5
Avaliação dos estimadores propostos

Este capítulo apresenta as medidas estatísticas usuais para avaliar a qualidade de estimadores e as expressões utilizadas para a estimação destas medidas, a partir de estudos de simulação.

5.1 Medidas usuais de qualidade dos estimadores

Seja θ um parâmetro na população finita U ou num modelo de interesse, formulado para descrever aspectos desta população finita.

Considere um plano amostral probabilístico A que será usado para obter uma amostra da população U para estimar θ. Seja S o conjunto formado por todas as amostras possíveis s que poderiam ser selecionadas da população U de acordo com o plano amostral A.

A qualidade de um estimador $\hat{\theta}$ para θ, sob o plano amostral A, é usualmente avaliada por meio de duas medidas: o *vício* $B(\hat{\theta})$ e o *erro quadrático médio* $EQM(\hat{\theta})$ (Särndal et al, 1992; Bolfarine e Bussab, 2005).

O *valor esperado* de $\hat{\theta}$, sob o plano amostral A, denotado por $E_A(\hat{\theta})$, é definido por:

$$E_A(\hat{\theta}) = \sum_{s \in S} \Pr(s)\hat{\theta}(s), \tag{5.1}$$

onde Pr*(s)* é a probabilidade de seleção da amostra s e $\hat{\theta}(s)$ é o valor de $\hat{\theta}$ para a amostra s.

O *vício* de $\hat{\theta}$, sob o plano amostral A, é dado por:

$$B_A(\hat{\theta}) = E_A(\hat{\theta}) - \theta \tag{5.2}$$

Quando $E_A(\hat{\theta}) = \theta$ tem-se $B_A(\hat{\theta}) = 0$, ou seja, o estimador $\hat{\theta}$ é não-viciado para estimar θ sob o plano A.

A *variância* de $\hat{\theta}$ é definida por:

$$V_A(\hat{\theta}) = \sum_{s \in S} \Pr(s).[\hat{\theta}(s) - E_A(\hat{\theta})]^2 \tag{5.3}$$

No caso de estimadores viciados, uma medida de qualidade mais adequada é o *erro quadrático médio* (*EQM*):

$$EQM_A(\hat{\theta}) = E_A[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \Sigma_{s \in S} \Pr(s).[\hat{\theta}(s) - \theta]^2 \qquad (5.4)$$

O *EQM* de um estimador pode ser escrito como função do *vício* e da *variância* deste estimador (Bussab e Morettin, 2003, p.295):

$$EQM(\hat{\theta}) = V_A(\hat{\theta}) + [B_A(\hat{\theta})]^2$$

Tanto a variância quanto o *EQM* de um estimador são inconvenientes para a análise direta por serem expressos em unidade de medida igual ao quadrado da usada na medição. Por este motivo, duas medidas alternativas de variabilidade de $\hat{\theta}$ são frequentemente utilizadas: o coeficiente de variação e o erro relativo médio.

O *coeficiente de variação* de $\hat{\theta}$ mede a dispersão das estimativas de θ em relação ao valor esperado de $\hat{\theta}$ e é definido por:

$$CV_A(\hat{\theta}) = \frac{\sqrt{V_A(\hat{\theta})}}{E_A(\hat{\theta})} \qquad (5.5)$$

O *erro relativo médio* (*ERM*) de $\hat{\theta}$ é definido pela raiz quadrada do erro quadrático médio dividido pelo valor do parâmetro θ:

$$ERM_A(\hat{\theta}) = \frac{\sqrt{EQM_A(\hat{\theta})}}{\theta} \qquad (5.6)$$

Sua interpretação pode ser pensada como um *coeficiente de variação* considerando uma componente de vício (Lila, 2004).

Note que ambas as medidas de dispersão relativa (*CV* e *ERM*) são adimensionais e são definidas somente quando $E_A(\hat{\theta})$ ou θ são positivos conforme (5.5) ou (5.6), respectivamente. Além disso, habitualmente estas medidas são expressas como porcentagens.

Também é freqüente considerar o *vício relativo* de um estimador $\hat{\theta}$ definido por:

$$RB_A(\hat{\theta}) = \frac{B_A(\hat{\theta})}{\theta} \qquad (5.7)$$

Para facilitar a construção e leitura das tabelas, referentes aos resultados da simulação em ambas as populações de referência (Capítulos 7 e 8), é empregada a seguinte notação para as medidas de qualidade (descritivas) de um estimador $\hat{\theta}$ de interesse sob o plano amostral A: E_A (valor esperado), ERM (erro relativo médio), B_r (vício relativo em percentual), V_A (variância da distribuição amostral).

5.2 Uso da simulação em amostragem de populações finitas

Quando o plano amostral é complexo ou o estimador é não linear obter expressões matemáticas exatas para as medidas de qualidade desse estimador torna-se uma tarefa difícil, ou mesmo impossível em muitas situações. Por este motivo, no contexto da amostragem complexa de populações finitas, é usual aplicar o procedimento de simulação estocástica para avaliação de algumas destas propriedades dos estimadores.

Este processo consiste em extrair, de acordo com o plano amostral A, R^* réplicas independentes de amostras s da população U. Sejam $s_1, s_2, ..., s_{R*}$ réplicas independentes de amostras extraídas de U segundo o plano amostral A. Logo, $s_1, s_2, ..., s_{R*}$ formam uma amostra aleatória simples com reposição dos elementos do conjunto S formado por todas as amostras possíveis sob o plano amostral A quando aplicado à população finita U. Consequentemente os valores $\hat{\theta}(\mathrm{s}_1), \hat{\theta}(\mathrm{s}_2), ..., \hat{\theta}(\mathrm{s}_{\mathrm{R}^*})$ compõem uma amostra aleatória simples com reposição dos valores possíveis para o estimador $\hat{\theta}$ sob o plano amostral A aplicado à população U.

5.3 Estimação por simulação das medidas de qualidade

O valor esperado do estimador $\hat{\theta}$ pode ser estimado usando a média aritmética das R^* estimativas $\hat{\theta}(\mathrm{s}_1), \hat{\theta}(\mathrm{s}_2), ..., \hat{\theta}(\mathrm{s}_{\mathrm{R}^*})$ correspondentes às réplicas $s_1, s_2, ..., s_{R*}$:

$$\hat{E}_A(\hat{\theta}) = \frac{1}{R^*} \sum_{r=1}^{R^*} \hat{\theta}(\mathrm{s}_\mathrm{r}) \tag{5.8}$$

Uma estimativa do vício $B_\mathrm{A}(\hat{\theta})$ pode ser obtida por simulação, da seguinte forma:

$$\hat{B}_\mathrm{A}(\hat{\theta}) = \hat{E}_\mathrm{A}(\hat{\theta}) - \theta \tag{5.9}$$

A variância $V_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})$ definida em (5.3) pode ser estimada com as R^* réplicas através da seguinte expressão:

$$\hat{V}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{R^* - 1} \sum_{r=1}^{R^*} [\hat{\theta}(\mathrm{s_r}) - \hat{E}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})]^2 \qquad (5.10)$$

Esta estatística é um estimador não viciado para a variância da *distribuição amostral* de $\hat{\theta}$, sob o plano amostral A.

No caso de estimadores viciados, sob o plano amostral A, uma estimativa do *erro quadrático médio* (*EQM*) de $\hat{\theta}$ é dada por:

$$E\hat{Q}M_{\mathrm{A}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{R^*} \sum_{r=1}^{R^*} [\hat{\theta}(\mathrm{s_r}) - \theta]^2 \qquad (5.11)$$

O *coeficiente de variação* de $\hat{\theta}$, que também pode ser estimado a partir das R^* réplicas, é calculado pela razão entre o *desvio-padrão* da *distribuição amostral empírica* de $\hat{\theta}$ e a estimativa do *valor esperado* de $\hat{\theta}$:

$$\hat{C}V_{\mathrm{A}}(\hat{\theta}) = \frac{\sqrt{\hat{V}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})}}{\hat{E}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})} \qquad (5.12)$$

A estimativa do *erro relativo médio* $\hat{\theta}$ é dada por:

$$E\hat{R}M_{\mathrm{A}}(\hat{\theta}) = \frac{\sqrt{E\hat{Q}M_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})}}{\theta} \qquad (5.13)$$

A estimativa do *vício relativo* de um estimador $\hat{\theta}$ é dada por:

$$\hat{R}B_{\mathrm{A}}(\hat{\theta}) = \frac{\hat{B}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})}{\theta} \qquad (5.14)$$

Convém destacar que dependendo do plano amostral A escolhido, o valor do parâmetro θ nas expressões (5.9), (5.11), (5.13) e (5.14) pode ser desconhecido. Assim, torna-se necessário substituí-lo pela estimativa obtida pelo estimador mais apropriado desse parâmetro.

5.3.1 Análise do vício

A realização da inferência estatística a respeito do vício do estimador $\hat{\theta}$ pode ser efetuada através de um teste de hipótese descrito a seguir:

H_0: $B_{\mathrm{A}}(\hat{\theta}) = 0$

H_a: $B_{\mathrm{A}}(\hat{\theta}) \neq 0$

Como $\hat{B}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})$ é uma média de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, decorre do Teorema Central do Limite que a distribuição assintótica de $\hat{B}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})$ é normal com média $B_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})$ e variância $\frac{V_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})}{R^*}$, para R^* suficientemente grande.

A *estatística de teste* Z é definida como:

$$Z = \frac{\hat{B}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})}{\sqrt{\frac{\hat{V}_{\mathrm{A}}(\hat{\theta})}{R^*}}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

A regra de decisão consiste em rejeitar H_0 quando o p valor do teste for menor que α, o nível de significância especificado, sendo o p valor dado por:

$$p_{valor} = 2 * \Pr(|\, Z \,| > z_{\alpha/2} \,|\, H_o)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é a imagem inversa da distribuição acumulada da Normal padrão avaliada em $1-\alpha/2$.

Caso o *p valor* seja menor que o nível de significância α adotado, a *hipótese nula* H_0 é rejeitada, ou seja, há evidência de que o estimador $\hat{\theta}$ é viciado para estimar θ, sob o plano amostral A. Em caso contrário, não há evidência ao nível de significância α de que o estimador $\hat{\theta}$ seja viciado para estimar θ, sob o plano amostral A.

5.4 Análise do efeito do plano amostral nos estimadores de variância

Após a seleção de uma amostra $s \in S$, o Efeito do Plano Amostral Ampliado[1] (*EPAA*), desenvolvido por Skinner, Holt e Smith (1989, p.24); é usado para medir o efeito de tratar as observações geradas pela amostra s como se fossem independentes e identicamente distribuídas e, consequentemente usar o estimador ingênuo da variância $v_0(\hat{\theta})$ ao invés de considerar as características do plano amostral A na estimação da variância de $\hat{\theta}$.

O *EPAA* é definido por:

[1] Misspecification effect (m*eff*).

$$EPAA(\hat{\theta}; v_0; \mathrm{A}) = \frac{V_\mathrm{A}(\hat{\theta})}{E_\mathrm{A}(v_0(\hat{\theta}))} \tag{5.15}$$

No contexto das pesquisas por amostragem complexa, dependendo do plano amostral adotado, podem estar presentes as seguintes características: conglomeração, estratificação e ponderação. Nesse caso, quando o valor do *EPAA* é diferente de 1, isto indica que o efeito do plano amostral complexo não pode ser ignorado na estimação da variância. Dessa forma, o usuário deve ficar ciente que tratar uma amostra complexa como se fosse uma amostra com observações independentes e identicamente distribuídas não é a forma mais adequada para a estimação da variância de $\hat{\theta}$.

Num estudo de simulação, uma estimativa do *EPAA* pode ser obtida por:

$$EP\hat{A}A(\hat{\theta}; v_0; \mathrm{A}) = \frac{\hat{V}_\mathrm{A}(\hat{\theta})}{\hat{E}_\mathrm{A}(v_0(\hat{\theta}))} \tag{5.16}$$

onde $v_o(s_r)$ é uma estimativa ingênua da variância de $\hat{\theta}(s_r)$ baseada na amostra s_r.

5.5 Análise da eficiência dos estimadores de variância

Para comparar a *eficiência* (precisão) *relativa* dos estimadores de variância $v_a(\hat{\theta})$ e $v_b(\hat{\theta})$ é definida uma medida que consiste na razão entre os *erros quadráticos médios* dos estimadores de variância $v_a(\hat{\theta})$ e $v_b(\hat{\theta})$, respectivamente.

$$EFF[v_a(\hat{\theta}); v_b(\hat{\theta}); A] = \frac{EQM_A[v_a(\hat{\theta})]}{EQM_A[v_b(\hat{\theta})]} \tag{5.17}$$

No contexto de um estudo de simulação, esta medida pode ser estimada usando a seguinte estatística de acordo com (5.11):

$$E\hat{F}F[v_a(\hat{\theta}); v_b(\hat{\theta}); A] = \frac{E\hat{Q}M_A[v_a(\hat{\theta})]}{E\hat{Q}M_A[v_b(\hat{\theta})]} \tag{5.18}$$

onde $E\hat{Q}M_A[v_a(\hat{\theta})]$ e $E\hat{Q}M_A[v_b(\hat{\theta})]$ podem ser estimados usando a expressão (5.11) na qual θ deve ser substituído por $\hat{V}_\mathrm{A}(v_a(\hat{\theta}))$ e $\hat{V}_\mathrm{A}(v_b(\hat{\theta}))$, respectivamente.