônio e Plat(22), através de um Processo Poisson Não Homogêneo Marcado com marcas de posição(tempo entre ocorrência e aviso do sinistro) dependentes do período de ocorrência do sinistro chegam à estimativa da quantidade total de sinistros ocorridos em cada período estudado. Nesta dissertação, a estimação da distribuição de atrasos foi inspirada em Weissner(38). Os métodos para obtenção da distribuição de atrasos e quantidade total de sinistros por período de ocorrência dos artigos citados neste parágrafo e da abordagem proposta serão detalhados no capítulo 3.

No capítulo 2 são apresentados alguns métodos tradicionais usados para cálculo da quantidade de sinistros IBNR, incluindo o mais disseminado e utilizado no mercado, chain ladder. É apresentada a estrutura de dados na qual a grande maioria dos métodos já propostos para cálculo de reserva são aplicados, o triângulo de *run-off*. Por último são apresentadas as medidas de erro de previsão que serão utilizadas para avaliação dos métodos aplicados. No capítulo 3 são apresentadas 3 abordagens propostas em artigos para estimação da quantidade IBNR a partir de dados individuais de sinistros e o método proposto nesta dissertação. Os resultados das aplicações realizadas se encontram no capítulo 4. As conclusões e possíveis trabalhos futuros estão no capítulo 5.

1.4

Contribuições

- ▷ Desenvolvimento de um modelo estatístico para a quantidade IBNR baseado em micro-dados incorporando todas as informações disponíveis;
 - Especificação de um algoritmo EM para estimar os parâmetros das distribuições e simultaneamente estimar a quantidade IBNR para distribuição de atraso exponencial;
 - Especificação de um algoritmo de busca não linear para estimação dos parâmetros do modelo quando a distribuição de atraso é uma mistura de exponenciais;

- Metodologia para a atualização dinâmica dos parâmetros levando em conta a não estacionariedade do processo, baseada em janelas deslizantes.
- ▷ Metodologia para comparar modelos/métodos de cálculo da quantidade IBNR baseada na capacidade preditiva da quantidade IBNR.

2 Métodos Tradicionais

2.1 Triângulo de Run-off

A maioria dos métodos de estimação de reserva de sinistro é aplicado sobre dados no formato de triângulo de *run-off*. O triângulo de *run-off* consiste em uma tabela de dupla entrada, cujas colunas representam períodos de desenvolvimento e as linhas são determinadas por grupos de sinistro pertencentes a um mesmo período de análise. Trata-se de uma das ferramentas mais utilizadas por atuários para organizar dados para identificação de padrões de dados históricos(2). No caso de dados para estimação de reservas o mais comum é utilizar um triângulo de *run-off* cujas linhas são determinadas pelo período de ocorrência do sinistro e as colunas são períodos de desenvolvimento de pagamento desses sinistros, conforme a ilustração 2.1 a seguir:

Figura 2.1: Triângulo de *run-off* Incremental.

Ano de Ocorrência(t)	Desenvolvimento(k)					
	1	2	...	n-t+1	...	n
1	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$...	$Q_{1,n-t+1}$...	$Q_{1,n}$
...
t	$Q_{t,1}$	$Q_{t,2}$...	$Q_{t,n-t+1}$
...
n-1	$Q_{n-1,1}$	$Q_{n-1,2}$
n	$Q_{n,1}$

Os dados contidos no triângulo de *run-off* utilizados para estimação de reservas podem ser o montante de indenização pago em cada período, o montante incorrido(valores pagos + pendentes), a quantidade de sinistros avisados, a quantidade de sinistros, indenização média paga, entre outros. Na figura acima o período de ocorrência, representado pela letra t, identifica as linhas, o desenvolvimento k é o número de períodos decorridos desde a ocorrência do sinistro até o período em que o aviso, pagamento, posição da estimativa de indenização devida ou outra ação foi realizada. Os dados podem ser agrupados por quaisquer períodos de tempo como anual, semestral,

trimestral, por exemplo. Há outras formatações de dados agregados utilizadas para cálculo de reservas que não a de triângulo. Nos métodos tradicionais apresentados neste trabalho o formato de triângulo será adotado. Os demais métodos são aplicados em dados de sinistros não agrupados.

2.2 Chain ladder

Considere o triângulo de *run-off* apresentado anteriormente, com as observações $Q_{t,k} : t = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n - t + 1$, onde $Q_{t,k}$ é a quantidade de sinistros ocorridos em t e avisados k períodos após t . n é o total de períodos de ocorrência observados. $\tau = t + k - 1$ representa o período de aviso desses sinistros. Estamos interessados em estimar as quantidades $Q_{t,k}$ desconhecidas onde $t + k > n + 1$.

O triângulo de quantidades acumuladas da figura 2.2 será utilizado para aplicação do método chain ladder.

Figura 2.2: Triângulo de *run-off* Acumulado.

Ano de Ocorrência(t)	Desenvolvimento(k)					
	1	2	...	n-t+1	...	n
1	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$...	$S_{1,n-t+1}$...	$S_{1,n}$
...
t	$S_{t,1}$	$S_{t,2}$...	$S_{t,n-t+1}$
...
n-1	$S_{n-1,1}$	$S_{n-1,2}$
n	$S_{n,1}$

onde $S_{t,k} = \sum_{l=1}^k Q_{t,l}$, $t = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, n - t + 1$.

O método chain ladder assume a existência de um conjunto de fatores de desenvolvimento $\{f_k | k = 2, \dots, n\}$ com $E[S_{t,k+1} | S_{t,1}, \dots, S_{t,n}] = S_{t,k} f_{k+1}$, $1 \leq t \leq n$, $1 \leq k \leq n - 1$.

Esses fatores são estimados por:

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k+1} S_{t,k}}{\sum_{t=1}^{n-k+1} S_{t,k-1}}, 2 \leq k \leq n \tag{2-1}$$

Para prever futuras quantidades de sinistro acumuladas, esses fatores são aplicados à ultima quantidade acumulada observada de cada linha:

$$\hat{S}_{t,n-t+2} = S_{t,n-t+1} \hat{f}_{n-t+2}, 2 \leq t \leq n \tag{2-2}$$

$$\hat{S}_{t,k} = \hat{S}_{t,k-1} \hat{f}_k, 2 \leq t \leq n, n - t + 3 \leq k \leq n \tag{2-3}$$

Desta forma:

$$\widehat{Q}_{t,n-t+2} = \widehat{S}_{t,n-t+2} - S_{t,n-t+1}, 2 \leq t \leq n \quad (2-4)$$

$$\widehat{Q}_{t,k} = \widehat{S}_{t,k} - \widehat{S}_{t,k-1}, 2 \leq t \leq n, n-t+3 \leq k \leq n \quad (2-5)$$

A quantidade $\widehat{S}_{t,n}$ é denominada ultimate, a quantidade total de sinistros ocorridos em t. A quantidade IBNR estimada correspondente a cada período de ocorrência é $\widehat{Q}_t = \widehat{S}_{t,n} - S_{t,n-t+1}$ para $2 \leq t \leq n$. Esta quantidade de sinistros IBNR estimada será considerada no cálculo do valor da reserva total. Essa quantidade será $\widehat{Q} = \sum_{t=2}^n \widehat{Q}_t$.

A estimação da quantidade de sinistros IBNR e valor médio desses sinistros separadamente é referida em Friedland(2) como técnicas frequência-severidade.

O método de chain ladder é comumente aplicado sobre triângulos com montante indenizado em cada célula do triângulo. Neste caso o desenvolvimento, k, é definido pelo número de períodos decorridos desde a data de ocorrência do sinistro (ou outra data mais conveniente para seguradora adotada para definição das linhas do triângulo de *run-off*, por exemplo, início de vigência das apólices) e a data de pagamento e/ou montante reservado para pagamento dos sinistros de cada linha em cada período $k = 1, \dots, n-t+1$ observado. A soma dos ultimates estimados nessa aplicação deduzido do montante já pago pode ser considerada como uma estimativa da IBNR(2).

2.3

Bornhuetter-Ferguson Estendido

O segundo método mais popular e comumente usado pelo mercado segurador é o método Bornhuetter-Ferguson (B-F)(39). Este método utiliza não somente informações contidas no triângulo como também informações externas como medidas de exposição ou prêmio ganho e sinistralidade(ou porcentual da exposição equivalente a perda esperada) associadas a cada período de ocorrência. Através dessas informações externas é obtida uma estimativa da quantidade total de sinistros ou montante a ser indenizado para cada período de ocorrência associado à elas. Esta quantidade total ou montante a ser indenizado é distribuído por período de desenvolvimento conforme os parâmetros de desenvolvimento estimados a partir do triângulo de *run-off*. Maiores considerações podem ser encontradas em Booth(40) e Friedland(2).

Em Schmidt e Zoicher(2008)(6) uma gama de métodos aplicados a triângulos *run-off* (incluindo o chain ladder) é englobada por uma estrutura definida como estrutura multiplicativa do método B-F. A proposta feita

pelo artigo é chamada de método Bornhuetter-Ferguson Estendido. O método baseia-se na suposição de que existem vetores de parâmetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, com $\gamma_n = 1$, tais que a identidade $E[S_{t,k}] = \gamma_k \alpha_t$, onde γ é o desenvolvimento padrão por cotas acumulada e α é o ultimate, quantidade total de sinistros ou montante a ser indenizado esperado, é válida para todo $t = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, n$.

Cada cota γ_1 representa o porcentual acumulado do total de sinistros ocorridos em um determinado período avisados até k .

Sejam $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n)$ e $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n)$ os estimadores dos das quantidades de sinistros totais ou montantes a serem indenizados esperados por período de ocorrência e das cotas acumuladas, respectivamente. As predições da quantidade acumulada de sinistros $S_{t,k}$ com $t + k \geq T$ são definidas como $\hat{S}_{t,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = S_{t,n-t+1} + (\hat{\gamma}_n - \hat{\gamma}_{n-t+1})\hat{\alpha}_t$.

Desta forma, a diferença, $\hat{S}_{t,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) - S_{t,n-t+1} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-t+1})\hat{\alpha}_t$, é a predição da quantidade de sinistros IBNR ocorridos em t e avisados até o período de desenvolvimento k . Quantidade total IBNR prevista é obtida quando $k = n$.

Enquanto que no método original B-F a quantidade ou montante final estimado é definido por informações externas e o desenvolvimento padrão por informações do triângulo, nesta extensão feita por Schmidt e Zocher essas predefinições são relaxadas e vários métodos que, à primeira vista, tem pouco em um comum, são arranjados sob a estrutura multiplicativa do estimador B-F.

Os métodos englobados por esta extensão do B-F que serão utilizados neste trabalho são o chain ladder (não somente em sua forma original explicada no item 2.2, mas com seus estimadores de desenvolvimento e quantidades totais finais combinados aos estimadores de outros métodos), Desenvolvimento de perda, Cape Cod, Método Aditivo, Método de Mack(41) e Método de Panning(42). Cada método considerado tem seu próprio estimador de cotas acumuladas e quantidades totais finais, ultimate. Esses estimadores serão combinados um a um de forma que, ao final, teremos não somente as estimativas dos métodos originais como também estimativas de “novos métodos” produzidas por combinações inéditas até a publicação deste artigo.

Os preditores de parâmetros de desenvolvimento padrão usados aqui são os fatores de chain ladder, as taxas incrementais de perda de Panning e do método Aditivo. A partir deles obtemos os estimadores de padrão de desenvolvimento por cotas acumuladas que serão utilizados no estimador do método B-F estendido.

Estimadores dos parâmetros de padrões de desenvolvimento por cotas

acumuladas:

<p>Fatores individuais - Chain ladder(CL)</p> $\hat{f}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k+1} S_{t,k}}{\sum_{t=1}^{n-k+1} S_{t,k-1}} \quad (2-6)$	<p>Taxas Incrementais - Panning(P)</p> $\beta_k = \sum_{t=1}^{n-k+1} \frac{Q_{t,k} Q_{t,1}}{\sum_{t=1}^{n-k+1} Q_{t,1}^2} \quad (2-8)$	<p>Taxas de Perdas Incrementais - Método Aditivo(AD)</p> $\hat{g}_k(\Pi) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k+1} Q_{t,k}}{\sum_{t=1}^{n-k+1} \Pi_t} \quad (2-10)$
---	--	--

$\hat{\gamma}_k^{CL} = \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\hat{f}_l} \quad (2-7)$	$\hat{\gamma}_k^P = \frac{\sum_{l=1}^k \hat{\beta}_l}{\sum_{l=1}^n \hat{\beta}_l} \quad (2-9)$	$\hat{\gamma}_k^{AD}(\Pi) = \frac{\sum_{l=1}^k \hat{g}_l(\Pi)}{\sum_{l=1}^n \hat{g}_l(\Pi)} \quad (2-11)$
---	--	---

Estimadores de quantidades totais finais e quantidades acumuladas por período de desenvolvimento dos métodos englobados pelo B-F estendido na forma do preditor B-F estendido (métodos clássicos são casos particulares):

<p>Desenvolvimento de perda(LD):</p> <p>Dado $\hat{\gamma}$</p> $\hat{\alpha}_t^{LD}(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma}_n \frac{S_{t,n-t+1}}{\hat{\gamma}_{n-t+1}} \quad (2-12)$ $\hat{S}^{LD}(\hat{\gamma}) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}_t^{LD}(\hat{\gamma})) \quad (2-13)$	<p>Chain ladder(CL):</p> $\hat{\alpha}_t^{CL}(\hat{\gamma}^{CL}) = \hat{\gamma}_n^{CL} \frac{S_{t,n-t+1}}{\hat{\gamma}_{n-t+1}^{CL}} \quad (2-14)$ $\hat{\alpha}_t^{CL}(\hat{\gamma}^{CL}) = \hat{\alpha}_t^{LD}(\hat{\gamma}^{CL}) \quad (2-15)$ $\hat{S}^{CL} = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^{CL}, \hat{\alpha}_t^{LD}(\hat{\gamma}^{CL})) \quad (2-16)$
---	---

<p>Cape Cod(CC):</p> <p>Dado $\hat{\gamma}$</p> $\hat{\alpha}_t^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}) = \Pi_t \kappa^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}) \quad (2-17)$ $\kappa^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}) = \frac{\sum_{t=1}^n S_{t,n-t+1}}{\sum_{t=1}^n \hat{\gamma}_{n-t+1} \Pi_t} \quad (2-18)$ $\hat{S}^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}_t^{CC}(\Pi, \hat{\gamma})) \quad (2-19)$	<p>Aditivo(AD):</p> $\hat{\alpha}_t^{AD}(\Pi) = \Pi_t \sum_{l=1}^n \hat{g}_l^{AD}(\Pi) \quad (2-20)$ $\hat{S}^{AD}(\Pi) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^{AD}(\Pi), \hat{\alpha}_t^{AD}(\Pi)) \quad (2-21)$ $\hat{S}^{AD}(\Pi) = \hat{S}^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}^{AD}(\Pi)) \quad (2-22)$
--	---

<p>Panning(P):</p> $\hat{\alpha}_t^P = Q_{t,1} \sum_{t=1}^n \hat{\beta}_l^P(\Pi) \quad (2-23)$ $\hat{S}^P = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^P, \hat{\alpha}_t^P) \quad (2-24)$ $\kappa^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}) = \frac{\sum_{t=1}^n S_{t,n-t+1}}{\sum_{t=1}^n \hat{\gamma}_{n-t+1} \Pi_t} \quad (2-25)$ $\hat{S}^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}_t^{CC}(\Pi, \hat{\gamma})) \quad (2-26)$	<p>Panning*(P*):</p> <p>Dado $\hat{\gamma}$</p> $\hat{\alpha}_t^{P*}(\hat{\gamma}) = \frac{Q_{t,1}}{\hat{\gamma}_1} \quad (2-27)$ $\hat{S}^{P*} = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}_t^{P*}(\hat{\gamma})) \quad (2-28)$ $\hat{S}^{AD}(\Pi) = \hat{S}^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}^{AD}(\Pi)) \quad (2-29)$
---	---

Onde Π_t representa uma medida de volume como exposição, prêmio ganho, número de itens segurados em t .

Os estimadores de Mack são casos especiais dos estimadores do método aditivo usando uma medida de volume(exposição/prêmio ganho) ajustada:

$$\hat{\gamma}^{Mack}(\Pi) = \hat{\gamma}^{AD}(\hat{\Pi}^{Mack}(\Pi)) \quad (2-30)$$

$$\hat{\alpha}^{Mack}(\Pi) = \hat{\alpha}^{AD}(\hat{\Pi}^{Mack}(\Pi)) \text{ com } \hat{\Pi}^{Mack}(\Pi) = \hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma}^{AD}(\Pi)) \quad (2-31)$$

Todos os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ são combinados para produzir novos métodos. Algumas combinações distintas geram o mesmo método. Duas presentes neste trabalho são:

$$\hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^{AD}, \hat{\alpha}_t^{AD}(\Pi)) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^{AD}, \hat{\alpha}_t^{CC}(\Pi, \hat{\gamma}^{AD})) \quad (2-32)$$

$$\hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^P, \hat{\alpha}_t^P) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^P, \hat{\gamma}_t^{P*}(\hat{\gamma}^P)) \quad (2-33)$$

2.4

Medidas para Avaliação da Qualidade da Previsão

A literatura raramente faz comparações objetivas à respeito do poder de previsão dos métodos que abordam. Nesta dissertação previsões parciais da quantidade IBNR são feitas e comparadas com as quantidades observadas. Para avaliar a qualidade das predições obtidas a partir dessas aplicações, usaremos as medidas: MAE (Mean Absolute Error), MAPE (Mean Absolute Percentage Error) e MSE (Mean Squared Error).

Seja n o último período de aviso observável na amostra utilizada para ajuste dos métodos estudados e A_{n+h} a quantidade de sinistros avisados no período $n + h$ com máxima ocorrência e máximo atraso de aviso n . A partir do triângulo de *run-off* podemos obter estimativas dessas quantidades de sinistros em até $n - 1$ períodos de aviso posteriores a n . Atendendo a essas condições, porém mantendo uma massa de dados razoável para ajuste dos métodos estudados, serão retirados dos dados de ajuste os últimos H períodos de aviso, afim de serem avaliadas as previsões para estes períodos.

Desta forma, para um horizonte $h = 1, \dots, H$ com $H = 1, \dots, n - 1$ temos:

$$A_{n+h} = \sum_{t=h+1}^n Q_{t,n-t+1+h} \quad (2-34)$$

$$\hat{A}_{n+h} = \sum_{t=h+1}^n \hat{Q}_{t,n-t+1+h} \quad (2-35)$$

$$MAE = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H |A_{n+h} - \hat{A}_{n+h}| \quad (2-36)$$

$$MAPE = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \left| \frac{A_{n+h} - \hat{A}_{n+h}}{A_{n+h}} \right| \times 100 \quad (2-37)$$

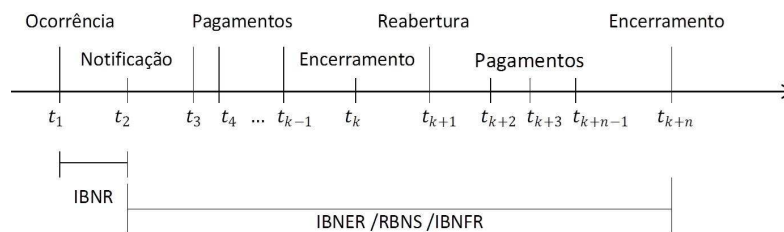
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{H} \sum_{h=1}^H (A_{n+h} - \hat{A}_{n+h})^2} \quad (2-38)$$

Dessas, a medida MAE será considerada como mais relevante por manter a mesma escala dos dados originais.

3 Modelos para Micro-dados

Os modelos aplicados a dados de sinistros individuais tem seguido uma estrutura que pode ser considerada muito apropriada para o fenômeno em questão, seguindo o “ciclo de vida” dos sinistros. O “ciclo de vida” de um sinistro pode ser ilustrado conforme a figura 2.2 a seguir:

Figura 3.1: Ciclo de vida de um sinistro.



t_1 representa o período de ocorrência do sinistro;

t_2 representa o período de notificação deste sinistro à seguradora;

t_3 a t_{k-1} os diversos pagamentos que podem haver até o encerramento;

t_{k+1} reabertura do processo de liquidação do sinistro, em geral, por solicitação do segurado ou algum pagamento indevido identificado pela seguradora;

t_{k+n} encerramento definitivo do sinistro após novos pagamento;

Então para se modelar o “ciclo de vida” de um sinistro bastaria uma distribuição de ocorrência de sinistros, uma distribuição do atraso de aviso do sinistro (tempo entre ocorrência e notificação), uma distribuição do desenvolvimento de pagamento de sinistros e uma distribuição para severidade (montantes indenizados). A maioria dos métodos para cálculo de reserva a partir de dados de sinistros individuais segue esta decomposição do processo de ocorrência e regulação de um sinistro até sua finalização. Inspirado em Karlsson(43), Arjas(28) e Jewell(4), Norberg(25) propõe a modelagem das ocorrências de sinistro por um processo Poisson marcado

não homogêneo: os sinistros ocorrem conforme um processo Poisson não homogêneo e a cada sinistro é associada uma marca aleatória representando seu desenvolvimento desde a ocorrência até a liquidação final. Sua proposta é seguida por diversos autores de artigos posteriores que, em geral, apresentam maior ênfase em uma sofisticação da modelagem do desenvolvimento do pagamento dos sinistros, que é a base para a estimação da IBNER. Portanto, estes aprimoramentos não são muito significativos para este trabalho. Em 2007, seguindo uma linha independente da dos trabalhos citados, Taylor apresenta uma proposta que utiliza técnicas de análise de sobrevivência e modelagem GLM, incorporando diversas categorias de covariáveis associadas ao sinistro e seguro em questão ao seu modelo. Inspirado neste trabalho e nos trabalhos de Jewell(4, 26), Larsen(31) e Taylor et al.(21), Zhao et al.(32) propõem um modelo que utiliza processo Poisson não homogêneo incorporando co-variáveis categorizadas conforme Taylor(21) e modela atrasos considerando dependência entre eles. O trabalho mais recente que segue a linha de processos estocásticos é Antonio e Plat(22). Outros trabalhos independentes das linhas apresentadas anteriormente são Kubrusly(44) e Parodi(5). Kubrusly modela a duração dos períodos entre início de vigência da apólice e ocorrência de sinistro e entre ocorrência e aviso do sinistro e, a partir da suposição de que cada apólice terá no máximo 1 sinistro e que se a vigência delas fosse infinita, este sinistro ocorreria com probabilidade 1 em algum momento futuro, simula a quantidade de sinistros que ocorreram dentro do prazo de vigência da apólice e ainda serão avisados. Assim obtém uma estimativa do IBNYR, definido anteriormente. O trabalho de Parodi é baseado nas ideias de Guiahi(45), Weissner(38) e Kaminsky(46), apesar de não seguir a linha dos artigos científicos que usam processo estocástico Poisson citados anteriormente, baseia a escolha da distribuição do total de sinistros por ocorrência na suposição de que o processo de frequência é um processo Poisson. A estrutura do modelo proposto no presente trabalho foi inspirada neste trabalho de Parodi que estabelece uma estrutura de modelagem de frequência de sinistros, distribuição de atrasos de aviso desses sinistros e severidade. Sendo nosso foco a modelagem da frequência de sinistros e atrasos de aviso dos sinistros para obtenção da distribuição da quantidade de sinistros que comporão a IBNR Pura. Nossa modelagem de atrasos é inspirada em Weissner. As metodologias propostas por Parodi, Weissner e Antonio e Plat para estimação das medidas de nosso interesse(quantidade de sinistros IBNYR e atraso de aviso) são descritas nos itens 3.1 a 3.3 a seguir.

3.1

Abordagem de Parodi

Parodi(5) apresenta um método para estimação de reserva IBNR utilizando dados fora do tradicional formato de triângulo de *run-off*, o qual denomina “Triangle-free reserving”. Sua sugestão é inspirada no estado da arte da metodologia utilizada em tarifação de seguros, onde dois modelos independentes, um de frequência de sinistros e outro de severidade são desenvolvidos. Na metodologia apresentada por ele esses dois modelos são combinados através de simulação Monte Carlo ou outra técnica numérica para produzir a distribuição da perda agregada. Além de alinhar a metodologia para IBNR com a metodologia de pricing sua principal motivação é o aproveitamento de informações importantes para estudo da distribuição da IBNR que são perdidas ao se trabalhar com dados agregados como ocorre em um triângulo de *run-off*.

Parodi(5), através de sua aplicação, obtém não somente a reserva estimada e uma medida da variação desta previsão, mas uma distribuição para medida de reserva que considera mais realista, com maior poder preditivo que a obtida, por exemplo, pelo método de chain ladder. Conforme dito anteriormente, o método considera que o processo é composto pela combinação de três componentes: Um processo de frequência da ocorrência de sinistros, uma distribuição dos atrasos de aviso de sinistros e uma distribuição da severidade dos sinistros. O núcleo da abordagem está na estimação da quantidade de sinistros IBNR e o passo a passo do processo completo consiste em:

1. Estimar a distribuição dos atrasos baseado na distribuição empírica com ajuste do viés de tendência para atrasos curtos;
2. Usar a distribuição de atrasos para estimar a quantidade IBNR baseado no número de sinistros avisados até a data corrente;
3. Modelar a severidade;
4. Combinar a frequência e severidade via simulação Monte Carlo ou outro método (transformada de Fourier, recursão de Panjer...) para produzir a estimativa da distribuição das Perdas Totais IBNR.

As vantagens apontadas pelo autor são:

- Possibilidade de usar um modelo diferente para perdas acima de um limite;
- Não apresenta a fragilidade do chain ladder quando há queda brusca de quantidade ou zeros nos avisos antigos;

- Cálculo do fator de cauda pode ser feito de forma mais científica e não heurísticamente como é típico em abordagens em triângulo;
- Metodologia alinhada com o estado da arte usado em pricing.

Parodi alerta que sua sugestão se trata muito mais de uma estrutura que um método específico. É necessária a adoção de uma implementação particular por quem a utiliza. Assim como em pricing, onde várias distribuições podem ser utilizadas para modelar a frequência e severidade dos sinistros e devem ser definidas pelo usuário quando da aplicação do arcabouço proposto.

Modelo para estimação quantidade total de sinistros(ultimate)

Sua abordagem neste item tem o mesmo espírito dos trabalhos de Kaminsky(46), Weissner(38) and Guiahi(45). Método baseado no uso da distribuição de atrasos $F(t)$ que fornece a probabilidade acumulada de um sinistro ocorrido no tempo 0 ser avisado até o tempo t e densidade de frequência de sinistros $v(t)$.

Supondo que t é a data corrente o número esperado para o total de sinistros ocorridos em $[0, t]$ será

$$E[\mu_t] = \int_0^t v(T)dT \quad (3-1)$$

Supondo a distribuição de atraso $F(t)$ conhecida, o número esperado de sinistros ocorridos em $[0, t]$ e avisados em $[0, t]$ será:

$$E[r_t] = \int_0^t v(T)F(t-T)dT \quad (3-2)$$

O número de sinistros ocorridos em $[0, t]$ e avisados em $[0, t]$ é conhecido. Através dele e das distribuições definidas acima podemos estimar a quantidade desconhecida μ_t :

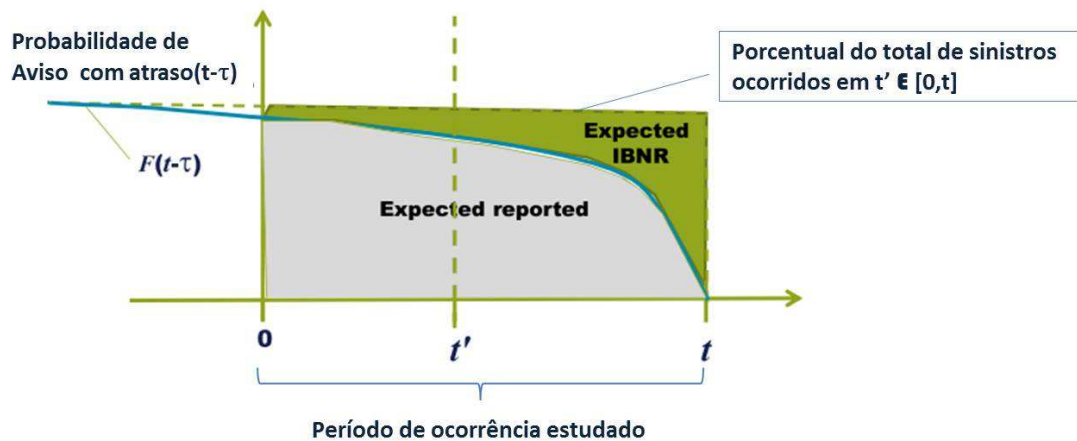
$$\hat{\mu}_t = \frac{\int_0^t v(T)dT}{\int_0^t v(T)F(t-T)dT} r_t \quad (3-3)$$

Se quisermos estimar a quantidade total de sinistros ocorridos em $[0, t']$, $\hat{\mu}_{t'}$, com $t' < t$, a partir da parcela desses sinistros conhecida em t , $r_{t'}$, basta substituímos os limites das integrais da equação acima por t' (note que o tempo corrente t continua inalterado dentro da integral da distribuição acumulada dos atrasos):

$$\hat{\mu}_{t'} = \frac{\int_0^{t'} v(T)dT}{\int_0^{t'} v(T)F(t-T)dT} r_{t'} \quad (3-4)$$

As equações acima podem ser ilustradas pela figura 3.2. Onde a linha paralela ao eixo x representa o total de sinistros ocorridos em cada instante $t' \in [0, t]$ e a curva em azul é a probabilidade do atraso de aviso do sinistro ser menor ou igual a $t - T$ com t representando o tempo corrente.

Figura 3.2: Representação Gráfica das Equações 3-3 e 3-4



Distribuição de Atrasos

A distribuição de atrasos deve ser encontrada a partir da distribuição empírica, que pode ser considerada uma representante da distribuição verdadeira do atraso, $f(t)$. Porém, a distribuição empírica é, inevitavelmente, viesada para atrasos mais curtos, uma vez que há atrasos ainda não observados, maiores que o período observável e atrasos tão longos quanto o período observado são raros. Parodi exhibe uma forma de correção para distribuição empírica de atrasos através da relação entre a distribuição observável e a distribuição verdadeira dos atrasos. Considerando a distribuição observada como uma versão empírica da distribuição de probabilidade de um atraso de comprimento t ser observado na janela $[0, a]$, $f_a(t)$, a variável que representa o atraso entre ocorrência e aviso, T , e a variável que representa data de ocorrência do sinistro, T_0 , pelo teorema de Bayes temos:

$$\begin{aligned}
 f_a(t) &= P(T = t \mid T + T_0 \leq a) \\
 &= \frac{P(T + T_0 \leq a \mid T = t)P(T = t)}{P(T + T_0 \leq a)} \\
 &= \frac{P(T_0 \leq a - t)P(T = t)}{P(T + T_0 \leq a)}
 \end{aligned}
 \tag{3-5}$$

onde, por definição, $P(T = t) = f(t)$.

Desta forma:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{G(a)}{P(T_0 \leq a-t)} f_a(t) & , \text{se } t \leq a \\ \text{indefinida} & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3-6)$$

Onde $G(a)$ é a distribuição acumulada de $T + T_0$.

É possível derivar a $f(t)$ para $t > a$ a partir de suposições baseadas no comportamento de $f(t)$ quando $t \leq a$.

Encontra-se $P(T_0 \leq a - t)$ através de $v(T)$ calculando-se:

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{a-t} v(T_0) dT_0}{\int_0^a v(T_0) dT_0} &= \frac{\int_0^{a-t} v(T_0) dT_0}{\int_0^a v(T_0) dT_0} \\ &= \frac{\int_0^{a-t} v(T_0) dT_0}{\int_0^a v(T_0) dT_0} \\ &= \int_0^{a-t} \tilde{v}(T_0) dT_0 \end{aligned} \quad (3-7)$$

Sendo $\tilde{v}(t)$ a versão normalizada da distribuição $v(t)$.

Dado que a função $f(t)$ apresentada acima funciona apenas para atrasos inferiores a a , é necessário multiplicar as quantidades totais projetados por um fator de cauda para levar em conta atrasos maiores que a . Para isso precisamos ter um modelo a priori para o atraso.

Se $f(t)$ pode ser supostamente uma distribuição exponencial com média τ então a FDP completa para atrasos, inclusive superiores a a pode ser modelada como $f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Não somente para o caso de $f(t)$ ser supostamente exponencial, mas também para o caso não ser, Parodi propõe que se faça uma aproximação ampla considerando uma exponencial com média (τ) igual à média observada (τ_{obs}) ajustada a partir da equação abaixo derivada a partir da equação(3-6), supondo que o dia de ocorrência do sinistro (T_0) tem distribuição uniforme e obtendo-se a distribuição acumulada $G(a)$ por convolução e transformação de Laplace:

$$\tau_{obs} = \tau \left(1 + \frac{e^{-\frac{a}{\tau}} - \frac{\tau}{a}(1 - e^{-\frac{a}{\tau}})}{1 - \frac{\tau}{a}(1 - e^{-\frac{a}{\tau}})} \right) \quad (3-8)$$

Assim, a distribuição completa $f(t)$ passa a ser:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{G(a)}{P(T_0 \leq a-t)} f_a(t) & , \text{se } t \leq a \\ \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3-9)$$

O fator de cauda será:

$$\varphi_{tail} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{a}{\tau}}} \quad (3-10)$$

Esta é uma aproximação ampla, um estudo mais aprofundado da cauda pode ser feito através de teoria do valor extremo. É necessário avaliar se há dados suficientes para suportar mais que o ajuste de uma distribuição com um parâmetro como a exponencial.

Uma suposição necessária para utilização das definições acima é a de que a distribuição de atrasos é constante no tempo, mas essa distribuição poderia ser derivada para cada período de ocorrência dos dados disponíveis.

Distribuição da quantidade de sinistros Ocorridos

Não há uma imposição sobre que distribuição utilizar para modelar a frequência de sinistros. Parodi supõe, em seus exemplos que o processo de contagem de sinistros segue um processo Poisson. A taxa desta Poisson pode ser constante ou não. Em seus exemplos Parodi considera taxa igual a $\hat{\mu}_t$ obtido conforme exposto anteriormente. Devido à alta volatilidade desta medida, passa-se a aproximar uma Poisson com sobre-dispersão por uma distribuição Binomial Negativa supondo relação entre variância e média 2. Também pode-se abandonar a suposição de distribuição Poisson com sobre-dispersão e modelar a frequência a partir de uma Binomial Negativa com taxa $\hat{\mu}_t$ e relação entre variância e média efetiva estimada pela razão entre variância e média das medidas $\hat{\mu}_t$ obtidas, somada a correção $1/n$ que agrega a incerteza do parâmetro, onde n é o número de períodos de ocorrência correspondentes às medidas $\hat{\mu}_t$ utilizadas.

Essa distribuição será utilizada para simulação que gerará uma distribuição para a IBNR final.

Distribuição da quantidade de sinistros IBNR

Parodi realiza N simulações de quantidades IBNR a partir da distribuição de frequência definida com taxa igual a quantidade IBNR estimada a partir do modelo de frequência e atraso aplicados aos dados observados. A distribuição da quantidade IBNR será a distribuição das N simulações realizadas.

A partir das N quantidades IBNR totais simuladas, Parodi simula um período de ocorrência para cada sinistro simulado, com o intuito de simular a severidade associada a partir da distribuição de severidade de cada período de ocorrência. Ao final do processo de simulação Parodi obtém N cenários, cada um com $n_j, j = 1, \dots, N$ sinistros IBNR, ocorridos em um instante de tempo

t' pertencente ao período de ocorrência $[0, t]$, associados a uma severidade S_{ij} , porém sem uma atribuição de tempo de atraso ou data de aviso. Sabemos apenas que o aviso é posterior ao tempo corrente t , portanto o atraso é maior ou igual a $t - t'$. Não há sugestão de uma forma de atribuição de atraso de aviso a cada sinistro. Assim não é possível construir uma distribuição da quantidade de sinistros IBNR por período de aviso dentro do escopo de seu método.

3.2

Abordagem de Weissner - Estimação da Distribuição de Atrasos de Aviso por Máxima Verossimilhança

Weissner(38) propõe uma forma para estimação da distribuição do tempo decorrido entre ocorrência e aviso de sinistro baseado no método de máxima verossimilhança aplicado aos dados observados. Para tal, Weissner assume que os dados observados são uma amostra incompleta da distribuição de atrasos, imatura e tendenciosa devido à prevalência de atrasos curtos. Qualquer acidente não avisado em qualquer período de ocorrência estudado apresentaria atraso maior que os observados neste período. Por isto esta não é uma amostra aleatória da distribuição de atrasos. A partir de dados agregados em uma estrutura de triângulo de *run-off* o seguinte procedimento é realizado utilizando-se dados de um único período de ocorrência t : Seja $N = S_{t,n-t+1}$ o total de sinistros avisados do período de ocorrência t . Então nossa amostra é composta de N variáveis, k_1, k_2, \dots, k_N com os atrasos observados. Assim, a partir do triângulo de *run-off*, temos $k_1 = k_2 = \dots = k_{S_{t,1}} = 1$, $k_{S_{t,1}+1} = k_{S_{t,1}+2} = \dots = k_{S_{t,2}} = 2$, \dots , $k_{S_{t,n-t-1}+1} = k_{S_{t,n-t-1}+2} = \dots = k_{S_{t,n-t}} = n-t+1$. Se supusermos que a distribuição dos atrasos é exponencial com parâmetro λ desconhecido, então a densidade dos atrasos será:

$$f(k|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda k} & , \text{se } 0 < k < \infty \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3-11)$$

Para cada período de ocorrência t só podemos observar atrasos inferiores ou iguais a $n - t + 1$. Portanto, não temos uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial completa, mas uma amostra da distribuição truncada em $n - t + 1$. A distribuição truncada (condicional) em $T = n - t + 1$ é dada por:

$$f(k|\lambda, T) = \begin{cases} \frac{f(k|\lambda)}{P(k \leq T)} = \frac{\lambda e^{-\lambda k}}{1 - e^{-\lambda T}} & , \text{se } 0 < k \leq T \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3-12)$$

A função de verossimilhança para λ , $L(\lambda)$, no período de ocorrência t é dada por:

$$L(\lambda) = L(\lambda; k_1, \dots, k_N) = \prod_{i=1}^N f(k_i | \lambda, T) = \frac{\lambda^N e^{-\lambda \sum_{i=1}^N k_i}}{(1 - e^{-\lambda T})^N} \quad (3-13)$$

Ao prosseguirmos com as contas para obtenção do estimador de máxima verossimilhança de λ chegamos à expressão:

$$\frac{1}{\widehat{\lambda}} - \frac{T}{e^{\widehat{\lambda}T} - 1} = \frac{\sum_{i=1}^N k_i}{N} \quad (3-14)$$

Onde não é possível isolar $\widehat{\lambda}$, mas pode-se encontrar a estimativa de máxima verossimilhança graficamente pela interseção das curvas $1/\widehat{\lambda} - \sum_{i=1}^N k_i/N$ e $T/(e^{\widehat{\lambda}T} - 1)$, um processo iterativo de análise numérica como Newton-Raphson e outros métodos numéricos.

O valor de $\widehat{\lambda}$ encontrado é o parâmetro não só da distribuição exponencial truncada, mas da distribuição exponencial completa. Por isso este procedimento, baseado em distribuições truncadas, produz a estimativa da distribuição completa de atrasos.

Assim, a proporção de sinistros ocorridos em t que serão avisados após T pode ser estimada por:

$$P(k > T) = e^{-\widehat{\lambda}T} \quad (3-15)$$

E a quantidade total de sinistros estimada do período de ocorrência t será:

$$\widehat{U}_t = \frac{1}{1 - P(k > T)} r_t = \frac{1}{1 - e^{-\widehat{\lambda}T}} r_t \quad (3-16)$$

Diferentemente do método chain ladder, esta quantidade total de sinistros ocorridos por período já contemplaria a estimativa da cauda da distribuição. A partir desta formulação também é possível obter a estimativa da quantidade de sinistros para qualquer período de aviso, por exemplo, a quantidade de sinistros IBNR que será avisada em $T + 1$:

$$\widehat{Q}_{t,T+1} = [P(k > T) - P(k > T + 1)] \widehat{U}_t = (e^{-\widehat{\lambda}T} - e^{-\widehat{\lambda}(T+1)}) \widehat{U}_t \quad (3-17)$$

Ou equivalente:

$$\widehat{Q}_{t,T+1} = \left(\frac{1 - e^{-\widehat{\lambda}(T+1)}}{1 - e^{-\widehat{\lambda}T}} - 1 \right) r_t = \frac{(e^{-\widehat{\lambda}T} - e^{-\widehat{\lambda}(T+1)})}{1 - e^{-\widehat{\lambda}T}} r_t \quad (3-18)$$

Essa estimativa não seria possível através da formulação para estimação de quantidade de sinistros proposta por Parodi, uma vez que o estimador apresentado por ele amarra o horizonte de previsão aos períodos de ocorrência

para os quais se deseja prever os avisos futuros. Por este motivo, na proposta de Parodi, fez-se necessária a definição de um fator de cauda que estimasse a quantidade de sinistros com avisos além dos contidos na janela observável limitada pela data de aviso a .

É possível obter a estimativa de máxima verossimilhança de λ a partir dos dados observados de todos os períodos de ocorrência estudados.

Agora, ao invés de termos um único $N = S_{t,n-t}$, trabalharemos com as n variáveis N_t , cada uma representando o total de sinistros avisados de um dos períodos de ocorrência $t = 1, 2, \dots, n$. Temos também n variáveis $T_t = n - t$, representando o máximo atraso observável de cada período de ocorrência t . Seja $k_{i,j}$, o j -ésimo atraso observado do i -ésimo período de ocorrência.

As amostras de atraso $k_{i,1}, k_{i,2}, \dots, k_{i,N_i}$ obedecem a $f(k|\lambda, T_t)$, a distribuição de atrasos truncada do período de ocorrência t .

Supondo que os períodos de ocorrência são independentes, a função de verossimilhança de λ será:

$$\begin{aligned} L^*(\lambda) &= L^*(\lambda; k_{1,1}, \dots, k_{n,1}) \\ &= \prod_{j=1}^{N_1} f(k_{1,j}|\lambda, T_1) \prod_{j=1}^{N_2} f(k_{2,j}|\lambda, T_2) \dots \prod_{j=1}^{N_n} f(k_{n,j}|\lambda, T_n) \\ &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n N_i} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} k_{ij}}}{\prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda T_i})^{N_i}} \end{aligned} \quad (3-19)$$

Resolvendo a equação $\frac{\partial L^*(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$ chegamos a seguinte expressão para o estimador de máxima verossimilhança de λ :

$$\frac{\sum_{i=1}^n N_i}{\hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} k_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{N_i T_i e^{-\hat{\lambda} T_i}}{(1 - e^{-\hat{\lambda} T_i})} \quad (3-20)$$

Aqui também, a estimativa de máxima verossimilhança de λ pode ser obtida através de métodos de análise numérica.

O procedimento proposto por Weissner pode ser realizado para ajuste de outras distribuições como a Lognormal.

3.3

Abordagem de Antonio e Plat

Considere um conjunto T_i, U_i, X_i associado ao sinistro i onde T_i é o instante de tempo de sua ocorrência, U_i é o tempo entre a ocorrência e aviso e X_i representa seu processo de desenvolvimento. Seja τ o tempo presente, os sinistros IBNR (IBNR pura ou IBNYR) e IBNER podem ser distinguidos como a seguir:

IBNR: $T_i + U_i > \tau$ e $T_i < \tau$

IBNER: $T_i + U_i \leq \tau$ e o desenvolvimento do sinistro é censurado em $(\tau - T_i - U_i)$

Processo Poisson Marcado com Posição Dependente

Assim como nas abordagens de Arjas(28) e Norberg(25), o processo de reivindicação de sinistros é tratado como um Processo Poisson Marcado com Posição Dependente. Um ponto é o instante de tempo de ocorrência de um sinistro e a marca associada é a combinação do atraso no aviso e desenvolvimento do sinistro. A intensidade do processo é denotada por λ e a distribuição da marca associada por $(P_{Z|t})_{t \geq 0}$, onde t é igual ao tempo de ocorrência do sinistro. A distribuição da marca é especificada pela distribuição do atraso dada a ocorrência em t , $P_{U|t}$, e a distribuição do desenvolvimento dada a ocorrência em t e o atraso de aviso u , $P_{X|t,u}$. O desenvolvimento completo do processo é um processo Poisson sobre o espaço $C = [0, \infty) \times [0, \infty) \times \chi$ com medida de intensidade:

$$\lambda(dt) \times P_{U|t}(du) \times P_{X|t,u}(dx) \text{ com } (t, u, x) \in C \quad (3-21)$$

Os sinistros já avisados pertencem ao conjunto $C^a = \{(t, u, x) \in C | t + u \leq \tau\}$ e o conjunto dos sinistros IBNR pertencem a $C^i = \{(t, u, x) \in C | t \leq \tau, t + u > \tau\}$. Como ambos são disjuntos, os dois processos são independentes. O processo de sinistros avisados tem intensidade:

$$\begin{aligned} & \lambda(dt) \times P_{U|t}(du) \times P_{X|t,u}(dx) \times 1_{[(t,u,x) \in C^a]} \\ &= \underbrace{\lambda(dt) P_{U|t}(\tau - t) 1_{(t \in [0, \tau])}}_{(a)} \times \underbrace{\frac{P_{U|t}(du) 1_{(u \leq \tau - t)}}{P_{U|t}(\tau - t)}}_{(b)} \times \underbrace{P_{X|t,u}(dx)}_{(c)} \end{aligned} \quad (3-22)$$

As partes da equação identificadas pelas letras a, b e c são: (a) intensidade do processo Poisson que conduz a ocorrência de sinistros $\lambda(dt)$ ajustada pelo fato de que o foco é somente em sinistros avisados; (b) refere-se a distribuição de atrasos de aviso condicionada ao fato de que o aviso já ocorreu; (c) representa a distribuição do processo de desenvolvimento dada ocorrência no tempo t e atraso de aviso u .

Similarmente, o processo de sinistros IBNR tem intensidade:

$$\underbrace{\lambda(dt)(1 - P_{U|t}(\tau - t))1_{(t \in [0, \tau])}}_{(a)} \times \underbrace{\frac{P_{U|t}(du)1_{(u > \tau - t)}}{1 - P_{U|t}(\tau - t)}}_{(b)} \times \underbrace{P_{X|t,u}(dx)}_{(c)} \quad (3-23)$$

Onde as componentes a,b e c podem ser identificadas como em 3-22, condicionadas ao fato de que os sinistros ainda não foram avisados.

Nesta dissertação o interesse está nas componentes a e b das equações (3-22) e (3-23) acima.

Os parâmetros da equação de intensidade do processo de sinistros avisados são estimados por máxima verossimilhança. Técnicas de análise de sobrevivência são utilizadas para modelar o atraso e o processo de desenvolvimento. Como o aviso do sinistro é um evento que só ocorre uma vez durante a existência do sinistro, ele é modelado usando distribuições padrão de análise de sobrevivência.

Distribuição de Atrasos

A mistura de uma distribuição padrão f_U com n distribuições degeneradas é utilizada para modelar a distribuição de probabilidade dos atrasos. As n distribuições degeneradas são incluídas no modelo para modelagem da alta probabilidade de aviso nos n dias que seguem imediatamente após ocorrência. Assim a distribuição dos atrasos é:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k I_k(u) + \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k\right) f_{U|U > n-1}(u), \quad (3-24)$$

onde $I_{\{k\}}(u) = 1$ se o aviso ocorre no k -ésimo dia após ocorrência do sinistro e $I_{\{k\}}(u) = 0$ caso contrário.

Processo de Ocorrência

No processo de otimização da verossimilhança do processo de ocorrência a distribuição de atrasos e seus parâmetros estimados são utilizados.

$$\prod_{i \geq 1} \lambda(T_i^o) P_{U|t}(\tau - T_i^o) e^{-\int_0^\tau w(t) \lambda(t) P_{U|t}(\tau - t) dt}, \quad (3-25)$$

Onde o índice sobrescrito o indica que são tempos de ocorrência observados e $w(t)$ é a medida da exposição no tempo t . A verossimilhança deve ser otimizada em relação a taxa de ocorrência $\lambda(t)$. $\lambda(t)$ é especificado como constante λ_l para $t \in [d_{l-1}, d_l)$, $l = 1, \dots, m$ com $d_o = 0$, $\tau \in [d_{m-1}, d_m)$ e $w(t) := w_l$ para $t \in [d_{l-1}, d_l)$. A variável indicadora $\delta_1(l, t_i)$ será 1 se o período

de ocorrência do sinistro, t_i , pertencer ao intervalo $[d_{l-1}, d_l)$. O número de sinistros no intervalo $[d_{l-1}, d_l)$ será dado por:

$$N_{oc}(l) := \sum_i \delta_1(l, t_i) \quad (3-26)$$

onde o índice subscrito *oc* indica ocorridos. A função de verossimilhança então se torna:

$$\prod_{l=1}^m \lambda_l^{N_{oc}(l)} e^{(-\lambda_l w_l \int_{d_{l-1}}^{d_l} P_{U|t}(\tau-t) dt)} \prod_i P_{U|t}(\tau - t_i) \quad (3-27)$$

O estimador de máxima verossimilhança para $\lambda_l, l = 1, \dots, m$ será:

$$\hat{\lambda}_l = \frac{N_{oc}(l)}{w_l \int_{d_{l-1}}^{d_l} P_{U|t}(\tau - t) dt} \quad (3-28)$$

Esta equação para estimação de λ_l é muito similar à equação (3-16) para estimação da quantidade de sinistros ocorridos do período t de Weissner. Neste caso o estimador \hat{U}_t da equação (3-16) equivaleria ao parâmetro $\hat{\lambda}_l$ multiplicado pela exposição w_l da equação (3-28) que também é uma estimativa do total de sinistros ocorridos num período. Ambos são estimados pela divisão do total de sinistros avisados do período pela probabilidade de atraso menor ou igual ao atraso observável para os sinistros do período de ocorrência. Esta é uma linha muito utilizada nos procedimentos de estimação da quantidade total de sinistros ocorridos desde os métodos com dados agregados. Vide alguns estimadores compreendidos pelo método B-F estendido apresentados no capítulo 2, onde a estimativa é obtida pela divisão do total de sinistros ocorridos em determinado tempo t avisados até o atraso k pela cota de desenvolvimento em k . O estimador da quantidade de sinistros ocorridos de Parodi também apresenta certa semelhança com esses estimadores com a diferença que Parodi pondera o efeito da distribuição acumulada de atraso em seu estimador pela distribuição de frequência de sinistros estimada. Podemos concluir que há uma equivalência entre as estruturas dos estimadores da quantidade IBNR apresentados, apesar de serem distintos em sua origem.

Quantidade IBNR estimada por simulação

O processo de predição de sinistros IBNR segue os seguintes passos:

1. simular o número de sinistros IBNR no intervalo $[0, \tau]$ e seus tempos de ocorrência correspondentes. Os sinistros IBNR são conduzidos por um processo Poisson com intensidade $w(t)\lambda(t)(1 - P_{U|t}(\tau-t))$, onde $\lambda(t)$ é uma constante por partes.

Seja $Q_l \sim Poisson(w_l \lambda_l \int_{d_{l-1}}^{d_l} (1 - P_{U|t}(\tau - t) dt))$

O tempo de ocorrência de cada um dos Q_l sinistros deve ser simulado a partir da distribuição uniforme no intervalo $[d_{l-1}, d_l)$.

2. Simulação do atraso de cada sinistro IBNR.

O atraso é simulado pela inversão da distribuição

$$P(U \leq u | U > \tau - t) = \frac{P(\tau - t < U \leq u)}{1 - P(U \leq \tau - t)} \quad (3-29)$$

o que requer avaliação numérica.

3.4

Abordagem proposta

O modelo proposto foi primeiramente inspirado no método sugerido por Weissner, que trata o problema do truncamento dos dados observados. Conforme visto na 3.2, Weissner propõe um ajuste de distribuições truncadas aos dados de atraso usando máxima verossimilhança. Porém, a verossimilhança que ele calcula quando considera um conjunto de dias de ocorrência não inclui o fato de que a quantidade de sinistros já comunicada é também uma variável aleatória. Já Antonio e Plat não tratam o problema de truncamento. Ao invés disso, tratam a amostra viesada para atrasos curtos como uma amostra representativa da distribuição real. Com isso, as distribuições de atraso estimadas vão apresentar uma probabilidade de atrasos curtos artificialmente elevada. Este problema foi tratado por Parodi, que apresenta uma forma de correção através da relação entre a distribuição completa e a distribuição truncada dos atrasos. Porém, esta correção pode exigir cálculos muito complicados dependendo da distribuição adotada.

Neste trabalho, estas duas questões foram tratadas de forma integrada. A quantidade de sinistros comunicados foi modelada por uma distribuição binomial e o atraso de comunicação foi modelado como uma distribuição truncada. Além disso, o número total de sinistros ocorridos é explicitamente modelado por uma distribuição Poisson, o que nos fornece diretamente a distribuição da quantidade de sinistros IBNR. A escolha das distribuições Poisson e Binomial para modelagem da quantidade total de sinistros ocorridos e quantidade de sinistros avisados até o truncamento, além de encontrar justificativa nos conceitos fundamentais de cada distribuição, guarda uma relação que viabiliza as contas. Já a escolha da distribuição de atrasos é livre. Neste trabalho serão consideradas as distribuições exponencial e mistura de exponenciais para modelagem de atrasos.

3.4.1

Formalização

Seja d a variável que representa o período de ocorrência do sinistro e D o máximo período de ocorrência observável na amostra, assim $d = 1, \dots, D$. Considere agora uma janela de períodos de ocorrência de tamanho $J \leq D$, assim os períodos de ocorrência contidos nessa janela serão identificados pelo índice $t = 1, \dots, J$. O último período de ocorrência dessa janela será sempre um dos períodos de ocorrência observáveis, assim essa janela pode conter desde o intervalo de períodos de ocorrência $d = 1, \dots, J$ até $d = D - J + 1, \dots, D$. Trata-se, então, de uma janela deslizante que percorrerá todos os dias de ocorrência observáveis para obtenção de novas estimativas de parâmetros do modelo proposto à medida em que percorremos esses dias de ocorrência.

T_t : o máximo atraso de aviso observável dos sinistros ocorridos no dia t ;

N_t : o número total de sinistros ocorridos em cada período t ;

K_t : variável aleatória que representa número de sinistros ocorridos em t , comunicados até T_t ;

$\Gamma_t = (\Gamma_{t,1}, \dots, \Gamma_{t,N_t})$: vetor aleatório de todos os tempos de atraso de todos os sinistros ocorridos no dia t ;

$\Gamma_{I,t} = (\Gamma_{t,1}, \dots, \Gamma_{t,K_t})$: vetor aleatório de todos os tempos de atraso dos sinistros avisados relativos ao dia t ;

$\Gamma_{II,t} = (\Gamma_{t,K_t+1}, \dots, \Gamma_{t,N_t})$: vetor aleatório de todos os tempos de atraso dos sinistros a serem avisados relativos ao dia t ;

$T = (T_1, \dots, T_J)$: vetor aleatório de todos os atrasos máximos observáveis;

$N = (N_1, \dots, N_J)$: vetor aleatório das quantidades totais de sinistros ocorridos por dia;

$K = (K_1, \dots, K_J)$: vetor aleatório de todos os sinistros avisados por dia de ocorrência;

$\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_J)$: vetor aleatório de todos os tempos de atraso;

n_t : número não observável de sinistros com origem na data t (ultimate);

k_t : número observado de sinistros comunicados até T com origem na data t ;

$\tau_t = (\tau_{t,1}, \dots, \tau_{t,N_t})$: vetor aleatório de todos os tempos de atraso de todos os sinistros ocorridos no dia t ;

$\tau_{I,t} = (\tau_{t,1}, \dots, \tau_{t,K_t})$: vetor aleatório de todos os tempos de atraso dos sinistros avisados relativos ao dia t ;

$\tau_{II,t} = (\tau_{t,K_t+1}, \dots, \tau_{t,N_t})$: vetor aleatório de todos os tempos de atraso dos

sinistros a serem avisados relativos ao dia t ;

λ : vetor de parâmetros da distribuição de atrasos;

γ_t : vetor de parâmetros da distribuição do número de sinistros ocorridos em t, N_t .

A distribuição conjunta das variáveis aleatórias atraso, número de sinistros comunicados até o truncamento dos dados e total de sinistros ocorridos no dia t é representada por:

$$\begin{aligned} f_{\Gamma_t, K_t, N_t}(\tau_t, k_t, n_t; \lambda, \gamma, T_t) &= f_{\Gamma_t / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_t; \lambda, T_t) \\ &\times f_{K_t / N_t = n_t}(k_t; \lambda, T_t) \\ &\times f_{N_t}(n_t; \gamma) \end{aligned} \quad (3-30)$$

O processo de estimação dos parâmetros adotado neste trabalho dependerá da distribuição de atraso. Para distribuição de atraso exponencial as estimativas dos parâmetros serão encontradas pela maximização da verossimilhança utilizando-se o algoritmo EM. Já o modelo com distribuição de atrasos segundo a mistura de duas distribuições exponenciais terá os parâmetros estimados através da maximização da verossimilhança utilizando um algoritmo de busca não linear implementado em Matlab.

3.4.2

Modelo de atrasos exponencial com estimação via algoritmo EM

Se todos os atrasos de aviso possíveis para sinistros ocorridos em J dias fossem observáveis teríamos dados completos e a função de verossimilhança dos parâmetros da distribuição de atrasos e distribuição do total de sinistros ocorridos nestes J dias seria:

Dados: Γ_t, N_t e K_t

$$\begin{aligned} L(\lambda, \gamma / \Gamma, K, N; T) &= \prod_{t=1}^J f_{\Gamma_t, K_t, N_t}(\tau_t, k_t, n_t; \lambda, \gamma, T_t) \\ &= \prod_{t=1}^J f_{\Gamma_t / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_t; \lambda, T_t) f_{K_t / N_t = n_t}(k_t; \lambda, T_t) f_{N_t}(n_t; \gamma) \end{aligned} \quad (3-31)$$

onde:

$f_{\Gamma_t / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_t; \lambda, T_t)$: distribuição de atrasos dada a quantidade de sinistros avisados até T_t, k_t , e o total de sinistros ocorridos em t, n_t ;

$f_{K_t / N_t = n_t}(k_t; \lambda, T_t)$: a distribuição da probabilidade de se observar K_t sinistros avisados até T_t ;

$f_{N_t}(n_t; \gamma)$: distribuição do total de sinistros ocorridos em t .

Separando o primeiro termo em componentes observáveis, atrasos menores que T_t , e não observáveis, atrasos maiores que T_t :

$$\begin{aligned}
 L(\lambda, \gamma / \Gamma, K, N; T) &= \prod_{t=1}^J f_{\Gamma_{I,t}/K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) \\
 &\quad \times f_{\Gamma_{II,t}/K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \\
 &\quad \times f_{K_t/N_t = n_t}(k_t; \lambda, T_t) \\
 &\quad \times f_{N_t}(n_t; \gamma)
 \end{aligned} \tag{3-32}$$

A função log-verossimilhança para os dados completos é dada por:

$$\begin{aligned}
 l(\lambda, \gamma / \Gamma, K, N; T) &= \sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{I,t}/K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) \\
 &\quad + \sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t}/K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \\
 &\quad + \sum_{t=1}^J \ln f_{K_t/N_t = n_t}(k_t; \lambda, T_t) \\
 &\quad + \sum_{t=1}^J \ln f_{N_t}(n_t; \gamma)
 \end{aligned} \tag{3-33}$$

Este modelo contém diversas componentes não observáveis. A quantidade total de sinistros ocorridos, N , é uma componente não observável do modelo. Outras componentes não observáveis são os tempos de atraso dos sinistros ainda não comunicados. O número de comunicações a ocorrer é a quantidade IBNR que desejamos estimar. Para maximização da função verossimilhança podemos utilizar algoritmo EM(Expectation–Maximization).

O algoritmo EM foi proposto em Dempster(47) e se trata de um método iterativo para encontrar estimativas de máxima verossimilhança de parâmetros de um modelo estatístico, quando o modelo depende de variáveis não observadas. A iteração do EM alterna entre um passo E de cálculo de esperança, o qual cria uma função de esperança da log-verossimilhança avaliada usando a estimativa corrente dos parâmetros, e um passo M de maximização, o qual calcula os parâmetros pela maximização da log-verossimilhança esperada encontrada no passo E. Essas estimativas de parâmetros são então usadas para determinar a distribuição das variáveis latentes no próximo passo E. As equações que representam os passos E e M descritos são:

E-step:

$$Q(\theta, \theta^{(i)}) = E[l(\theta/X, Y) | X = x, \theta^{(i)}] \quad (3-34)$$

M-step:

$$\theta^{(i+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^{(i)}) \quad (3-35)$$

onde,

$\theta^{(i)}$: vetor de estimativas correntes dos parâmetros do modelo de interesse;

θ : vetor dos parâmetros a serem estimados.

Os passos do algoritmo EM para o modelo em questão são:

E-step:

$$\begin{aligned} Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}) &= E[l(\lambda, \gamma/\Gamma, K, N; T) | \{\Gamma_{I,t} = \tau_{I,t}, \Gamma_{II,t} \leq T_t, K_t = k_t, N_t \geq k_t\}_{t=1}^J; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}] \\ &= \sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{I,t}/K_t = k_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) \\ &\quad + E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t}/K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \right] \\ &\quad + E_{N_t/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{K_t/N_t = n_t}(k_t; p(\lambda, T_t), n_t) \right] \\ &\quad + E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{N_t}(n_t, \gamma) \right] \end{aligned} \quad (3-36)$$

M-step:

$$\begin{aligned} \{\lambda^{(i+1)}, \gamma^{(i+1)}\} &= \arg \max_{\lambda, \gamma} Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}) \\ &= \arg \max_{\lambda} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{I,t}/K_t = k_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) \\ &+ E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t}/K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \right] \\ &+ E_{N_t/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{K_t/N_t = n_t}(k_t; p(\lambda, T_t), n_t) \right] \end{aligned} \right\} \\ &\quad + \arg \max_{\gamma} \left\{ E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{N_t}(n_t, \gamma) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3-37)$$

As duas equações acima são as equações gerais para otimização e estimação dos parâmetros através do algoritmo EM. Uma vez definidas as

densidades que aparecem na expressão o cálculo pode ser explicitado. Note através da equação do *M-Step* que o algoritmo EM pode ser desenvolvido separadamente para duas partes diferentes do modelo. Os três primeiros termos da equação dependem apenas de λ e o último termo apenas de γ . A partir da especificação da densidade Poisson com parâmetro γ para variável N_t , da densidade exponencial com parâmetro λ para tempo de atraso τ_t e da densidade binomial dependente de ambos parâmetros γ e λ para a variável K_t , obtém-se:

O estimador de N_t (quantidade de sinistros ocorridos no período t):

$$\widehat{n}_{t,\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}} = \gamma F_{\tau_t}(T_t; \lambda) + k_t \quad (3-38)$$

onde $F_{\tau_t}(T_t; \lambda)$ é a probabilidade do atraso ser maior que o atraso máximo observável T_t . Assim, o estimador da quantidade total de sinistros para cada período de ocorrência t é bem especificado como o porcentual da esperança da distribuição da quantidade total de sinistros ocorridos que esperamos que seja avisado com atraso maior que máximo atraso observável, T_t , somado à quantidade de sinistros ocorridos em t e avisados com atraso menor ou igual a T_t .

As contas para obtenção do estimador $\widehat{n}_{t,\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}}$ mostrado acima encontram-se no apêndice A.3.

A equação de atualização para estimação de γ é dada por:

$$\gamma^{i+1} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \widehat{n}_{t,\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}} \quad (3-39)$$

O estimador do γ é justamente a média das estimativas do total de sinistros ocorridos em cada tempo da janela $t = 1, \dots, J$.

A equação de atualização para estimação de λ :

$$\frac{1}{\lambda^{i+1}} = \frac{J\bar{\tau} + \sum_{t=1}^J \left\{ \left(T_t + \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right) \left(\widehat{n}_{t,\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}} - k_t \right) \right\}}{J\bar{n}} \quad (3-40)$$

onde, $\bar{\tau} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \sum_{j=1}^{k_t} \tau_{t,j}$ e $\bar{n} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \widehat{n}_{t,\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}}$.

A equação acima é apresentada em termos do inverso de λ por mais interpretável. Assim, a equação de atualização da estimativa de λ é o inverso da média ponderada entre os atrasos observados e os atrasos estimados para sinistros ainda não avisados.

As equações de atualização serão utilizadas no processo iterativo do algoritmo EM. Para iniciar o processo é necessária a definição de valores iniciais $\gamma^{(0)}$ e $\lambda^{(0)}$. As iterações são interrompidas quando $\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)} < \varepsilon$ e $\gamma^{(i+1)} - \gamma^{(i)} < \xi$, com ε e ξ tão pequenos quanto se queira.

As contas para obtenção das equações de atualização do algoritmo EM estão no apêndice A.1.

3.4.3

Modelo de atrasos como uma mistura de exponenciais com estimação via MV

Além da distribuição exponencial, outras distribuições podem ser ajustadas à distribuição de atrasos através deste modelo. Neste trabalho, além da distribuição exponencial para atrasos foi testado o ajuste de uma mistura de exponenciais definida por:

$$f_{\tau_t}(\tau_t; \lambda_1, \lambda_2, \alpha) = \alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_t} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_t} \quad (3-41)$$

Também utilizada na forma condicional aos dados observáveis:

$$f_{\tau_t/\tau_t \leq T_t}(\tau_t; \lambda_1, \lambda_2, \alpha) = \frac{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_t} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_t}}{1 - \alpha e^{-\lambda_1 T_t} - (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 T_t}} \quad (3-42)$$

A função de verossimilhança para os dados incompletos do modelo proposto é:

$$L(\lambda, \gamma) = \prod_{t=1}^J \left\{ \prod_{i=1}^{k_t} \frac{f_{\tau_t}(\tau_{t,i}; \lambda)}{1 - F_{\tau_t}(T_t; \lambda)} \right\} \sum_{n=k_t}^{\infty} \frac{n!}{k_t!(n - k_t)!} (1 - F_{\tau_t}(T_t; \lambda))^{k_t} (F_{\tau_t}(T_t; \lambda))^{n - k_t} \frac{\lambda^n e^{-\gamma}}{n!} \quad (3-43)$$

Onde $F_{\tau_t}(T_t; \lambda)$ é a probabilidade do atraso ser maior que o atraso máximo observável T_t .

A função log-verossimilhança a ser maximizada é:

$$l(\lambda, \gamma) = \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}, \lambda) + \sum_{t=1}^J [k_t \ln \gamma + F_{\tau_t}(k_t; \lambda) \gamma - \ln k_t! - \gamma] \quad (3-44)$$

A maximização da função log-verossimilhança em relação ao parâmetro γ produzirá o seguinte estimador:

$$\hat{\gamma} = \frac{k.}{J - \sum_{t=1}^J (F_{\tau_t}(T_t; \lambda))} \quad (3-45)$$

Onde, $k. = \sum_{t=1}^J k_t$.

As derivadas da função log-verossimilhança em relação a cada parâmetro da distribuição de atrasos são:

$$\frac{\partial l(\lambda, \gamma)}{\partial \lambda_1} = \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \frac{\alpha e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} (1 - \lambda_1 \tau_{t,i})}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} - \sum_{t=1}^J T_t \alpha e^{-\lambda_1 T_t} \gamma \quad (3-46)$$

$$\frac{\partial l(\lambda, \gamma)}{\partial \lambda_2} = \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \frac{(1 - \alpha) e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}} (1 - \lambda_2 \tau_{t,i})}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} - \sum_{t=1}^J T_t (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 T_t} \gamma \quad (3-47)$$

$$\frac{\partial l(\lambda, \gamma)}{\partial \alpha} = \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} + \sum_{t=1}^J (e^{-\lambda_1 T_t} - e^{-\lambda_2 T_t}) \gamma \quad (3-48)$$

Pode-se notar que ao igualarmos as derivadas acima a zero, não é possível isolar os parâmetros da distribuição de atraso afim de obter uma expressão analítica para cada um dos estimadores. Assim, para encontrar as estimativas desses parâmetros, a função log-verossimilhança acima foi maximizada em relação a cada parâmetro a partir do algoritmo de busca não linear `fmincon` do software Matlab, usando as derivadas acima para comporem o gradiente.

Já o parâmetro γ foi estimado de forma iterativa, conforme os passos a seguir:

- 1-Escolhe-se um valor inicial para γ ;
- 2-A partir deste γ fixo as estimativas para os parâmetros da distribuição de atrasos são encontradas conforme explicado acima;
- 3-Calcula-se um novo γ utilizando-se os parâmetros da distribuição de atrasos estimados;
- 4-Se a diferença entre o novo γ e o γ anterior for maior que um determinado ϵ retorna-se ao passo 2.

3.4.4

Atualização da estimativa dos parâmetros x Truncamento dos dados

Para os últimos dias de ocorrência de sinistros temos poucos dados observados para ajuste das curvas de atraso. Além disso, os atrasos observados são muito curtos. Esses fatos dificultam a estimação de uma distribuição que represente os atrasos que serão observados nesses dias através do método de máxima verossimilhança. Segundo Al-Athari(48) o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro da distribuição exponencial só existe se a média amostral for inferior à metade do prazo de truncamento dos dados. Por este fato, a estimativa de λ foi substituída por seu valor mais recente a partir do momento em que a média esperada a partir deste $\hat{\lambda}$, $1/\hat{\lambda}$ passa a ser maior

que a metade do prazo de truncamento. Para o caso onde a distribuição de atrasos considerada é uma mistura de exponenciais, uma regra semelhante foi adotada. Quando a média esperada de uma das distribuições envolvidas na mistura ultrapassa a metade do prazo de truncamento do dia de ocorrência estudado, o valor estimado para o λ e para o α que combina as distribuições estimadas para o dia de ocorrência anterior é repetido até o último dia de ocorrência da base.

3.4.5

Estimador da quantidade IBNR

Conforme especificação do modelo, a quantidade total de sinistros ocorridos em cada instante de tempo, N_d , segue uma distribuição Poisson com parâmetro γ_d . Porém a distribuição de N_d dadas as informações conhecidas no último instante observável, é desconhecida.

Seja a quantidade N_d dadas as informações conhecidas estimada pela esperança desta variável e dado que $(N_d - K_d) \mid \{N_d \geq k_d, K_d = k_d\} \sim \text{Poisson}(\gamma_d F_{\tau_d}(T_d; \lambda_d))$, temos:

$$\begin{aligned} \hat{N}_d &= E[N_d \mid N_d \geq k_d, K_d = k_d] \\ &= E[(N_d - K_d) \mid N_d \geq k_d, K_d = k_d] + E[K_d \mid K_d = k_d] \\ &= \hat{\gamma}_d F_{\tau_d}(T_d; \lambda_d) - k_d + k_d \\ &= \hat{\gamma}_d F_{\tau_d}(T_d; \lambda_d) + k_d \end{aligned} \tag{3-49}$$

Onde $\hat{\gamma}_d$ é a estimativa de γ quando a janela de dados é composta pelos dias de ocorrência $t = d - J + 1, \dots, d$, com $J \leq d \leq D$.

A demonstração da distribuição de $(N_d - K_d) \mid \{N_d \geq k_d, K_d = k_d\}$ está no apêndice A.3.

A quantidade IBNR do período de ocorrência t será estimada por:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_d &= \hat{N}_d - k_d \\ &= \hat{\gamma}_d F_{\tau_d}(T_d; \lambda_d) + k_d - k_d \\ &= \hat{\gamma}_d F_{\tau_d}(T_d; \lambda_d) \end{aligned} \tag{3-50}$$

Assim, a quantidade IBNR total \hat{Q} é estimada por

$$\sum_{d=1}^D \hat{Q}_d \tag{3-51}$$

3.4.6

Distribuição da Quantidade IBNR

Como a quantidade IBNR total é uma soma de variáveis independentes, Q_d , com distribuição Poisson, a distribuição da quantidade IBNR total, Q , também é uma Poisson com média igual a soma das médias das variáveis Q_d . Assim, seu intervalo de confiança é diretamente calculado pelos percentis da Poisson com média e variância iguais à quantidade IBNR total estimada.

A quantidade IBNR por período de aviso também tem distribuição Poisson com média igual a soma das médias das variáveis Poisson que a compõem. A distribuição desta quantidade por período de aviso será importante na avaliação do IC obtido para cada período de aviso que foi excluído da amostra para avaliação da qualidade da previsão do modelo. As demonstrações sobre a distribuição da quantidade por período de aviso, encontra-se no apêndice A.3.

4 Aplicações

4.1 Dados

Serão utilizados dados diários de quantidade de sinistros do seguro DPVAT (Danos Pessoais Causados por Veículos Automotores de Via Terrestre) ocorridos em uma janela de 11 anos de ocorrência e avisos - 2001 a 2011. O seguro DPVAT garante indenização por morte, invalidez e DAMS (Despesas de Assistência Médica e Suplementares) a pedestres ou ocupantes de veículos que venham a sofrer acidentes provocados por veículos automotores de via terrestre ou sua carga. Esta indenização é devida a qualquer vítima desses acidentes em território nacional. O prêmio deste seguro é pago compulsoriamente por proprietários de veículos legalizados no país. O número de beneficiários possíveis não é definido e deve superar a população brasileira, o que complica a obtenção de uma medida de exposição. Além desta particularidade, o seguro DPVAT tem um histórico de grandes modificações em sua regulação. Algumas delas são: a alteração do prazo de aviso e as mudanças nos valores máximos indenizáveis por cobertura. Estas mudanças podem provocar reações comportamentais nos reclamantes, impactando a velocidade de aviso de sinistro e o valor da indenização média.

Os métodos testados nesta dissertação, em geral, se baseiam no desenvolvimento de pagamento de indenizações ou avisos de sinistros ao longo do tempo. O desenvolvimento do pagamento do seguro DPVAT está diretamente associado às alterações de limites máximos de indenização. Essas alterações devem continuar a ocorrer para que as indenizações continuem significativas frente aos danos e causas cobertas por este seguro conforme oscilações na valorização da moeda. Em contrapartida, apesar da forte redução do prazo máximo de aviso dos sinistros DPVAT, esta alteração passou a valer de forma imediata somente para uma parte dos sinistros ocorridos, de forma que é possível observar avisos com atrasos superiores aos permitidos pela nova regra mesmo após sua entrada em vigor. Como os efeitos desta última alteração devem ser permanentes, já que uma nova redução ou expansão de prazo é

improvável, optou-se por modelar o desenvolvimento de aviso de sinistros e posteriormente associar aos sinistros IBNR estimados à severidade devida a eles. Assim, nesta dissertação, são utilizados os dados de quantidades de aviso. Além do número de sinistros avisados, será utilizada a quantidade de bilhetes DPVAT emitidos anualmente como medida de volume da massa segurada nos métodos tradicionais que exigem uma medida de volume. Os resultados apresentados se referem à cobertura do risco Morte.

A tabela 4.1 contém a média de atrasos de aviso(em dias) observados em cada ano de ocorrência contido na amostra. Além dessa informação também é apresentado o máximo atraso observável e a média do total de sinistros ocorridos em cada dia da amostra, avisados até dez/2011, por ano de ocorrência.

Tabela 4.1: Estatísticas Descritivas

Ano de Ocorrência	Atraso Médio	Máximo Atraso	Quantidade Média
2001	176,5	4.016	90,1
2002	176,3	3.651	95,8
2003	194,1	3.286	91,0
2004	224,0	2.921	93,4
2005	190,9	2.555	97,1
2006	173,1	2.190	96,6
2007	166,6	1.825	103,8
2008	133,2	1.460	106,0
2009	116,6	1.094	104,1
2010	96,4	729	113,0
2011	59,3	364	89,4

Pode-se observar que os anos de ocorrência de 2003, 2004 e 2005 são os anos que apresentaram os maiores atrasos médios. O ano de 2003 é justamente o ano em que entrou em vigor a redução de prazo máximo de aviso de até 20 anos após a ocorrência para até 3 anos apenas. Pode-se considerar que se trata de um período de adaptação dos reclamantes e aqueles que demorariam mais de 3 anos para avisar sinistro atentaram para o novo prazo quando este já estava quase saturado.

A distância entre os atrasos máximos observáveis e os atrasos médios observados é bem grande em todos os anos. Portanto, até o ano de 2007 o atraso médio observado não parece ser muito impactado pela redução da observabilidade dos atrasos. já, a partir do ano de ocorrência 2008 o atraso médio já é bem distante dos atrasos médios de anos anteriores chegando a um atraso médio de quase 60 dias. Esperamos uma queda no atraso médio real para anos mais recentes como efeito da redução do prazo para aviso do

sinistro. Porém, uma média em torno de 60 dias não é razoável. As distribuições de atraso de períodos de ocorrência mais recentes são muito influenciadas pela não observabilidade de atrasos longos e completar esta informação deve ser uma tarefa considerada de alguma forma nos métodos e/ou modelos utilizados.

A quantidade média de sinistros ocorridos por dia cresceu ao longo dos anos. Devido a não observabilidade de sinistros avisados após dez/2011 sabemos que as quantidades totais de sinistros ocorridos por dia é maior que as quantidades totais observadas. A distância entre a quantidade média de sinistros observados ocorridos no ano de 2011 e a quantidade média dos anos anteriores evidencia essa característica.

4.2

Distribuição de Atrasos e frequência de sinistros

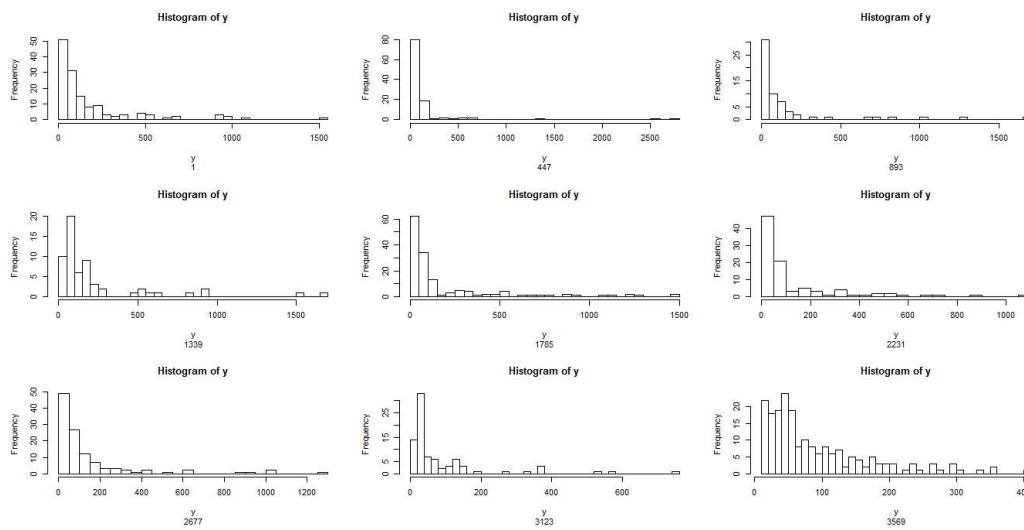
Seguem na figura 4.1 os histogramas das distribuições de atraso observadas em 9 dias. Esses 9 dias selecionados são bem distribuídos dentre todos os dias de ocorrência dos 11 anos observados(4.017 dias). Essas distribuições empíricas são truncadas à direita pois só sinistros avisados até a data corrente podem ser observados. Assim, quanto mais antigo o dia de ocorrência, menor o truncamento dos dados. A partir da seleção destes dias pode-se analisar desde uma distribuição empírica de atrasos mais completa (primeiro dia de ocorrência observado) até uma mais incompleta. Dentre os histogramas apresentados, o dia de ocorrência mais recente, com distribuição de atrasos mais incompleta, é o dia 3569(09/10/2010), que pode apresentar sinistros avisados com até 448 dias de atraso. A tabela 4.2 apresenta a identificação dos dias(y) selecionados:

Tabela 4.2: Dias de ocorrência selecionados(y)

Dia(y)	Data da Ocorrência
1	01/01/2001
447	23/03/2002
893	12/06/2003
1339	31/08/2004
1785	20/11/2005
2231	09/02/2007
2677	30/04/2008
3123	20/07/2009
3569	09/10/2010

Pode-se observar a semelhança destas distribuições com a distribuição Exponencial, porém, com dados faltantes à direita. Como para dias de ocorrência mais recentes somente atrasos cada vez mais curtos são observáveis,

Figura 4.1: Histogramas dos atrasos de aviso observados em 9 dias selecionados



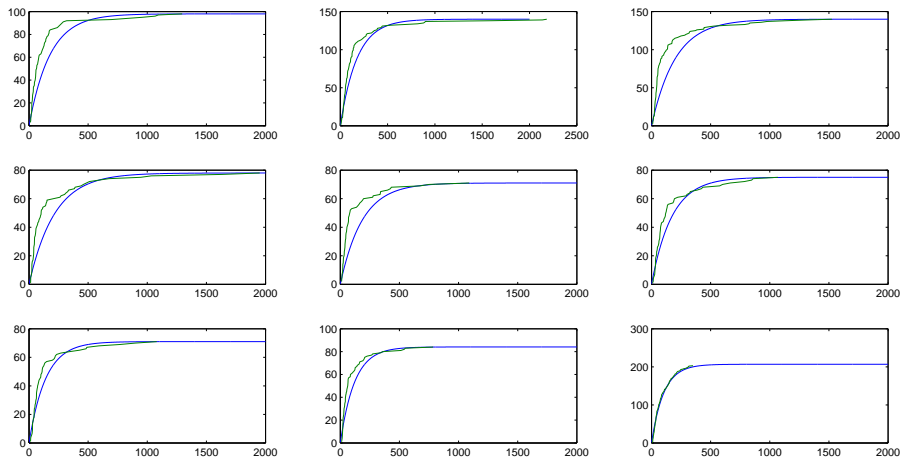
o último gráfico já não se assemelha tanto a uma distribuição exponencial. Outra distribuição que poderia ser cogitada é a distribuição lognormal, que alcançaria a menor incidência de atrasos bem curtos, menores que o modal, apresentadas nos histogramas de $y = 1339$ e $y = 3123$.

Numa primeira tentativa, foi ajustada uma distribuição exponencial truncada utilizando a metodologia proposta em Weissner(38). Esta mesma metodologia foi utilizada para o primeiro ajuste de uma mistura de exponenciais aos dados de atraso. Mais adiante serão apresentadas as estimativas obtidas pela metodologia proposta utilizando as mesmas distribuições. O parâmetro λ para cada dia de ocorrência t foi estimado utilizando os dados de até 364 dias de ocorrência anteriores a t . Assim, a janela deslizante de dados utilizada para essa estimação é de comprimento 365 dias.

A figura 4.2 apresenta os gráficos das curvas das distribuições exponenciais acumuladas ajustadas para os 9 dias selecionados versus curvas acumulada de atrasos observados nesses dias.

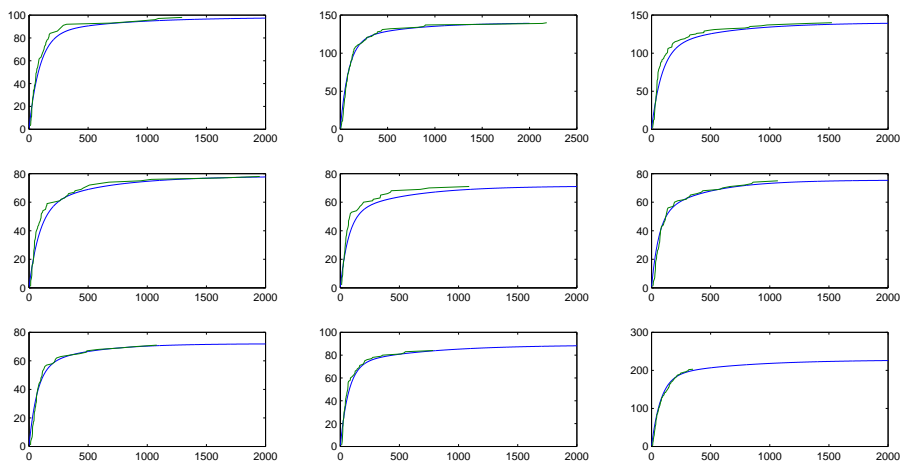
Nota-se que as curvas estão bem próximas das curvas observadas, porém há um forte desenvolvimento dos avisos em um período curto de atraso que as curvas ajustadas não conseguem alcançar. Ao mesmo tempo, temos um desenvolvimento de longo prazo que não seria alcançado se a média da exponencial ajustada fosse inferior. Optamos, então, pelo ajuste de uma curva formada pela mistura de duas distribuições exponenciais. A necessidade dessa mistura pode ser interpretada pela crença de que há dentre os reclamantes de seguro DPVAT pelo menos 2 públicos: um que, em geral, avisa rapidamente o sinistro, logo após a ocorrência, e outro grupo que demora a avisar o sinistro, sendo, neste caso, raros os avisos em atrasos curtos. Seguem na figura 4.3 os

Figura 4.2: Curvas Exponenciais Ajustadas - 9 dias selecionados



gráficos das curvas de mistura exponencial ajustadas juntamente com as curvas empíricas.

Figura 4.3: Curvas da Mistura de Exponenciais Ajustadas - 9 dias selecionados



Podemos notar que a partir destas últimas curvas é possível alcançar o forte desenvolvimento inicial mostrado pelas curvas empíricas e através dos valores dos parâmetros ajustados podemos ver que é possível contemplar os dois públicos de reclamantes mencionados acima, inclusive o percentual de participação de cada um deles.

Conforme o que foi dito no item 3.4.4, devido ao truncamento dos dados observados, a partir de determinado dia de ocorrência a estimativa do valor dos parâmetros foi mantida constante. As figuras 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam gráficos com o dia de ocorrência a partir do qual as estimativas de parâmetros foram repetidas até o último dia de ocorrência da base. Os atrasos esperados para

dias de ocorrência anteriores ao dia de ocorrência 2000 foram ocultados para melhor análise do truncamento nos últimos dias de ocorrência da base de dados. A linha azul dos gráficos representa o valor médio esperado da distribuição exponencial estimada para cada dia de ocorrência. A linha vermelha representa a metade do truncamento por dia de ocorrência. Após o cruzamento destas duas linhas as estimativas obtidas para o dia anterior a esse cruzamento foram repetidas.

Figura 4.4: Valores esperados dos atrasos x Truncamento/2 por dia de ocorrência - Distribuição de atrasos exponencial

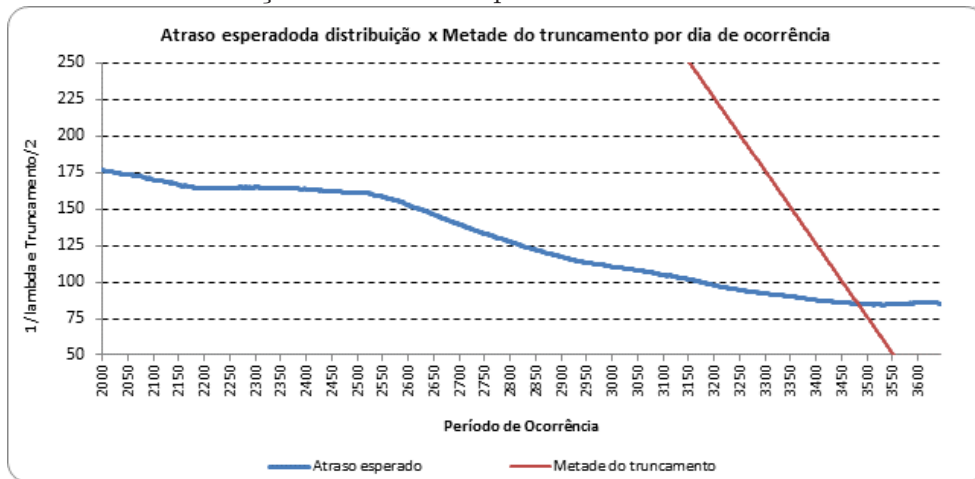
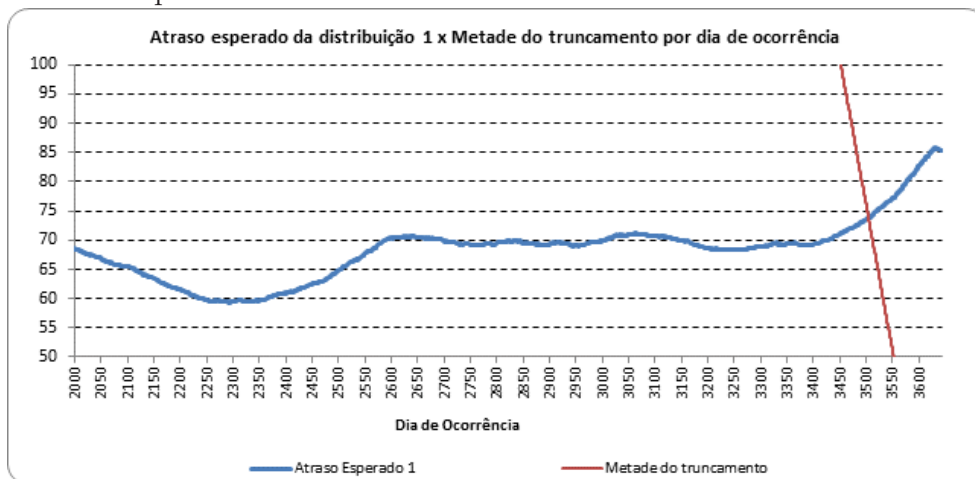


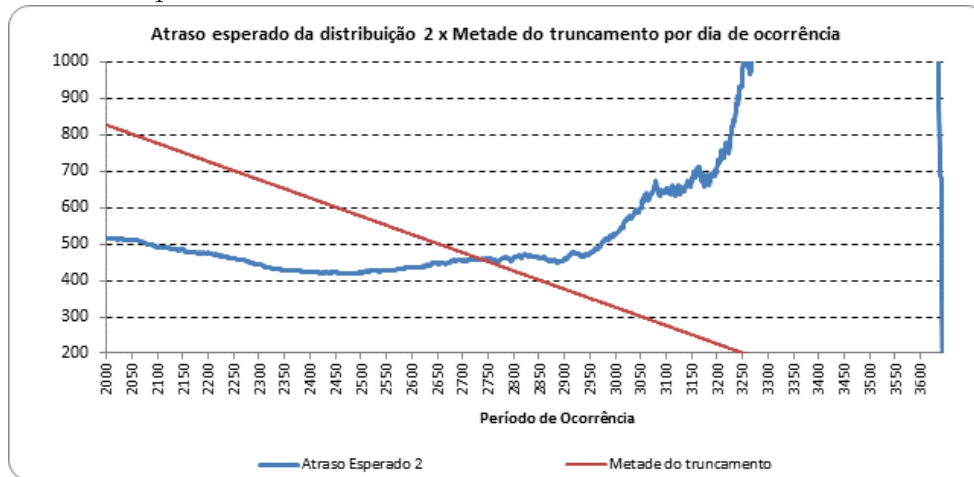
Figura 4.5: Valores esperados dos atrasos da distribuição 1 de misturas de exponenciais x Truncamento/2 por dia de ocorrência - Distribuição de atrasos mistura de exponenciais



Na figura 4.5 pode-se observar um crescimento dos atrasos esperados para as distribuições estimadas para dias imediatamente anteriores ao ponto de cruzamento das duas linhas. Percebe-se que a partir do ponto de cruzamento este crescimento se acentua e a utilização das últimas estimativas de parâmetros obtidas antes deste ponto para os pontos a seguir elimina

a utilização destas estimativas que representariam uma mudança brusca e improvável nas curvas ajustadas para cada dia de ocorrência através do método de máxima verossimilhança.

Figura 4.6: Valores esperados dos atrasos da distribuição 2 de misturas de exponenciais \times Truncamento/2 por dia de ocorrência - Distribuição de atrasos mistura de exponenciais



A figura 4.6 apresenta os atrasos esperados por dia de ocorrência da segunda distribuição exponencial da mistura de exponenciais. Essa segunda distribuição representa avisos com atrasos longos em cada dia de ocorrência. Devido ao fato dos atrasos esperados nesta distribuição serem bem maiores que os atrasos esperados na primeira distribuição exponencial, esses atrasos esperados superam a metade do prazo de truncamento por dia de ocorrência muito mais antecipadamente que no caso da primeira distribuição exponencial. Após o cruzamento entre as duas linhas apresentadas no gráfico há um forte crescimento das medidas de atrasos esperados, claramente irreal.

Os gráficos 4.7, 4.8, 4.10 e 4.12 apresentam os atrasos esperados em todos os dias de ocorrência presentes na base de dados após aplicação da regra mencionada no item 3.4.4. Para avaliar o efeito do truncamento dos dados nas estimativas dos parâmetros das distribuições de atraso, o ajuste do modelo foi realizado eliminando até os últimos 3 anos de aviso dos dados. As figuras 4.7 e 4.8 apresentam os atrasos esperados dadas as distribuições de atraso ajustadas por dia de ocorrência, exponencial simples e mistura de exponenciais.

Ainda restaram variações que não fariam sentido à primeira vista, porém sem este tratamento as estimativas dos parâmetros levariam a atrasos esperados, além de menos confiáveis, intratáveis por tenderem a infinito. Cada massa de dados (massa de sinistros ocorridos e avisados até um, dois ou 3 períodos antes do último período da base ou todos os sinistros observados) utilizada para os diferentes ajustes tem a estimativa dos parâmetros da

Figura 4.7: Atrasos esperados - Exponencial (Proposta Weissner)

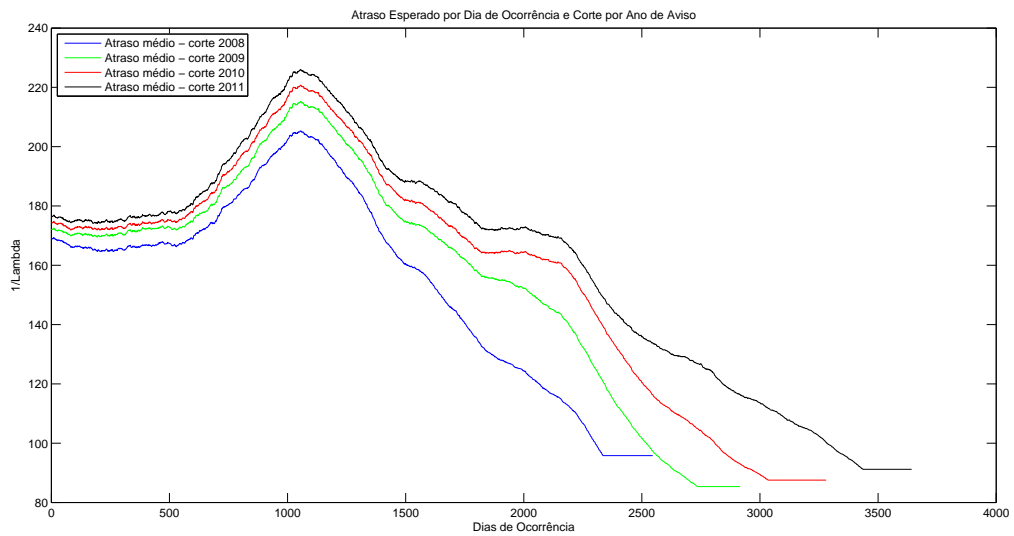
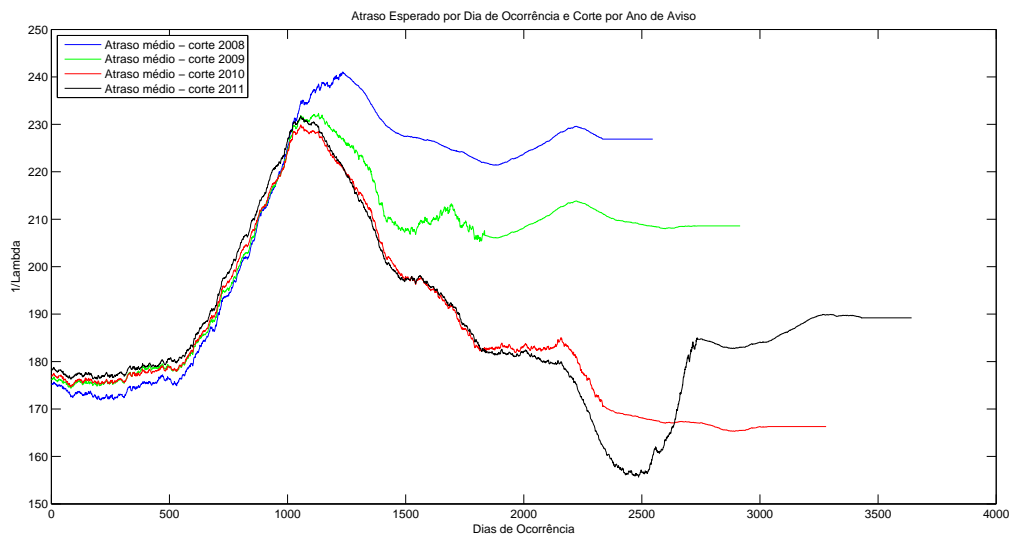


Figura 4.8: Atrasos esperados - Mistura de Exponenciais (Proposta Weissner)

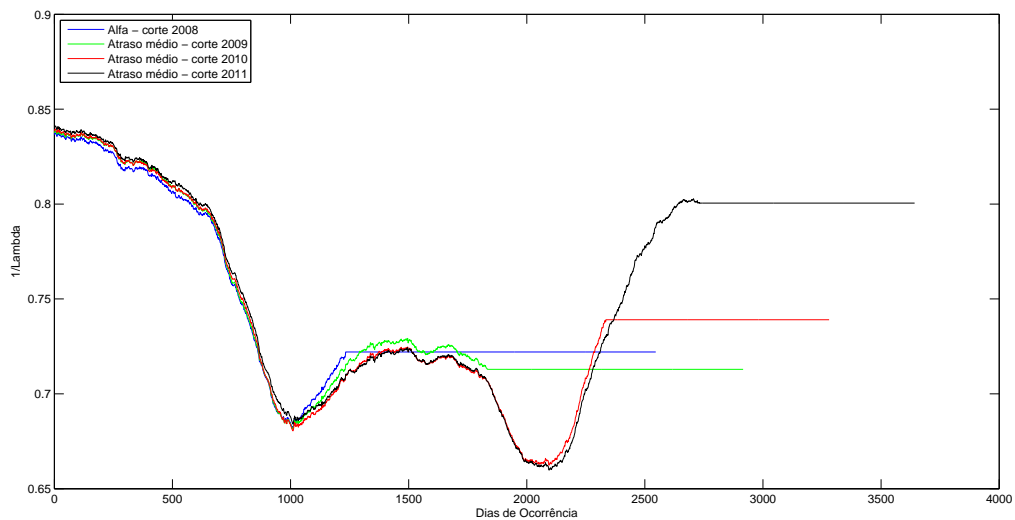


distribuição mantidos constantes a partir de dias diferentes. No caso do ajuste da distribuição de mistura de exponenciais cada λ envolvido na distribuição de atrasos é fixado a partir de ponto diferente. A figura 4.8 apresenta os atrasos esperados obtidos a partir da combinação das duas exponenciais que compõem a distribuição de atrasos. Porém, os λ 's estimados de cada componente da mistura de exponenciais são muito distintos, um deles gera uma esperança de atraso em torno de 600 dias enquanto que o outro gera uma esperança de 80 dias. No processo de estimação, o λ correspondente a distribuição com maior atraso esperado é fixado primeiro, pois supera mais rapidamente a metade do prazo de truncamento dos dados. Neste momento o α também é fixado.

Como o outro λ ainda não foi fixado a distribuição do atraso médio calculado a partir desses parâmetros não é constante desde este ponto de fixação até que este λ seja constante também. É possível ver que, apesar de considerarmos na verossimilhança do modelo o truncamento dos dados ajustando a eles uma distribuição condicional, os parâmetros estimados ainda variam muito conforme o truncamento.

Na figura 4.9 vemos a evolução das estimativas para o parâmetro α . Este parâmetro combina as duas distribuições exponenciais que modelam os atrasos e está em torno de 85% nos primeiros dias de ocorrência estudados. Durante um período, entre 2002(dia de ocorrência em torno de 500) e 2008(dia de ocorrência em torno de 2500), o valor estimado de α é menor, indicando que houve um aumento da frequência de atrasos longos nesse período, depois ele volta a subir chegando a 80%. O retorno da estimativa de α para o patamar de 80% é coerente pois a medida que o tempo passa mais efetiva é a redução do prazo de aviso máximo aceitável.

Figura 4.9: Parâmetro alfa - Atrasos como mistura de Exponenciais (Proposta Weissner)

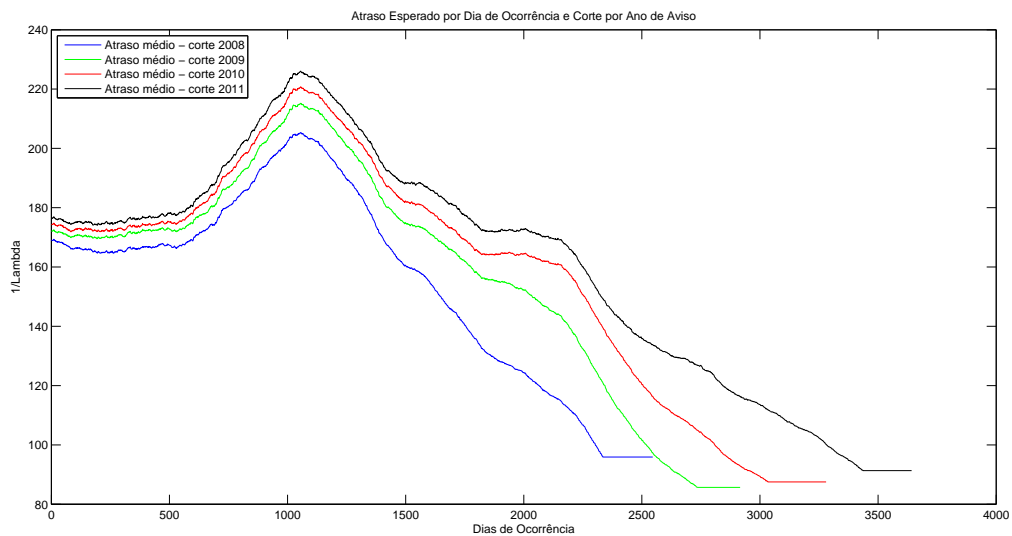


Através das curvas de atraso ajustadas chega-se à uma primeira estimativa da quantidade total esperada de sinistros ocorridos em cada dia observado conforme proposto por Weissner e a partir desta quantidade temos a quantidade IBNR.

A verossimilhança proposta por Weissner não é completa, pois desconsidera que a quantidade de sinistros observada também é uma variável aleatória. O modelo proposto nesta dissertação considera que esta quantidade tem distribuição binomial dependente dos parâmetros da distribuição de atrasos, do prazo máximo de atraso observável e do parâmetro da distribuição

do número total de sinistros ocorridos em cada dia. Considerando atrasos com distribuição exponencial, os parâmetros das distribuições dessas 3 variáveis, quantidade avisada até o máximo atraso, número de sinistros ocorridos por dia e atraso, foram estimados conjuntamente. As figuras 4.10 e 4.11 apresentam os gráficos dos novos valores esperados dos atrasos e do parâmetro γ referentes ao modelo proposto, com estimação dos λ 's e γ 's através da aplicação do algoritmo EM.

Figura 4.10: Valores esperados dos atrasos - Exponencial (Proposta Dissertação)



Observamos que o gráfico dos valores esperados dos atrasos obtidos a partir da estimação de λ (figura 4.12) é muito semelhante ao obtido no ajuste independente da estimação do parâmetro γ . Mesmo neste modelo, o viés causado pelo truncamento ainda ocorre: quanto mais truncados são os atrasos menor o atraso médio estimado.

A curva exponencial ajustada conjuntamente com a distribuição do número de sinistros ocorridos também não consegue alcançar o rápido desenvolvimento da curva de atraso, conforme comentado no início desta seção. Por isso, também foi realizada a estimação conjunta da distribuição de atraso como uma mistura de exponenciais através da função de verossimilhança apresentada, otimizada a partir de um algoritmo de busca não linear implementado em Matlab. As figuras 4.12 e 4.14 apresentam os atrasos esperados em das curvas ajustadas para cada dia de ocorrência. A figura 4.12 se refere às curvas ajustadas a dados com aviso até o final dos anos de 2008 a 2011, conforme legenda, enquanto a figura 4.14 se refere às curvas ajustadas a dados com aviso até o final dos meses de setembro (dia 3925) a dezembro de 2011 (dia 4017).

Figura 4.11: Parâmetro γ - Atraso Exponencial (Proposta Dissertação)

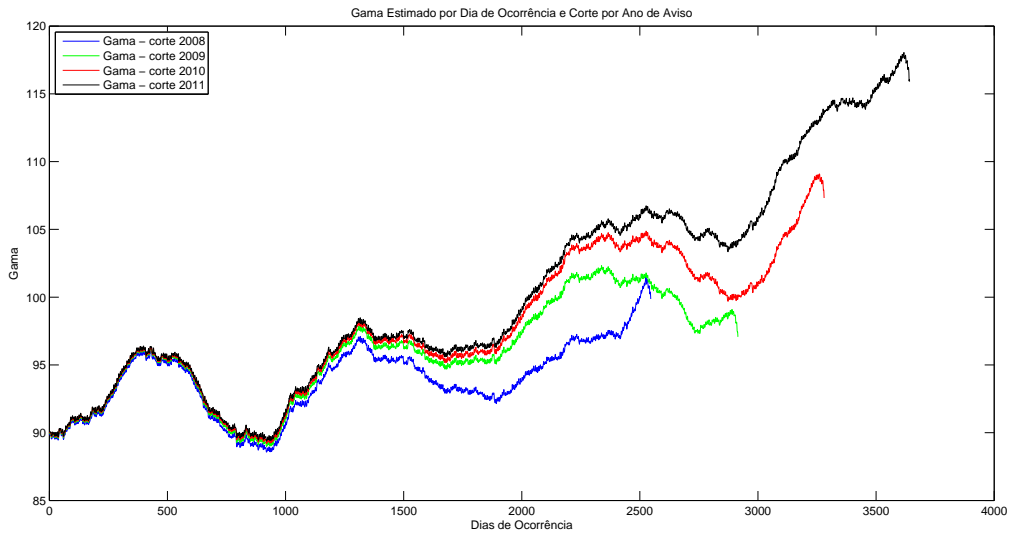
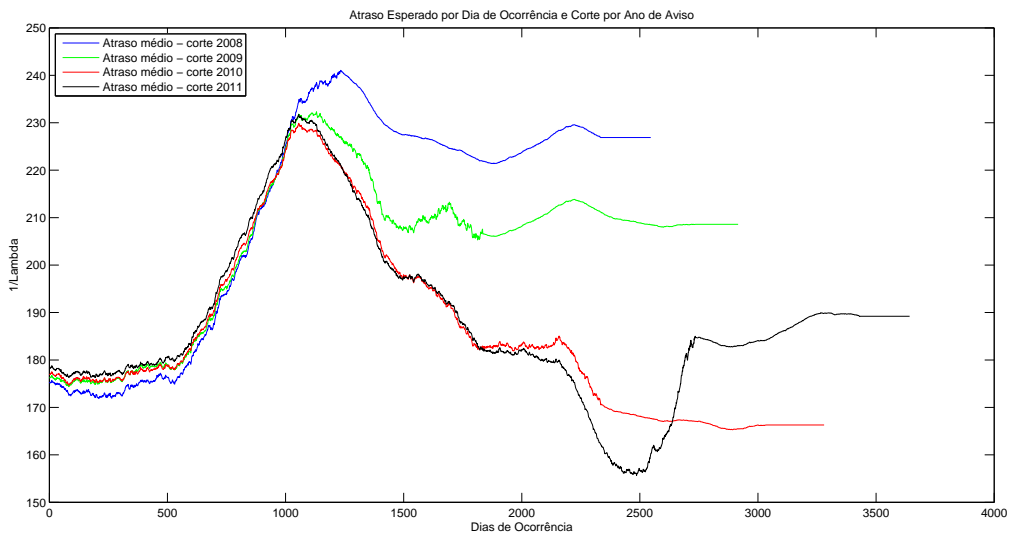


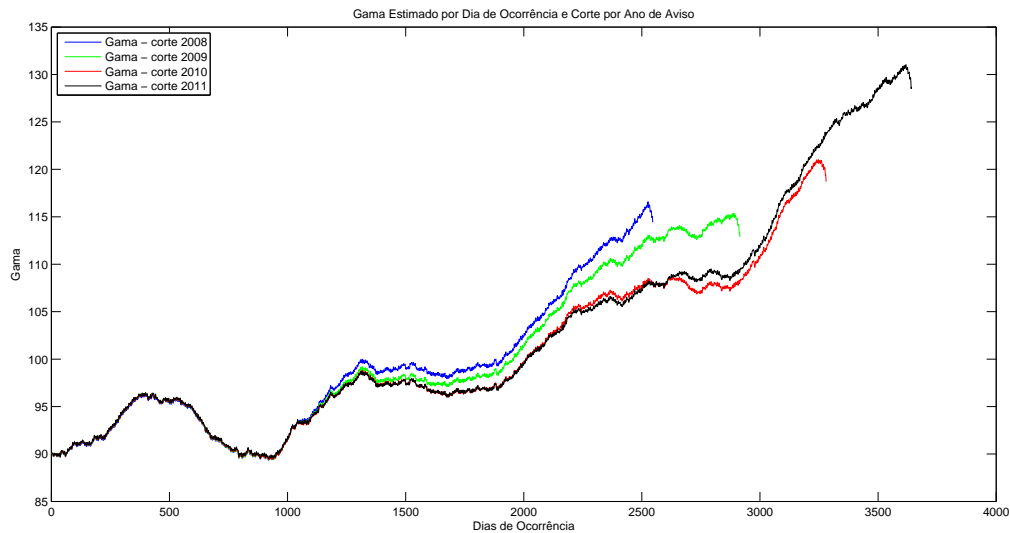
Figura 4.12: Valores esperados dos atrasos - Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação) - Amostras com e sem últimos anos de aviso observados



Os valores esperados dos atrasos apresentados na figura 4.12 não apresentam o viés de truncamento apresentado na figura 4.10. Isso ocorre devido a aplicação da regra descrita em 3.4.4. Quando são utilizados dados de sinistros com aviso até dez/2008, a estimativa do parâmetro λ da curva de atrasos da mistura de exponenciais que representa os atrasos mais longos e a estimativa do parâmetro α começam a ser repetidas em torno do dia de ocorrência 1400. Com a utilização de dados de sinistros avisados até dez/2009 essa repetição de estimativas ocorre a partir do dia de ocorrência 1800, após uma queda da esperança das distribuições ajustadas para a primeira exponencial da mistura de exponenciais. O mesmo ocorre quando se utiliza

dos dados de sinistros com aviso até dez/2010, a repetição de estimativa de parâmetros ocorre após uma queda da esperança das distribuições ajustadas. Somente para ajuste com dados de sinistros avisados até dez/2011 é possível encontrar dados que geram estimativas de parâmetros que nos dão atraso esperado crescente até as estimativas começarem a serem repetidas.

Figura 4.13: Parâmetro γ - Atrasos como Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação)

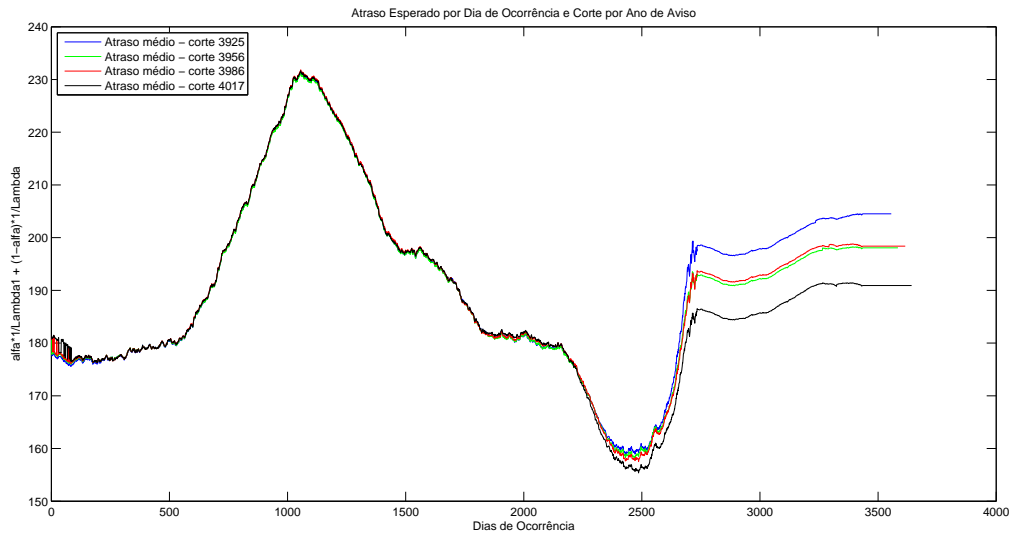


A partir dos gráficos 4.11 e 4.13 vê-se que o fato de estimar conjuntamente os parâmetros das distribuições incorporadas no modelo influencia as estimativas obtidas, as estimativas dos parâmetros da distribuição da quantidade total de sinistro variam conforme especificação e estimação dos parâmetros da distribuição de atraso. As estimativas do parâmetro γ parecem menos sensíveis ao truncamento quando estimado conjuntamente com os parâmetros da distribuição de atraso segundo uma mistura de exponenciais. Também vemos que ambos gráficos apresentam movimentos parecidos para a estimativa do parâmetro γ no decorrer dos períodos de ocorrência estudados. O primeiro movimento de queda, em ambos gráficos, se inicia próximo ao dia de ocorrência 500(05/2002). Porém, em torno do dia de ocorrência 1000(09/2003) ambos iniciam uma tendência de crescimento da quantidade de sinistros ocorridos nesse seguro, já bem divulgada na mídia nacional.

Segue, na figura 4.14, o gráfico de medidas obtidas a partir dos parâmetros da distribuição de atrasos segundo uma mistura de exponenciais estimados utilizando dados com e sem os últimos meses de aviso observados.

Os parâmetros ajustados utilizando-se os dados dos onze anos observados exceto o último mês de aviso(dados de jan/2001 a nov/2011) até a utilização de dados sem os últimos três meses de aviso(dados de jan/2001 a set/2011)

Figura 4.14: Valores esperados dos atrasos - Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação) - Amostras com e sem últimos meses de aviso observados



têm desenvolvimento muito semelhante ao dos parâmetros ajustados para os dados dos onze anos observados.

Obtidas as estimativas dos parâmetros, foram calculadas as estimativas das quantidades totais de sinistros por ocorrência. As figuras 4.15 e 4.16 apresentam a relação entre a quantidade de sinistros observada k_d , a quantidade total de sinistros estimada no modelo que considera apenas a distribuição de atrasos segundo uma mistura de exponenciais (proposto por Weissner) e o modelo proposto neste trabalho que também modela a quantidade total de sinistros ocorridos por período, N_d , segundo uma distribuição de Poisson.

As figuras 4.15 e 4.16 mostram a quantidade de sinistros observados e a quantidade total estimada para cada dia de ocorrência a partir do dia 2500(11/2007) até o último dia da base, 4017(12/2011). Neles observa-se um problema na quantidade total de sinistros estimada pelo método proposto por Weissner (porção azul na extremidade direita do gráfico). Como a estimativa dessa quantidade através deste método é feita pela aplicação de um fator calculado a partir da distribuição de atrasos sobre a quantidade de sinistros observada k_d , a quantidade total de sinistros estimada é influenciada pela brusca queda do número de avisos observados nos últimos períodos, o que não é razoável, pois não há justificativa para uma queda tao brusca do número total de sinistros ocorridos estimado em tão curto prazo. O método proposto nesta dissertação é robusto em relação a esta queda pois utiliza um percentual da quantidade de sinistros total esperada através da distribuição de N_d . Podemos observar na figura 4.16 que nos últimos períodos o patamar do da

Figura 4.15: Ultimate x k_d x γ - Mistura de Exponenciais (Proposta Weissner)

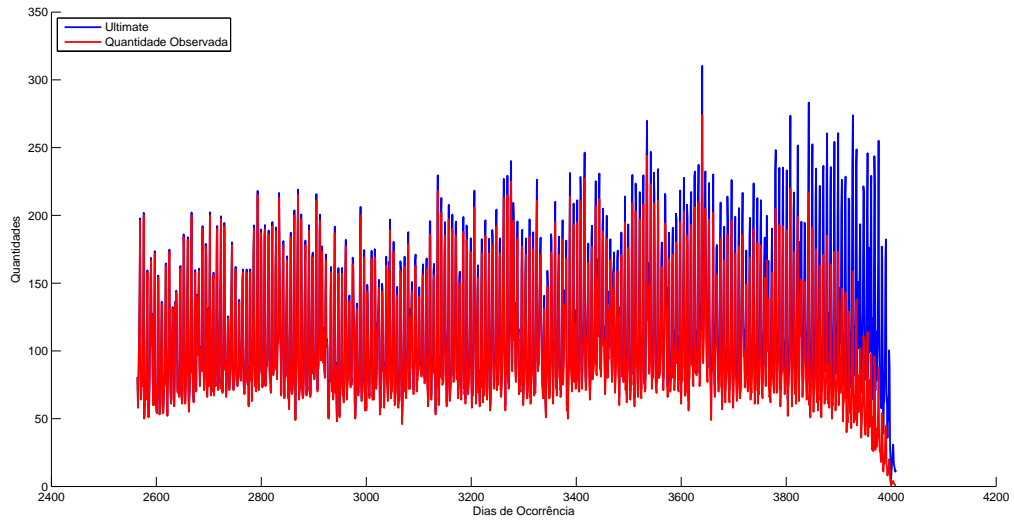
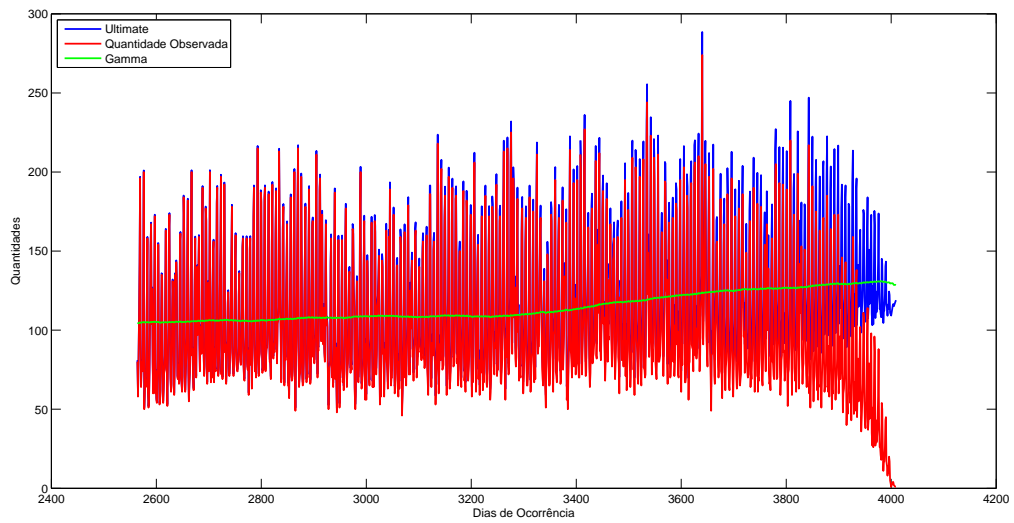


Figura 4.16: Ultimate x k_d x γ - Mistura de Exponenciais (Proposta Dissertação)



quantidade total estimada não sofre a queda observada na figura 4.15. O gama obtido também é bem razoável em relação às quantidades totais históricas, conseguindo até captar a evolução crescente esperada da quantidade N_d em períodos de ocorrência mais recentes.

Foi estimada também a quantidade IBNR avisada nos períodos excluídos da amostra utilizada para ajuste do modelo, para avaliação da qualidade de predição do modelo. As quantidades estimadas utilizadas para comparação com as previsões feitas pelos modelos propostos usam triângulos sem ajuste de cauda. Assim, o efeito de cauda foi eliminado da quantidade prevista pelos métodos de micro-dados aqui abordados.

4.3

Erros de previsão e estimativa da quantidade IBNR

Para previsão dos últimos 1,2 e 3 anos de aviso fora da amostra utilizada para ajuste:

Tabela 4.3: Medidas dos Erros B-F Estendido - Previsões Anuais

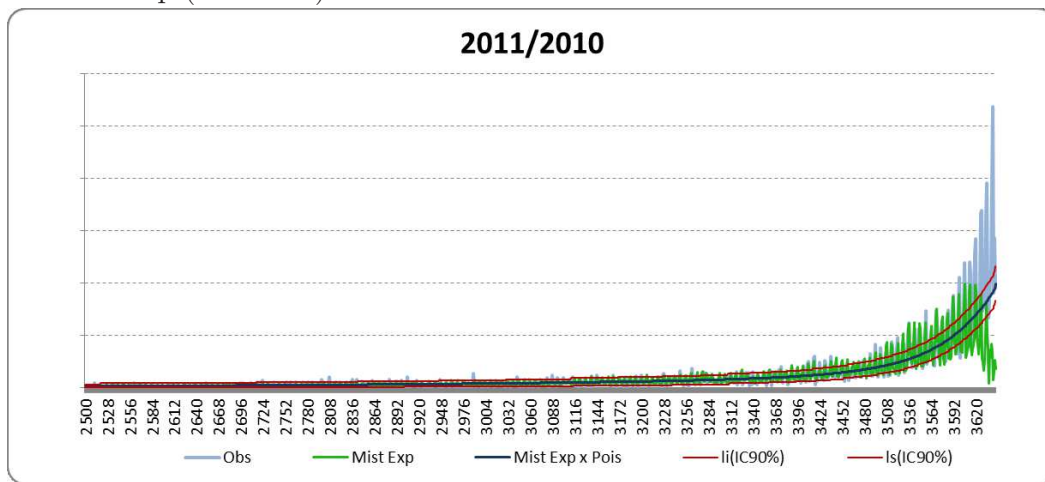
Métodos B-F Estendido	Até Dez/2008			Até Dez/2009			Até Dez/2010			IBNR 2011
	MAPE	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	
Ultimate LD(Desenv. Pan)	24%	866	946	25%	1,872	2,150	8%	1,089	1,089	24,984
Ultimate Pan(Desenv. Pan)	23%	852	932	26%	1,904	2,183	8%	1,197	1,197	25,131
Ultimate Pan*(Desenv. Pan)	23%	852	932	26%	1,904	2,183	8%	1,197	1,197	25,131
Ultimate LD(Desenv. CL)	25%	930	1,021	26%	1,936	2,232	9%	1,237	1,237	25,164
Ultimate Pan(Desenv. CL)	24%	898	984	26%	1,946	2,240	9%	1,303	1,303	25,243
Ultimate Pan*(Desenv. CL)	25%	920	1,011	27%	1,975	2,274	9%	1,359	1,359	25,342
Ultimate Mack(Desenv. Mack)	26%	978	1,079	27%	2,013	2,324	9%	1,367	1,367	25,333
Ultimate Pan(Desenv. AD)	31%	1,093	1,179	31%	2,205	2,488	11%	1,609	1,609	26,264
Ultimate LD(Desenv. AD)	32%	1,188	1,292	32%	2,292	2,595	12%	1,702	1,702	26,389
Ultimate Pan*(Desenv. AD)	32%	1,190	1,296	33%	2,355	2,661	13%	1,857	1,857	26,630
Mistura Exp.(Proposto)	43%	1,102	1,142	24%	1,160	1,160	14%	2,082	2,082	19,856
Mistura Exp.(Weissner)	46%	1,229	1,259	22%	856	924	20%	2,878	2,878	19,721
Ultimate CC(Desenv. Pan)	35%	1,522	1,771	42%	3,120	3,615	22%	3,248	3,248	28,015
Ultimate AD(Desenv. Pan)	36%	1,551	1,809	42%	3,161	3,662	23%	3,310	3,310	28,104
Ultimate CC(Desenv. CL)	37%	1,577	1,837	42%	3,173	3,685	23%	3,375	3,375	28,151
Ultimate AD(Desenv. CL)	37%	1,601	1,868	43%	3,209	3,727	24%	3,433	3,433	28,231
Ultimate CC(Desenv. AD)	44%	1,812	2,072	48%	3,492	3,996	26%	3,767	3,767	29,350
Ultimate AD(Desenv. AD)	44%	1,812	2,072	48%	3,492	3,996	26%	3,767	3,767	29,350
Exponencial(Proposto)	75%	2,853	3,158	63%	3,355	3,377	40%	5,832	5,832	9,781
Exponencial(Weissner)	75%	2,844	3,145	66%	3,627	3,685	44%	6,389	6,389	9,057

Nas tabelas acima as colunas com cabeçalho 'Até Dez/2008' apresentam as medidas de erro para previsões de quantidades de sinistros IBNR a serem avisados até Dez/2009, até Dez/2010 e até Dez/2011 usando dados observados até dez/2008, ou seja, até 3 passos à frente, sem efeito de cauda para os sinistros ocorridos em 2001 para ser comparável aos métodos de triângulo apresentados. As colunas com cabeçalho 'Até Dez/2010' apresentam as medidas de erro para previsões de quantidades com aviso até Dez/2010 e até Dez/2011 e as colunas com cabeçalho 'Até Dez/2009' apresentam as medidas de erro para previsões de quantidades com aviso até Dez/2011, ou seja, 1 passo após o "corte" da base de dados.

Podemos notar que o modelo com distribuição exponencial realmente não é adequado os dados do estudo. Seu desempenho foi o pior dentre os métodos apresentados. Observamos que as melhores predições dentre os métodos aplicados a micro-dados são realizadas pelo modelo proposto com distribuição de atrasos seguindo uma mistura de exponenciais. O modelo proposto por Weissner com distribuição de atrasos seguindo uma mistura de exponenciais tem medidas de erros próximas às do modelo proposto nesta dissertação. Porém, analisando a figura 4.17, onde estão representadas as

quantidades observadas em 2011 dadas as observações até dez/2010 versus as previsões de ambos modelos, vemos que as previsões encontradas por Weissner não são coerentes com as quantidades observadas. No modelo de Weissner a quantidade IBNR é um percentual da quantidade observada em cada período de ocorrência, como a quantidade observada decresce nos últimos períodos de ocorrência, as previsões de quantidade IBNR também decrescem, o que não condiz com a realidade. Podemos ver que a quantidade de sinistros avisados no período de interesse crescem muito nos últimos períodos de ocorrência, comportamento que é captado pelo modelo proposto nesta dissertação.

Figura 4.17: Quantidades Observadas x Estimadas Mistura Exp.(Proposto) x Mistura Exp.(Weissner)



Os métodos de micro-dados com distribuição de atrasos segundo uma mistura de exponenciais não são os que apresentam os menores erros, mas são competitivos em relação aos métodos tradicionais. Há métodos que utilizam o formato de dados tradicional que apresentam erros de previsão maiores que os deles, como o método Cape Cod com uso de fatores de desenvolvimento chain ladder.

Para previsão dos últimos 1,2 e 3 meses de aviso fora da amostra utilizada para ajuste:

Nas tabelas acima as colunas com cabeçalho 'Até Set/2011' apresentam as medidas de erro para previsões de quantidades de sinistros IBNR a serem avisados até Out/2011, até Nov/2011 e até Dez/2011 usando dados observados até Set/2011, ou seja, até 3 passos à frente, sem efeito de cauda para os sinistros ocorridos até Set/2011 para ser comparável aos métodos de triângulo apresentados. As demais colunas são análogas a essas, com 2 passos ou um

Tabela 4.4: Medidas dos Erros B-F Estendido - Previsões Mensais

Métodos B-F Estendido	Até Set/2011			Até Out/2011			Até Nov/2011			IBNR 2011
	MAPE	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	
Mistura Exp.(Proposto)	9%	140	191	8%	238	286	4%	129	129	19,856
Exponencial(Proposto)	6%	133	141	11%	343	407	9%	307	307	9,781
Mistura Exp.(Weissner)	9%	143	185	8%	277	381	10%	324	324	19,721
Ultimate LD(Desenv. Pan)	27%	596	612	17%	462	462	12%	380	380	24,013
Exponencial(Weissner)	6%	135	142	13%	408	475	13%	427	427	9,057
Ultimate Pan(Desenv. Pan)	23%	510	526	19%	506	507	14%	467	467	24,033
Ultimate Pan*(Desenv. Pan)	23%	510	526	19%	506	507	14%	467	467	24,033
Ultimate Pan(Desenv. AD)	26%	562	574	21%	559	560	16%	512	512	23,928
Ultimate Pan(Desenv. CL)	26%	559	573	21%	560	560	16%	515	515	23,019
Ultimate LD(Desenv. CL)	35%	770	791	24%	651	651	17%	563	563	23,381
Ultimate Mack(Desenv. Mack)	36%	783	803	25%	665	665	18%	580	580	23,506
Ultimate LD(Desenv. AD)	36%	790	810	25%	673	673	18%	588	588	24,453
Ultimate AD(Desenv. Pan)	32%	693	709	25%	667	668	26%	853	853	28,022
Ultimate CC(Desenv. Pan)	32%	693	709	25%	668	669	26%	853	853	28,025
Ultimate CC(Desenv. CL)	34%	740	754	27%	714	715	27%	887	887	26,913
Ultimate CC(Desenv. AD)	35%	752	764	27%	724	725	28%	894	894	27,981
Ultimate AD(Desenv. AD)	35%	752	764	27%	724	725	28%	894	894	27,981
Ultimate AD(Desenv. CL)	35%	748	761	27%	723	724	28%	897	897	26,982
Ultimate Pan*(Desenv. CL)	39%	866	892	34%	913	918	28%	907	907	25,421
Ultimate Pan*(Desenv. AD)	40%	885	910	35%	936	941	29%	939	939	26,717

passo à frente, conforme foi explicado para as tabelas de medidas para predições anuais.

Os métodos de micro-dados apresentaram desempenho muito superior a maioria dos métodos tradicionais, mostrando assim ser mais adequado que os métodos tradicionais para previsões de períodos de desenvolvimento mais curtos no caso estudado. Os métodos de micro-dados são robustos em relação à variabilidade encontrada em dados nesse nível, enquanto os métodos tradicionais são sensíveis a utilização de períodos curtos.

O método proposto nesta dissertação apresentou os melhores resultados, com MAPE inferior a todos os demais métodos em previsões até 2 passos a frente. O MAPE associado à previsão de até 3 passos à frente é baixo e próximo ao dos demais métodos para micro-dados.

4.4

Intervalos de confiança obtidos na abordagem proposta

As tabelas 4.5 e 4.6 contém os valores observados e os intervalos de confiança de 90% para das variáveis A_{τ} , quantidade de sinistros avisados no ano τ , cujas estimativas geraram os erros de previsão que foram apresentados nas tabelas 4.3 e 4.4.

Tabela 4.5: IC(90%) x Quantidade Observada por Ano de Aviso fora da Amostra

Horizonte	Ultimo Mês na Amostra de Ajuste								
	2008			2009			2010		
	L.Inf.	Obs	L.Sup.	L.Inf.	Obs	L.Sup.	L.Inf.	Obs	L.Sup.
2009	12,384	13,460	12,824						
2010	4,120	2,722	4,376	12,844	11,926	13,292			
2011	2,236	1,406	2,426	4,160	3,109	4,417	12,191	14,491	12,628

Na tabela 4.5 vemos que nenhum dos intervalos de confiança contém as quantidades observadas nesses períodos de aviso. Isso pode indicar que a distribuição Poisson, atribuída a essas variáveis talvez deva ser substituída por outra com variabilidade maior em relação à média. Por outro lado, o parâmetro da Poisson pode ter sido subestimado. O que talvez seja resolvido com o melhor ajuste da distribuição de atrasos através do tratamento de viés de truncamento ou ainda a substituição da distribuição formada pela mistura de exponenciais por uma outra.

Tabela 4.6: IC(90%) x Quantidade Observada por Mês de Aviso fora da Amostra

Horizonte	Ultimo Mês na Amostra de Ajuste								
	2008			2009			2010		
	L.Inf.	Obs	L.Sup.	L.Inf.	Obs	L.Sup.	L.Inf.	Obs	L.Sup.
2009	3,081	3,195	3,266						
2010	2,177	2,179	2,333	2,892	3,378	3,072			
2011	1,683	1,430	1,821	2,183	2,181	2,340	3,012	3,232	3,195

Na tabela 4.6 vemos que alguns intervalos de confiança contém as quantidades observadas nesses períodos de aviso.

Os resultados das tabelas 4.5 e 4.6 podem indicar necessidade de ajustes no modelo utilizado. Por outro lado, a avaliação dos intervalos de confiança obtidos para a variável em questão não é robusta, pois temos poucas observações desta variável disponíveis. Para que avaliássemos mais valores desta variável utilizando o dados disponíveis teríamos que abrir mão de mais dados na amostra utilizada para ajuste dos modelos, o que fragilizaria o ajuste do modelo.

Conforme última coluna da tabela 4.3 a quantidade IBNR total estimada pelos métodos tradicionais está entre 24 mil e 29 mil sinistros. Os métodos com menores erros geram as menores quantidades totais previstas.

Na tabela 4.4 vemos que utilizar períodos mensais para cálculo da IBNR através de métodos tradicionais ao invés de período anuais, gera novas estimativas para quantidade IBNR total, pouco distintas das obtidas por dados anuais, em geral, inferiores. O método proposto neste trabalho gera estimativa de quantidade IBNR total de 19.856 sinistros, previsão inferior porém próxima das previsões dos métodos tradicionais que apresentaram menor erro.

O intervalo de confiança de 90% da medida IBNR total segundo método proposto neste trabalho é [19.625;20.088].

5

Conclusões e trabalhos futuros

Através do desenvolvimento do modelo proposto foi possível obter com detalhes a distribuição dos atrasos de aviso e ocorrência de sinistros de uma forma coerente, justificável e que nos leva a melhor explicação deste fenômeno. Um exemplo é a possibilidade de observar o comportamento dos parâmetros das distribuições de atraso e ocorrência de sinistros ao longo do tempo.

O algoritmo EM desenvolvido apresentou estimadores e estimativas coerentes com o fenômeno e informações a priori sobre ele. A distribuição de atraso ajustada gerou valores esperados dos atrasos condizentes com os atrasos observados nos períodos de ocorrência mais desenvolvidos. A estimativa do parâmetro da distribuição da quantidade total de sinistros ocorridos obtido pelo algoritmo EM é próxima a do parâmetro obtido através da máxima-verossimilhança trabalhada no segundo modelo com atraso segundo misturas de exponenciais. Além disso, este último parâmetro representa ao longo do tempo o crescimento da frequência de sinistros desse seguro.

A atualização dinâmica das estimativas dos parâmetros das distribuições foi essencial para obter as vantagens citadas acima.

Um ponto crítico do modelo com distribuição de atraso exponencial é o viés de truncamento dos dados. Os parâmetros estimados ainda geram valores esperados dos atrasos mais curtos para dados mais truncados, e mais longos para dados mais completos.

O modelo proposto se mostrou competitivo em relação ao grupo de métodos aplicados a triângulos de *run-off* testados. Porém, não provou ser melhor, mais recomendável ou adequado que esses últimos. Uma vantagem direta do modelo proposto em relação aos outros é ter a distribuição da quantidade IBNR bem definida, podendo ser obtida facilmente sem exigência de nenhum processo de simulação ou estimação adicional. Outra vantagem é não necessitar também de nenhum processo adicional para calcular uma estimativa para a cauda da distribuição de atrasos, pois a distribuição de atrasos completa é obtida imediatamente a partir da estimação dos seus parâmetros.

Uma prática comum dos atuários em relação aos métodos tradicionais

é ajustar manualmente os fatores de desenvolvimento obtidos pela aplicação pura de suas fórmulas, conforme sensibilidade em relação ao comportamento da carteira, expectativas sobre ocorrência futura de sinistros ou informações de mercado. O modelo pode ser aprimorado para incorporação de informações externas, mas a princípio, é um modelo mais resistente à variabilidade da quantidade de sinistros avisadas a cada período de atraso dispensando ajustes manuais.

Os intervalos de confiança obtidos apresentados não contêm o valor observado. Pode ser necessária uma redefinição de distribuição de quantidade total de sinistros ocorridos com maior variabilidade e/ou de atraso ainda mais realista.

Trabalhos futuros interessantes seriam, o teste de outras distribuições de atraso; a correção mais assertiva do viés provocado pelo truncamento dos dados; a definição de um método mais robusto para estimação dos parâmetros; a inclusão da medida de exposição por período de ocorrência; inclusão de variáveis com informações mais detalhadas dos sinistros para estimação da distribuição do número de sinistros ocorridos; inclusão de sazonalidade para modelagem da quantidade de sinistros ocorridos.

Referências Bibliográficas

- [1] KAAS, R.; GOOVAERTS, M.; DHAENE, J. ; DENUIT, M. **Modern Actuarial Risk Theory**. Boston: Publishers, Kluwer Academic, 2001. 1
- [2] FRIEDLAND, J. **Estimating unpaid claims using basic techniques**. Technical report, Casualty Actuarial Society, 2010. 1, 1.1, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3
- [3] ALTIERI, E. **Modelo de cálculo da necessidade de capital para cobrir os riscos de subscrição de operações não vida**. 2013. 1–101p. Dissertação de Mestrado - PUC-Rio. 1
- [4] JEWELL, W. Predicting ibnyr events and delays. **ASTIN Bulletin**, v.19, n.1, p. 25–55, 1989. 1.1, 1.3, 3
- [5] PARODI, B. P. **Triangle-free reserving : a non-traditional framework for estimating reserves and reserve uncertainty**. 2013. 1.2, 1.3, 3, 3.1
- [6] SCHMIDT, K. D.; ZOCHER, M. The Bornhuetter-Ferguson Principle. **Variance Journal**, v.2, n.1, p. 85–110, 2008. 1.3, 2.3
- [7] TAYLOR, G. **Claims reserving in non-life insurance**. Insurance series. North- Holland: North-Holland, 1986. 1.3
- [8] FORRAY, S. Looking Back to See Ahead: A Hindsight Analysis of Actuarial Reserving Methods. **Casualty Actuarial Society E-Forum, Summer 2012**, p. 1–33, 2012. 1.3
- [9] SCHMIDT, K. A bibliography on loss reserving. 2012. 1.3
- [10] MACK, T. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. **Astin Bulletin**, v.23, n.2, p. 213–225, 1993. 1.3
- [11] ENGLAND, P.; VERRALL, R. J. Stochastic claims reserving in general insurance. **Journal of the Institute of Actuaries**, , n.January, p. 1–76, 2002. 1.3

- [12] WRIGHT, T. S. A stochastic method for claims reserving in general insurance. **Journal of the Institute of Actuaries**, v.117, p. 677–731, 1990. 1.3
- [13] SCHNIEPER, R. Separating true IBNR and IBNER claims. **ASTIN Bulletin**, v.21, n.1, 1991. 1.3
- [14] VERRALL, R.; ENGLAND, P. Incorporating expert opinion into a stochastic model for the chain-ladder technique. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.37, n.2, p. 355–370, Out. 2005. 1.3
- [15] QUARG, G.; MACK, T. Munich Chain Ladder : A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based on Incurred Losses. **CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY SPRING FORUM**, v.2, n.2, p. 266–299, 2008. 1.3
- [16] VERDONCK, T. A robustification of the chain-ladder method. **North American Actuarial**, v.13, n.2, 2009. 1.3
- [17] VERDONCK, T.; VAN WOUWE, M. Detection and correction of outliers in the bivariate chain-ladder method. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.49, n.2, p. 188–193, Set. 2011. 1.3
- [18] TAYLOR, G.; MCGUIRE, G. ; GREENFIELD, A. Loss reserving: past, present and future. **ASTIN Colloquium**, , n.109, 2003. 1.3
- [19] DE JONG, P.; ZEHNWIRTH, B. Claims reserving, state-space models and the Kalman filter. **Journal of the Institute of Actuaries**, v.110, p. 157–181, 1983. 1.3
- [20] ATHERINO, R. **Estimação de Reservas IBNR por Modelos em Espaço de Estado : Empilhamento por Linhas do Triângulo Runoff**. 2008. Tese de Doutorado - PUC-Rio. 1.3
- [21] TAYLOR, G.; MCGUIRE, G. ; SULLIVAN, J. **Individual claim loss reserving conditioned by case estimates**. 2007. 1.3, 3
- [22] ANTONIO, K.; PLAT, R. **Micro-level stochastic loss reserving for general insurance**. 2012. 1.3, 3
- [23] JESSEN, A.; NIELSEN, J. ; VERRALL, R. Including count data in claims reserving. p. 1–27, 2007. 1.3
- [24] NORBERG, R. A contribution to modelling of INBR claims. **Scandinavian Actuarial Journal**, p. 155–203, 1986. 1.3

- [25] NORBERG, R. Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. **ASTIN Bulletin**, v.23, n.1, p. 95–115, 1993. 1.3, 3, 3.3
- [26] JEWELL, W. Predicting ibnyr events and delays. **Astin Bulletin**, v.20, n.11, p. 93–111, 1989. 1.3, 3
- [27] HACHEMEISTER, A. C. **A stochastic model for loss reserving**. p. 185–194, Hachemeister1980, 1980. Transactions of the 21st international Congress of Actuaries. 1.3
- [28] ARJAS, E. The claims reserving problem in non-life insurance: some structural ideas. **ASTIN Bulletin**, v.19, n.2, p. 139–152, 1989. 1.3, 3, 3.3
- [29] HAASTRUP, S.; ARJAS, E. Claims reserving in continuous time; a nonparametric Bayesian approach. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.26, n.2, p. 139–164, 1997. 1.3
- [30] NORBERG, R. Prediction of outstanding liabilities. II Model variations and extensions. **ASTIN Bulletin**, v.29, n.1, p. 5–25, 1999. 1.3
- [31] LARSEN, C. R. An Individual Claims Reserving Model. **ASTIN Bulletin**, v.37, n.1, p. 113–132, Jun 2007. 1.3, 3
- [32] ZHAO, X. B.; ZHOU, X. ; WANG, J. L. Semiparametric model for prediction of individual claim loss reserving. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.45, n.1, p. 1–8, Ago. 2009. 1.3, 3
- [33] ZHAO, X.; ZHOU, X. Applying copula models to individual claim loss reserving methods. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.46, n.2, p. 290–299, Abr. 2010. 1.3
- [34] LIU, H.; VERRALL, R. Predictive Distributions for Reserves which Separate True IBNR and IBNER Claims. **ASTIN Bulletin**, v.39, n.1, p. 35–60, Mai 2009. 1.3
- [35] VERRALL, R.; NIELSEN, J. P. ; JESSEN, A. H. Prediction of RBNS and IBNR claims using claim amounts and claim counts. **ASTIN Bulletin-Actuarial**, v.40, p. 871–887, 2010. 1.3
- [36] TAYLOR, G. Combination of estimates of outstanding claims in non-life insurance. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.4, p. 321–438, 1985. 1.3

- [37] MERZ, M.; WÜTHRICH, M. V. Paid-incurred chain claims reserving method. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.46, n.3, p. 568–579, 2010. 1.3
- [38] WEISSNER, E. W. Estimation of the distribution of report lags by the method of maximum likelihood. **PCAS LXV**, 1978. 1.3, 3, 3.1, 3.2, 4.2
- [39] BORNHUETTER, R. L.; FERGUSON, R. E. **THE ACTUARY AND IBNR**. In: PROCEEDINGS OF THE CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY, p. 181–195, 1972. 2.3
- [40] BOOTH, P. **Modern Actuarial Theory and Practice**. Chapman & Hall, 2005. 2.3
- [41] MACK, T.; RE, M. Parameter Estimation for Bornhuetter-Ferguson. **Casualty Actuarial Society Forum**, Fall 2006, p. 141–157, 2006. 2.3
- [42] PANNING, W. H. Measuring Loss Reserve Uncertainty. **Casualty Actuarial Society Forum**, Fall 2006, p. 237–267, 2006. 2.3
- [43] KARLSSON, J.-E. The expected value of IBNR-claims. **Scandinavian Actuarial Journal**, v.1976, n.2, p. 108–110, 1976. 3
- [44] KUBRUSLY, J. Q. **Métodos Estatísticos para Cálculo de Reservas**. 2005. Dissertação (mestrado em engenharia elétrica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 3
- [45] GUIAHI, F. **A probabilistic model for IBNR claims**. In: CAS PROCEEDINGS VOLUME LXXIII, NUMBER 139, 1986. 3, 3.1
- [46] KAMINSKY, S. Prediction of IBNR claim counts by modelling the distribution of report lags. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.6, p. 151–159, 1987. 3, 3.1
- [47] DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M. ; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. **Journal of the Royal Statistical Society Series B Methodological**, v.39, n.1, p. 1–38, 1977. 3.4.2
- [48] AL-ATHARI, M. M. Estimation of the mean of truncated exponential distribution. **Journal of Mathematics and Statistics**, v.4, n.4, p. 284–288, 2008. 3.4.4

A Contas

A.1 Algoritmo EM

Obtenção do estimador do ultimate e das equações de atualização de parâmetros do algoritmo EM para o modelo proposto com distribuição de atrasos exponencial.

Função de verossimilhança dos dados completos ($N_t = n_t$, $K_t = k_t$ e $\Gamma_t = \tau_t$) para $t = 1, \dots, J$ dias:

$$\begin{aligned} & L\left(\frac{\lambda, \gamma}{\Gamma, K, N; T}\right) \\ &= \prod_{t=1}^J f_{\Gamma_t, K_t, N_t}(\tau_t, k_t, n_t; \lambda, \gamma, T_t) \\ &= \prod_{t=1}^J f_{\Gamma_t / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_t; \lambda, T_t) f_{K_t / N_t = n_t}(k_t; \lambda, T_t) f_{N_t}(n_t; \gamma) \end{aligned}$$

Separando o primeiro termo em componentes observáveis, atrasos menores ou iguais a T_t , e não observáveis, atrasos maiores que T_t , temos:

$$\begin{aligned} & L\left(\frac{\lambda, \gamma}{\Gamma, K, N; T}\right) \\ &= \prod_{t=1}^J f_{\Gamma_{I,t} / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) f_{\Gamma_{II,t} / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) f_{K_t / N_t = n_t}(k_t; \lambda, T_t) f_{N_t}(n_t; \gamma) \end{aligned}$$

Assim, a log-verossimilhança dos dados completos é:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\lambda, \gamma}{\Gamma, K, N; T}\right) &= \ln L\left(\frac{\lambda, \gamma}{\Gamma, K, N; T}\right) \\ &= \sum_{t=1}^J \left(\ln f_{\Gamma_{I,t} / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) + \ln f_{\Gamma_{II,t} / K_t = k_t, N_t = n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) + \ln f_{K_t / N_t = n_t}(k_t; \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \ln f_{N_t}(n_t; \gamma) \right) \end{aligned}$$

E-step:

$$Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}) = E \left[\frac{l\left(\frac{\lambda, \gamma}{\Gamma, K, N; T}\right)}{\left\{ \Gamma_{I,t} = \tau_{I,t}, \Gamma_{II,t} > T_t, K_t = k_t, N_t \geq k_t \right\}_{t=1}^J; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \right]$$

$$Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}) = E \left[\sum_{d=1}^J \left(\begin{array}{l} \ln f_{\Gamma_{I,t}/K_t=k_t, N_t=n_t}(\tau_{I,t}; \lambda) \\ + \ln f_{\Gamma_{II,t}/K_t=k_t, N_t=n_t}(\tau_{II,t}; \lambda) \\ + \ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; \lambda) + \ln f_{N_t}(n_t; \gamma) \end{array} \right) \middle/ \left\{ \Gamma_{I,t} = \tau_{I,t}, \Gamma_{II,t} > T_t, K_t = k_t, N_t \geq k_t \right\}_{t=1}^J; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)} \right]$$

Finalmente,

$$Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}) = \sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{I,t}/K_t=k_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) + E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t}/K_t=k_t, N_t=n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \right] + E_{N_t/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; p(\lambda^{(i)}, T_t), n_t) \right] + E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{N_t}(n_t; \gamma) \right]$$

M-step:

$$\{\lambda^{(i+1)}, \gamma^{(i+1)}\} = \arg \max_{\lambda, \gamma} Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}) = \arg \max_{\lambda} \left\{ \sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{I,t}/K_t=k_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t) + E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t}/K_t=k_t, N_t=n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \right] + E_{N_t/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; p(\lambda^{(i)}, T_t), n_t) \right] \right\} + \arg \max_{\gamma} \left\{ E_{N_t, \Gamma_{II,t}/N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{N_t}(n_t; \gamma) \right] \right\}$$

Adotando-se as distribuições a seguir:

- $N_t \sim \text{Poisson}(\gamma) \rightarrow f_{N_t}(n_t; \gamma) = \frac{\gamma^{n_t}}{n_t!} e^{-\gamma}, \quad n_t = 0, 1, \dots$

- $K_t/N_t = n_t \sim \text{Bin}(n_t, p(T_t, \lambda))$
 $f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; n_t, p(T_t, \lambda)) = \frac{n_t!}{k_t!(n_t - k_t)!} p(\lambda, T_t)^{k_t} (1 - p(\lambda, T_t))^{n_t - k_t}, k_t = 0, 1, \dots, n_t$
- $\Gamma_{I,t,i} \sim T_{(<)} - \text{Exp}(\lambda, T_t) \rightarrow f_{\Gamma_{I,t,i}/\Gamma_{I,t,i} < T_t}(t; \lambda, T_t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})}, t \geq 0$
- $\Gamma_{I,t,i} \sim T_{(>)} - \text{Exp}(\lambda, T_t) \rightarrow f_{\Gamma_{I,t,i}/\Gamma_{I,t,i} > T_t}(t; \lambda, T_t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda T_t}}, t \geq 0$

Onde:

$T_{(<)} - \text{Exp}(\lambda, T_t)$ é a distribuição exponencial condicional a atrasos menores que T_t ; e

$T_{(>)} - \text{Exp}(\lambda, T_t)$ é a distribuição exponencial condicional a atrasos maiores que T_t .

A derivada de $Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)})$ com relação à γ é:

$$\frac{\partial Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)})}{\partial \gamma} = \frac{\partial \sum_{t=1}^J E_{N_t, \Gamma_{I,t,i} / N_t \geq k_t, \Gamma_{I,t,i} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} [n_t \ln \gamma - \gamma - \ln n_t!]}{\partial \gamma}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^J E \left[\frac{n_t}{N_t} \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)} \right]}{\gamma} - J$$

Igualando-se esta derivada a zero e fazendo $\hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\} =$

$E \left[\frac{n_t}{N_t} \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)} \right]$ obtemos:

$$\gamma^{(i+1)} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}$$

Ou seja, a atualização do parâmetro γ é a média das estimativas de ultimate feitas para cada um dos J dias, dada a informação $N_t \geq k_t$, a partir das estimativas correntes dos parâmetros α e γ .

Para encontrar o estimador $\hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}$, devemos levantar a distribuição de probabilidade da variável N_t condicionada às informações disponíveis, quais sejam, $N_t \geq k_t; K_t = k_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}$.

Como pode ser visto no Apêndice A.3, $(N_t - k_t) \sim \text{Poisson}(F_{\tau_t}(T_t; \lambda)\gamma)$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \hat{n}_{t\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}} &\equiv E\left[\frac{N_t}{N_t \geq k_t; K_t = k_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}}\right] \\ &= E\left[\frac{(N_t - K_t)}{N_t \geq k_t; K_t = k_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}}\right] + E\left[\frac{K_t}{N_t \geq k_t; K_t = k_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}}\right] \\ &= \gamma F_{\tau_t}(T_t; \lambda) + k_t \end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma^{(i+1)} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J (\gamma F_{\tau_t}(T_t; \lambda) + k_t)$$

A seguir, a derivada da função esperança da log-verossimilhança com relação à λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\lambda, \gamma; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)})}{\partial \lambda} &= \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \frac{\partial \ln f_{\Gamma_{I,t}} /_{K_t=k_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t)}{\partial \lambda} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J E_{N_t, \Gamma_{II,t}} /_{N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t}} /_{K_t=k_t, N_t=n_t}(\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J E_{N_t} /_{N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{K_t} /_{N_t=n_t}(k_t; p(\lambda^{(i)}, T_t), n_t) \right] \end{aligned}$$

onde $p(\lambda^{(i)}, T_t)$ é a probabilidade de K_t sinistros serem avisados com atrasos menores ou iguais a T_t .

Desenvolvendo somente o primeiro termo:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \frac{\partial \ln f_{\Gamma_{I,t}} /_{K_t=k_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t)}{\partial \lambda} &= \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \left\{ \frac{\partial(\ln \lambda - \lambda \tau_{I,t,i})}{\partial \lambda} - \frac{T_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})} \right\} \\ &= \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \tau_{I,t,i} - \frac{T_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})} \right\} = \frac{J\bar{k}}{\lambda} - J\bar{\tau}_{\bullet} - \sum_{t=1}^J k_t \frac{T_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})} \end{aligned}$$

Isto é,

$$\sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^k \frac{\partial \ln f_{\Gamma_{I,t}} /_{K_t=k_t}(\tau_{I,t}; \lambda, T_t)}{\partial \lambda} = \frac{J\bar{k}}{\lambda} - J\bar{\tau}_{\bullet} - \sum_{t=1}^J k_t \frac{T_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})}$$

onde $\bar{k} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J k_t$ e $\bar{\tau} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \tau_{t,i}$

Trabalhando o segundo termo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J E_{N_t, \Gamma_{II,t} / N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t} / K_t = k_t, N_t = n_t} (\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} E_{N_t, \Gamma_{II,t} / N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \sum_{j=k_t+1}^{n_t} \ln \frac{\lambda e^{-\lambda \tau_{II,t,j}}}{e^{-\lambda T_t}} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} E_{N_t, \Gamma_{II,t} / N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \sum_{j=k_t+1}^{n_t} \{ \ln \lambda - \lambda (\tau_{II,t,j} - T_t) \} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} E_{N_t, \Gamma_{II,t} / N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[J(\bar{n} - \bar{k}) \ln \lambda - \lambda \sum_{t=1}^J \sum_{j=k_t+1}^{n_t} (\tau_{II,t,j} - T_t) \right] \end{aligned}$$

Onde $\bar{n} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \hat{n}_t \{ N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)} \}$ e $\bar{k} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J k_t$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ J(\bar{n} - \bar{k}) \ln \lambda - \lambda \sum_{t=1}^J \sum_{j=k_t+1}^{n_t} (E_{N_t, \Gamma_{II,t} / N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\frac{\tau_{II,t,j}}{\lambda^{(i)}} \right] - T_t) \right\} \\ &= \frac{J(\bar{n} - \bar{k})}{\lambda} - \sum_{t=1}^J \sum_{i=k_t+1}^{n_t} \left(\left[T_t + \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right] - T_t \right) = \frac{J(\bar{n} - \bar{k})}{\lambda} - \frac{J(\bar{n} - \bar{k})}{\lambda^{(i)}} = J(\bar{n} - \bar{k}) \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J E_{N_t, \Gamma_{II,t} / N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{\Gamma_{II,t} / K_t = k_t, N_t = n_t} (\tau_{II,t}; \lambda, T_t) \right] = J(\bar{n} - \bar{k}) \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right]$$

Se dependesse apenas deste termo, a solução seria trivial, $I^{(i+1)} = I^{(i)}$ como se poderia esperar, pois não há nenhuma observação.

Agora o terceiro termo

Primeiramente, o desenvolvimento de $\ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; \lambda)$:

$$\begin{aligned} \ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; p(\lambda^{(i)}, T_t), n_t) &= \ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; (1 - e^{-\lambda T_t}), n_t) \\ &= \ln \left(\frac{n_t!}{k_t!(n_t - k_t)!} (1 - e^{-\lambda T_t})^{k_t} (e^{-\lambda T_t})^{n_t - k_t} \right) \\ &= \underbrace{\ln n_t! - \ln k_t! - \ln(n_t - k_t)!}_{c_t} + k_t \ln(1 - e^{-\lambda T_t}) + (n_t - k_t) \ln e^{-\lambda T_t}, k_t = 0, 1, \dots, n_t \\ &= c_t + k_t \ln(1 - e^{-\lambda T_t}) - \lambda T_t (n_t - k_t) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J E_{N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; p(\lambda^{(i)}, T_t), n_t) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J E_{N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\left\{ c_t + k_t \ln(1 - e^{-\lambda T_t}) - \lambda T_t (n_t - k_t) \right\} / \lambda^{(i)} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J \left\{ c_t + k_t \ln(1 - e^{-\lambda T_t}) - \lambda T_t (\hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\} - k_t) \right\} \\ &= \sum_{t=1}^J \left\{ \frac{T_t k_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})} - T_t (\hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\} - k_t) \right\} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{t=1}^J E_{N_t \geq k_t, \Gamma_{II,t} > T_t, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}} \left[\sum_{t=1}^J \ln f_{K_t/N_t=n_t}(k_t; p(\lambda^{(i)}, T_t), n_t) \right] \\ &= \sum_{t=1}^J T_t \left\{ \frac{k_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})} - (\hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\} - k_t) \right\} \end{aligned}$$

Reunindo-se os 3 termos e impondo-se a condição derivada nula:

$$\begin{aligned} \frac{J\bar{k}}{\lambda} - J\bar{\tau} \cdot - \sum_{t=1}^J k_t \frac{T_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})} + J(\bar{n} - \bar{k}) \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right] \\ + \sum_{t=1}^J T_t \left\{ \frac{k_t e^{-\lambda T_t}}{(1 - e^{-\lambda T_t})} - (\hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\} - k_t) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Onde } \bar{\tau} \cdot = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \tau_{I,t,i} \text{ e } \bar{n} = \frac{1}{J} \sum_{t=1}^J \hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}$$

$$\frac{J\bar{n}}{\lambda} = J\bar{\tau} \cdot + \sum_{t=1}^J \left\{ \left(T_t + \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right) (\hat{n}_t \{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\} - k_t) \right\}$$

$$\frac{1}{\lambda^{(i+1)}} = \frac{J\bar{\tau}_\bullet + \sum_{t=1}^J \left\{ \left(T_t + \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right) (\hat{n}_{t\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}} - k_t) \right\}}{J\bar{n}}$$

$$\frac{1}{\lambda^{(i+1)}} = \frac{J\bar{\tau}_\bullet + \sum_{t=1}^J \left\{ \left(T_t + \frac{1}{\lambda^{(i)}} \right) (\hat{n}_{t\{N_t \geq k_t; \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}\}} - k_t) \right\}}{J\bar{n}}$$

Ou seja, a equação de atualização de λ é o inverso da média ponderada dos atrasos observáveis e as estimativas dos atrasos não observáveis.

A.2 Estimadores MV

Obtenção os estimadores de Máxima Verossimilhança do modelo com distribuição de atrasos segundo uma mistura de exponenciais.

Função de verossimilhança dos dados truncados para $t = 1, \dots, J$ dias:

$$L(\lambda, \gamma) = \prod_{t=1}^J \left\{ \prod_{i=1}^{k_t} \frac{f_\tau(\tau_{t,i}; \lambda)}{(1 - F_{\tau_t}(T_t; \lambda))} \right\} \sum_{n=k_t}^{\infty} \frac{n!}{k_t!(n-k_t)!} (1 - F_{\tau_t}(T_t; \lambda))^{k_t} F_{\tau_t}(T_t; \lambda)^{n-k_t} \frac{\gamma^n}{n!} e^{-\gamma}$$

$$L(\lambda, \gamma) = \prod_{t=1}^J \left\{ \prod_{i=1}^{k_t} f_\tau(\tau_{t,i}; \lambda) \right\} \frac{e^{-\gamma}}{k_t! \gamma^{-k_t}} \sum_{n=k_t}^{\infty} \frac{F_{\tau_t}(T_t; \lambda)^{n-k_t} \gamma^{n-k_t}}{(n-k_t)!}$$

$$L(\lambda, \gamma) = \prod_{t=1}^J \left\{ \prod_{i=1}^{k_t} f_\tau(\tau_{t,i}; \lambda) \right\} \frac{1}{k_t! \gamma^{-k_t}} e^{F_{\tau_t}(T_t; \lambda)\gamma} e^{-\gamma}$$

Função log-verossimilhança:

$$l(\lambda, \gamma) = \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \ln f_\tau(\tau_{t,i}; \lambda) + \sum_{t=1}^J (k_t \ln \gamma + F_{\tau_t}(T_t; \lambda)\gamma - \ln k_t! - \gamma)$$

Estimador de máxima verossimilhança de γ :

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} l(\lambda, \gamma) = \sum_{t=1}^J \left(\frac{k_t}{\gamma} + F_{\tau_t}(T_t; \lambda) - 1 \right)$$

Finalmente,

$$\gamma = \frac{k_\bullet}{J - \sum_{t=1}^J (F_{\tau_t}(T_t; \lambda))}$$

com $k_\bullet = \sum_{t=1}^J k_t$

Derivada da log-verossimilhança em relação ao vetor de parâmetros λ da distribuição de atrasos adotada:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda, \gamma) = \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) + \sum_{t=1}^J \frac{\partial}{\partial \lambda} F_{\tau}(T_t; \lambda) \gamma$$

Se a distribuição de atraso é uma mistura de duas exponenciais, temos:

$$f_{\tau}(\tau_t; \lambda) = \alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_t} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_t}$$

$$F_{\tau}(T_t; \lambda) = \alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 T_t} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 T_t}.$$

$$l(\lambda, \gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^J \sum_{i=1}^{k_t} \ln(\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}) \\ + \sum_{t=1}^J \left(k_t \ln \gamma + (\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 T_t} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 T_t}) \gamma - \left(\ln \left(\sum_{j=k_t}^{\infty} \frac{\gamma^j}{j!} \right) + \ln k_t! \right) \right) \end{array} \right\}$$

O vetor gradiente para maximização desta função será formado pelas derivadas desta função em relação a cada parâmetro contido no vetor de parâmetros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \alpha)$. Segue abaixo o cálculo dessas derivadas:

Com relação à λ_1 :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln(\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}})$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{1}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{\lambda_1 (-\alpha \tau_{t,i} e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}}) + \alpha e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}}}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{\alpha e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} (1 - \lambda_1 \tau_{t,i})}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} F_{\tau}(T_t; \lambda) \gamma = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\alpha e^{-\lambda_1 T_t} + (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 T_t}) \gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} F_{\tau}(T_t; \lambda) \gamma = -T_t \alpha e^{-\lambda_1 T_t} \gamma$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} l(\lambda, \gamma) = \sum_{t=1}^J \left(\sum_{i=1}^{k_t} \frac{\alpha e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} (1 - \lambda_1 \tau_{t,i})}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} \right) - \sum_{t=1}^J T_t \alpha e^{-\lambda_1 T_t} \gamma$$

Com relação à λ_2 :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln(\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}})$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{1}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{\lambda_2 \left(-(1 - \alpha) \tau_{t,i} e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}} \right) + (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{(1 - \alpha) e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}} (1 - \lambda_2 \tau_{t,i})}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} F_{\tau}(T_t; \lambda) \gamma = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\alpha e^{-\lambda_1 T_t} + (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 T_t}) \gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} F_{\tau}(T_t; \lambda) \gamma = -T_t (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 T_t} \gamma$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} l(\lambda, \gamma) = \sum_{t=1}^J \left(\sum_{i=1}^{k_t} \frac{(1 - \alpha) e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}} (1 - \lambda_2 \tau_{t,i})}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} \right) - \sum_{t=1}^J T_t (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 T_t} \gamma$$

Com relação à α :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}})$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{1}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}})$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_{\tau}(\tau_{t,i}; \lambda) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{t,i}} + (1 - \alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{t,i}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F_{\tau}(T_t; \lambda) \gamma = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha e^{-\lambda_1 T_t} + (1 - \alpha) e^{-\lambda_2 T_t}) \gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F_{\tau}(T_t; \lambda) \gamma = (e^{-\lambda_1 T_t} - e^{-\lambda_2 T_t}) \gamma$$

Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\lambda, \gamma) = \sum_{i=1}^J \left(\sum_{i=1}^{k_i} \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{r,i}} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{r,i}}}{\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_{r,i}} + (1-\alpha) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_{r,i}}} \right) + \sum_{d=1}^D (e^{-\lambda_1 T_d} - e^{-\lambda_2 T_d}) \gamma$$

A.3 Distribuição da Quantidade IBNR

Quantidade IBNR por período de Ocorrência:

Considere um determinado dia de ocorrência d . Avaliaremos a distribuição de probabilidade do número total de sinistros ocorridos em d , N condicionado às informações disponíveis. Aqui o índice d será omitido por simplificação. Aplicando o teorema de Bayes à distribuição de probabilidade da variável N condicionada às informações disponíveis, quais sejam, $N \geq k; K = k, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}$, podemos considerar:

$$\begin{aligned} & f_{N/N \geq k; K=k}(n; \lambda, \gamma) \\ & \propto f_{K/N=n, N \geq k}(k; \lambda) f_{N/N \geq k}(n; \lambda, \gamma) \\ & \propto f_{K/N=n}(k; \lambda) f_{N/N \geq k}(n; \gamma), \quad k = 0, 1, \dots \text{ e } n = k, k + 1, \dots \end{aligned}$$

Incorporando as distribuições definidas para cada variável, temos:

$$\begin{aligned} & f_{N/N \geq k; K=k}(n; \lambda, \gamma) \\ & \propto \frac{n!}{k!(n-k)!} (1 - F_\tau(T; \lambda))^k (F_\tau(T; \lambda))^{n-k} \left\{ \frac{\gamma^n e^{-\gamma}}{n! / P(N \geq k)} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots \text{ e } n = k, k + 1, \dots \end{aligned}$$

Eliminando-se os termos que não dependem de n_d :

$$\begin{aligned} & f_{N/N \geq k; K=k}(n; \lambda, \gamma) \\ & \propto \frac{(F_\tau(T; \lambda))^{n-k} \gamma^n}{(n-k)!} \propto \frac{(F_\tau(T; \lambda) \gamma)^{n-k}}{(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots \text{ e } n = k, k + 1, \dots \end{aligned}$$

Isto é, a distribuição condicional de N é uma distribuição assemelhada a uma Poisson para $n = k, k + 1, \dots$ com parâmetro $F_\tau(T; \lambda) \gamma$. Isto equivale a dizer que $(N - k) \sim \text{Poisson}(F_\tau(T; \lambda) \gamma)$. Logo, o valor esperado condicional de N é dado por:

$$\begin{aligned} & E\left[\frac{N}{N} \geq k, K = k; \lambda, \gamma\right] \\ &= E\left[\frac{(N-K)}{N} \geq k, K = k; \lambda, \gamma\right] + E\left[\frac{K}{N} \geq k, K = k; \lambda, \gamma\right] \\ &= \gamma F_{\tau}(T; \lambda) + k \end{aligned}$$

Se considerarmos a esperança de $\frac{N}{N} \geq k, K = k; \lambda, \gamma$ como a estimativa de N , temos:

$$\hat{n}_{\{N \geq k; \lambda, \gamma\}} \equiv E\left[\frac{N}{N} \geq k; K = k, \lambda, \gamma\right] = \gamma F_{\tau}(T; \lambda) + k$$

Quantidade IBNR por período de Aviso:

Seja Q a quantidade total de sinistros IBNR ocorridos em d e Q_{τ} a quantidade de sinistros ocorridos em d e avisados com atraso $\tau \in (\tau_1, \tau_2]$, onde τ_1 e τ_2 representam dois tempos de atrasos quaisquer maiores que T_d (nestas contas terá o índice d omitido). Então, $Q_{\tau} = \gamma p$, onde γ é o parâmetro da distribuição de N no período de ocorrência d e p representa a probabilidade de um sinistro ocorrido em d ser avisado com atraso $\tau \in (\tau_1, \tau_2]$.

No caso em que a distribuição de atrasos é exponencial, temos:

$$p = e^{-\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_2}$$

Já no caso onde a distribuição de atrasos é uma mistura de 2 exponenciais, temos:

$$p = \alpha e^{-\lambda_1\tau_1} + (1 - \alpha)e^{-\lambda_2\tau_1} - \alpha e^{-\lambda_1\tau_2} - (1 - \alpha)e^{-\lambda_2\tau_2}$$

Sabemos que $Q \sim \text{Poisson}(\gamma F(T; \lambda))$ e $(Q_{\tau}, Q) \sim f_{Q_{\tau}, Q}(r, q)$.

Estamos interessados em obter a distribuição de probabilidade da quantidade de sinistros IBNR a serem avisados com atraso $\tau \in (\tau_1, \tau_2]$. Podemos obter a probabilidade de um sinistro IBNR ser avisado com atraso $\tau \in (\tau_1, \tau_2]$ em função de p , conforme a seguir:

$$p_{\tau/T > T} = P(\tau_1 < \tau \leq \tau_2 | \tau > T) = \frac{P(\tau_1 < \tau \leq \tau_2)}{P(\tau > T)} = \frac{F(\tau_1; \lambda) - F(\tau_2; \lambda)}{F(T; \lambda)} = \frac{p}{F(T; \lambda)}$$

A partir dos resultados e definições apresentadas acima, temos:

$$\begin{aligned} f_{Q_{\tau}} &= \sum_{q=0}^{\infty} f_{Q_{\tau}, Q}(r, q) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} f_{Q_{\tau}/Q=q}(r) f_Q(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{q!}{r!(q-r)!} (p_{\tau/\tau>T})^r (1-p_{\tau/\tau>T})^{q-r} \frac{(\gamma F(T; \lambda))^q e^{-\gamma F(T; \lambda)}}{q!} \\
 &= \frac{(p_{\tau/\tau>T})^r (\gamma F(T; \lambda))^r e^{-\gamma F(T; \lambda)}}{r!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(1-p_{\tau/\tau>T})^{q-r} (\gamma F(T; \lambda))^{q-r}}{(q-r)!} \\
 &= \frac{(p_{\tau/\tau>T} \gamma F(T; \lambda))^r e^{-\gamma F(T; \lambda)}}{r!} e^{(1-p_{\tau/\tau>T})(\gamma F(T; \lambda))} \\
 &= \frac{(p_{\tau/\tau>T} \gamma F(T; \lambda))^r e^{-p_{\tau/\tau>T} \gamma F(T; \lambda)}}{r!} \\
 &= \frac{(p\gamma)^r e^{-p\gamma}}{r!}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f_{Q_{\tau}} = Poisson(p\gamma)$.

Agora, considere τ como um período de aviso com quantidades de aviso estimável a partir do triângulo de *run-off* e posterior ao máximo período de aviso observável, n . Então, $\tau = n + h, h = 1, \dots, n - 1$. Considere também $Q_{d, n-d+1+h}$ a variável que representa quantidade de sinistros IBNR ocorridos em d e avisados com $n - d + 1 + h$ períodos de atraso e quantidade total de sinistros avisados no ano τ , A_{τ}

$$A_{\tau} = A_{n+h} = \sum_{d=h+1}^n Q_{d, n-d+1+h}$$

Como $Q_{d, n-d+1+h}$ tem distribuição Poisson, $A_{\tau} \sim Poisson(\sum_{d=1}^{\tau} p_{d, n-d+1+h} \gamma d)$, onde $p_{d, n-d+1+h}$ é a probabilidade de um sinistro ocorrido em d ser avisado com atraso $n - d + 1 + h$.