

4

Pulsos de transmissão - portadoras moduladas em frequência

Diversos estudos foram publicados na área científica com o intuito de melhorar o desempenho de sistemas radar que empregam compressão de pulso desde a sua concepção em meados de 1950 [16, 17]. Muitos métodos envolvendo o projeto tanto da forma de onda de transmissão [18, 19] quanto do filtro de recepção [20] foram propostos de forma a se melhorar a detectabilidade em distância, a supressão de lóbulos laterais resultantes na saída do filtro, o ganho de processamento e a resolução em distância. Todavia, a busca para atingir todos estes objetivos simultaneamente aparenta ser interminável pois, em praticamente todos os métodos propostos, um dos requisitos acima descritos tem de ser sacrificado em detrimento de outros.

Sinais modulados em amplitude não apresentam desempenho satisfatório quando compressão de pulso é utilizada na cadeia de recepção, isto porque a resposta do filtro compressor para tais sinais é muito mais sensível às distorções provocadas pelo meio ambiente no sinal de retorno. Não obstante, destaca-se que em grande quantidade de sistemas radar, principalmente os de longo alcance, amplificadores Classe C são empregados na transmissão, pois, uma vez que os transmissores são de alta potência, estes devem operar sempre saturados para que tenham eficiência máxima. Sendo assim, a amplitude da forma de onda de transmissão é deformada, o que também inviabiliza a transmissão de sinais AM, tornando ainda mais raro encontrar sistemas radar que empregam variações na amplitude do sinal.

Um método de geração de forma de onda bem disseminado na área de radar é a modulação linear em frequência. Sinais de transmissão desta natureza foram empregados mais do que qualquer outra forma de onda devido a sua grande popularidade, fácil geração e imunidade a desvios doppler [10]. Todavia, conforme será apresentado nos capítulos seguintes, o sinal de saída do módulo compressão de pulsos da cadeia de recepção, quando filtragem casada é empregada juntamente com esta de forma de onda de transmissão modulada linearmente em frequência, apresenta uma elevada quantidade de lóbulos laterais, com níveis consideráveis.

Uma vez que uma grande variedade de aplicações de sistemas radar tem por objetivo detectar todos os alvos existentes no cenário mapeado (e.g. radares de busca e vigilância, radares meteorológicos e radares para controle de tráfego aéreo), nota-se que tais lóbulos laterais podem deteriorar significativamente o desempenho dos mesmos, pois diminuem a probabilidade de detecção e aumentam a probabilidade de falso alarme. Isto ocorre porque tais lóbulos podem ser confundidos com alvos, ocasionando um falso alarme ou, caso se utilize alguma técnica ineficiente para sua redução, esta pode também mascarar um alvo que se encontra próximo à um lóbulo lateral, evitando a detecção deste.

Entre as diversas técnicas de minimização dos lóbulos laterais da saída da compressão de pulsos de um sistema radar que emprega este tipo de forma de onda de transmissão, pode-se citar o uso de janelamento juntamente com a filtragem casada e a filtragem descasada [20], ambas bastante difundidas no meio científico. A primeira reduz os lóbulos laterais a um nível aceitável, enquanto que a segunda, através de técnicas de otimização busca não somente minimizar os mesmos, como também garantir que estes tenham um valor constante em todos os pontos fora do pico da compressão. Ambas, porém, reduzem a detectabilidade e a resolução em distância do sistema, uma vez que a saída do módulo compressão de pulso tem um valor de pico menor que a obtida quando somente o filtro casado é utilizado e uma largura de 3dB maior [20].

Outra abordagem, mais difundida, para solucionar o problema proposto consiste na escolha do pulso a ser transmitido. Modulação não linear de frequência (sinal modulador não linear) e sinais de transmissão que empregam codificação de fase, a qual pode ser gerada por métodos analíticos [21] ou busca exaustiva [19] são exemplos da mesma. Tais técnicas, porém, têm o seu uso limitado uma vez que exigem grande esforço computacional para sua geração e os trabalhos propostos com o intuito de superar essas limitações apesar de apresentarem um bom desempenho, não são ótimos [22].

Nesta linha de pesquisa, encontram-se as formas de onda caracterizadas por processos estocásticos. Como dito nos capítulos anteriores, este é um tópico que tem obtido notoriedade na área de radar, devido às inúmeras vantagens que introduz ao sistema. Neste trabalho, é analisado um sinal de transmissão caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga, onde o sinal modulador é caracterizado por um processo estocástico. É analisado o desempenho de sistemas radar, cuja cadeia de processamento da recepção é descrita no diagrama de blocos apresentado na Figura 3.5, que empregam tais formas de onda de transmissão, comparando-o com o

desempenho de um sistema radar que emprega modulação linear de frequência no sinal transmitido.

Sinais analógicos modulados em frequência são dados por

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos(2\pi f_c t + \theta(t) + \lambda) \quad (4-1)$$

onde λ representa o desvio de fase inserido por um oscilador local, inerente a maioria dos sistemas de comunicações atuais [14], f_c é a frequência central de transmissão e P está relacionada à amplitude do sinal a qual, posteriormente, será mostrada que representa a potência média do mesmo. Ainda em (4-1), a variável $\theta(t)$ é dada por

$$\theta(t) = K_p \int_{-\infty}^t a(\alpha) d\alpha \quad (4-2)$$

onde K_p representa a constante de modulação e $a(t)$ é o sinal de entrada do modulador de frequência (sinal modulador).

Note que o sinal $\theta(t)$ pode ser obtido através da filtragem do sinal modulador, $a(t)$, por um filtro linear e invariante no tempo com resposta impulsional $h(t)$ dada por

$$h(t) = K_p u(t) \quad (4-3)$$

onde K_p representa a constante de modulação e $u(t)$ é uma função degrau. A função de transferência desse filtro, $H(f)$, é dada por

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = K_p \left[\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right] \quad (4-4)$$

onde $\delta(f)$ é a função delta de Dirac.

O sinal de transmissão é, então, escrito, a partir de (4-2) e (4-1), como

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos \left(2\pi f_c t + K_p \int_{-\infty}^t a(\alpha) d\alpha + \lambda \right) \quad (4-5)$$

Frente ao exposto, a geração deste sinal pode ser feita através do esquema ilustrado na Figura 4.1.

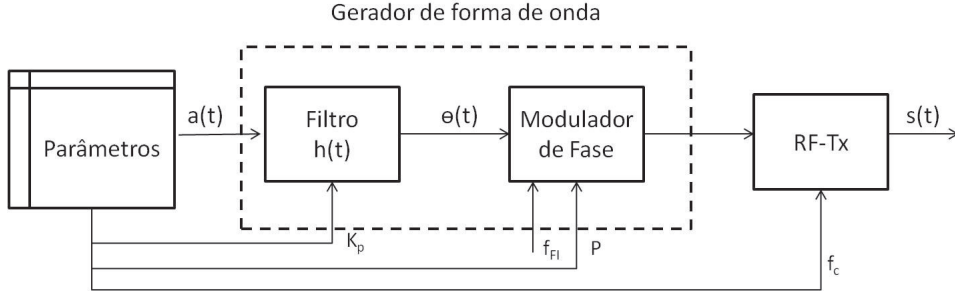


Figura 4.1: Diagrama em blocos da geração de um sinal de transmissão modulado em frequência.

Na Figura 4.1, f_{FI} representa a frequência intermediária do sistema, que não é de relevância para a análise realizada neste trabalho e os demais parâmetros já foram previamente definidos neste capítulo. Traçando um comparativo com a cadeia de transmissão apresentada na Figura 2.1, observa-se que o módulo relativo à escolha dos parâmetros consiste na escolha do sinal modulador, da constante de modulação, da frequência central de transmissão e da amplitude do sinal, representada pelo parâmetro P .

Note que o sinal definido em (4-1) pode ser escrito como

$$s(t) = \text{Re}\left\{\sqrt{2P}e^{j[\theta(t)+\lambda]}e^{j2\pi f_c t}\right\} \quad (4-6)$$

ou, alternativamente, como

$$s(t) = \text{Re}\left\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\right\} \quad (4-7)$$

onde a forma de onda complexa $\tilde{s}(t)$, dada por

$$\tilde{s}(t) = \sqrt{2P}e^{j[\theta(t)+\lambda]} \quad (4-8)$$

é a envoltória complexa do sinal $s(t)$ com respeito à frequência central de transmissão f_c [13].

Esta é a formulação geral de uma portadora modulada em frequência por um sinal modulador $a(t)$. Nas seções seguintes são analisadas as peculiaridades dos sinais de transmissão obtidos quando o sinal modulador é determinístico e linear em frequência e quando este é caracterizado por um processo estocástico.

4.1

Sinal Modulador Determinístico Linear em Frequência

O conceito básico de radares que empregam compressão de pulso na recepção juntamente com formas de onda de transmissão moduladas linearmente em frequência (*chirps*) foi primeiramente descrito por Dicke em 1945 [23]. Nestes sistemas, o sinal modulador, $a(t)$, segue uma função linear do tempo, sendo dado por

$$a(t) = t - \frac{\tau_s}{2} ; 0 < t < \tau_s \quad (4-9)$$

onde τ_s representa a duração do pulso de transmissão.

Consequentemente, a fase do sinal de transmissão é dada através de (4-2) por uma função quadrática definida como

$$\theta(t) = \frac{K_p t^2}{2} - \frac{K_p \tau_s t}{2} ; 0 < t < \tau_s \quad (4-10)$$

onde K_p é a constante de modulação.

O sinal de transmissão, $s(t)$, é, então, dado conforme (4-5) por

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos \left(2\pi f_c t + \frac{K_p t^2}{2} - \frac{K_p \tau_s t}{2} + \lambda \right) ; 0 < t < \tau_s \quad (4-11)$$

note que o parâmetro P em (4-11) corresponde à potência do sinal $s(t)$.

Observa-se a partir de (4-11) que a frequência instantânea do sinal varia de $f_c - \frac{K_p \tau_s}{2}$ à $f_c + \frac{K_p \tau_s}{2}$. Desta forma, a banda de excursão da frequência instantânea do sinal, em torno da frequência central é dada por

$$B_s = K_p \tau_s \quad (4-12)$$

Uma vez que o intuito deste trabalho não consiste na análise do sinal determinístico, mas sim na comparação de desempenho entre um sistema radar que emprega a forma de onda determinística e outro que emprega a forma de onda proposta, então, tem-se interesse apenas na envoltória complexa deste sinal. A envoltória complexa do sinal $s(t)$ com relação à frequência central de transmissão, f_c , é dada, conforme (4-8), por

$$\tilde{s}(t) = \sqrt{2P} e^{j \left[\frac{K_p t^2}{2} - \frac{K_p \tau_s t}{2} + \lambda \right]} ; 0 < t < \tau_s \quad (4-13)$$

Note que a potência da envoltória complexa do sinal de transmissão

determinístico, caracterizado por uma portadora modulada linearmente em frequência, é dado, de (4-13), por

$$P_{\tilde{s}} = |\tilde{s}(t)|^2 = 2P \quad (4-14)$$

Com o intuito de melhor comparar os desempenhos entre os receptores, define-se como autocorrelação da envoltória complexa do sinal determinístico com relação à frequência central de transmissão, associada a um intervalo de integração T_{int} , a função dada por

$$R_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tau) = \frac{1}{T_{int}} \int_0^{T_{int}} \tilde{s}(t) \tilde{s}^*(t - \tau) dt \quad (4-15)$$

Note que, de (3-41) e (4-15), obtém-se diretamente que a componente relativa ao sinal na saída do i -ésimo filtro receptor, $\tilde{x}'_i(t)$, é, então, dada por

$$\tilde{x}'_i(t) = A_i T_{int} R_{\tilde{s}\tilde{s}}(t - T_0) \quad (4-16)$$

Mostra-se, no Apêndice C, que a autocorrelação da envoltória complexa do sinal determinístico modulado linearmente em frequência com relação à frequência central de transmissão é dada por

$$R_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tau) = A(\tau) \tau_s e^{j \frac{K_p \tau_s \tau}{2}} \text{sinc} \left(\frac{K_p \tau_s \tau}{2} \right) \quad (4-17)$$

onde $A(\tau)$ é dada por

$$A(\tau) = \frac{2P}{\tau_s} e^{j \left[-\frac{K_p(\tau^2)}{2} - \frac{K_p \tau_s \tau}{2} \right]} \quad (4-18)$$

A potência do sinal de saída do filtro correlator, no instante T_0 , pode ser obtida de (4-16) e (4-17) como

$$|\tilde{x}'_i(T_0)|^2 = 4P^2 A_i^2 \tau_s^2 \quad (4-19)$$

Observa-se que a variável λ não tem influência sobre o resultado e que a autocorrelação do sinal de transmissão e, conseqüentemente, o sinal de saída da compressão de pulsos (4-16), são dados por uma função $\text{sinc}(x)$, que apresenta elevados índices de lóbulos secundários. Os zeros desta função estão separados de uma distância $\Delta \tau_{zeros} = \frac{K_p \tau_s}{2\pi}$.

4.2

Sinal Modulador Aleatório

Nesta seção, realiza-se uma modelagem probabilística do sinal transmitido caracterizado por uma portadora modulada em frequência, considerando o sinal modulador aleatório, ou seja, caracterizado por um processo estocástico. Mais ainda, para uma análise estatística completa deste sinal de transmissão, proposto neste trabalho, considera-se o desvio de fase inerente ao oscilador local também aleatório. Destaca-se que esta análise é realizada através da derivação de alguns momentos importantes dos processos estocásticos envolvidos.

4.2.1

Processo estocástico que caracteriza o sinal de transmissão

Portadoras moduladas em frequência por um sinal modulador caracterizado por um processo estocástico, por conseguinte, também são caracterizadas por processos estocásticos. Tais sinais são dados, de forma análoga à (4-1), por

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos(2\pi f_c t + \theta(t) + \lambda) \quad (4-20)$$

onde λ é uma variável aleatória uniforme, distribuída entre $(0, 2\pi]$, que representa o desvio de fase inserido por um oscilador local, inerente a maioria dos sistemas de comunicações atuais [14] e f_c é a frequência central de transmissão. É demonstrado no Apêndice D.1 que a potência média, P_s , deste sinal de transmissão, caracterizado por um processo estocástico, é constante e igual à P , ou seja,

$$P_s = P \quad (4-21)$$

Ainda em (4-20), analogamente à (4-2), $\theta(t)$ é dada por

$$\theta(t) = K_p \int_{-\infty}^t a(\alpha) d\alpha \quad (4-22)$$

onde K_p representa a constante de modulação e $a(t)$ é o sinal de entrada do modulador de frequência, caracterizado por um processo estocástico (sinal modulador).

A função média, $m_s(t)$, do sinal de transmissão, $s(t)$, é calculada como o

valor esperado do mesmo, descrito em (4-20), como

$$m_s(t) = E[s(t)] = E[2P \cos(2\pi f_c t + \theta(t) + \lambda)] \quad (4-23)$$

É demonstrado no Apêndice D.2 que a média deste sinal de transmissão caracterizado por um processo estocástico é constante e nula, ou seja,

$$m_s(t) = 0 \quad (4-24)$$

Uma vez derivadas expressões para a potência média e a função média do sinal de transmissão proposto, analisa-se, então, a função autocorrelação de tais sinais. Primeiramente, deseja-se provar que o sinal de transmissão proposto neste trabalho é um processo estocástico Estacionário no Sentido Amplo (ESA). Isto porque, desta forma, a função autocorrelação do mesmo pode ser escrita apenas em função do intervalo $\tau = t_1 - t_2$.

A função autocorrelação do processo estocástico real $s(t)$, descrito em (4-20), é definida por

$$\begin{aligned} R_s(t_1, t_2) &= E[s(t_1)s(t_2)] \\ &= E[2P \cos(2\pi f_c t + \theta(t_1) + \lambda) \cos(2\pi f_c t + \theta(t_2) + \lambda)] \end{aligned} \quad (4-25)$$

Conforme demonstração apresentada no Apêndice D.3, a função autocorrelação deste sinal de transmissão, caracterizado por um processo estocástico, pode ser reescrita como

$$R_s(t_1, t_2) = P \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c(t_1-t_2)} E \left[e^{j(\theta(t_1)-\theta(t_2))} \right] \right\} \quad (4-26)$$

Seja, então, $x_{t_1 t_2}$ a variável aleatória que representa a diferença de fase do sinal de transmissão em dois momentos distintos, definida por

$$x_{t_1 t_2} = \theta(t_1) - \theta(t_2) \quad (4-27)$$

A função característica da variável aleatória $x_{t_1 t_2}$ é definida por

$$M_{x_{t_1 t_2}}(v) = E[e^{jv x_{t_1 t_2}}] = \mathcal{F}[p_{x_{t_1 t_2}}] \quad , \quad f = \frac{-v}{2\pi} \quad (4-28)$$

onde $p_{x_{t_1 t_2}}$ é a função densidade de probabilidade da variável $x_{t_1 t_2}$ e o operador $\mathcal{F}[\cdot]$ representa a operação transformada de Fourier. Desta forma, a partir de (4-28), a função autocorrelação do sinal de transmissão proposto, descrita em

(4-26) pode ser reescrita como

$$R_s(t_1, t_2) = PRe \left\{ e^{j2\pi f_c(t_1-t_2)} M_{x_{t_1 t_2}}(1) \right\} \quad (4-29)$$

Note que, se $\theta(t)$ é estacionário de segunda ordem, então $p_{x_{t_1 t_2}}$ depende de $t_1 - t_2$, conseqüentemente, a função característica de $x_{t_1 t_2}$, $M_{x_{t_1 t_2}}(1)$, e a função autocorrelação do sinal de transmissão, $R_s(t_1, t_2)$ também dependem, logo, $s(t)$ é Estacionário no Sentido Amplo (ESA).

Se o sinal modulador, $a(t)$, for Estacionário no Sentido Amplo, tem-se que $\theta(t)$ também será, uma vez que o filtro, cuja resposta ao impulso é $h(t)$, definido em (4-3) é linear e invariante no tempo [24]. Ainda, se $\theta(t)$ é ESA e gaussiano, então $\theta(t)$ é Estacionário de segunda ordem. Assim, para garantir que $s(t)$ seja ESA, basta garantir que $\theta(t)$ seja ESA e gaussiano.

Sendo assim, considerando $\theta(t)$ um processo estocástico gaussiano e Estacionário no Sentido Amplo, então, $\theta(t_1)$ e $\theta(t_2)$ são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas [24] e ainda, pode-se escrever que $x_{t_1 t_2} = \theta(t_1) - \theta(t_2)$ também é uma variável aleatória gaussiana.

Então a função característica da variável aleatória $x_{t_1 t_2}$, (4-28), reescreve-se como

$$M_{x_{t_1 t_2}}(1) = e^{jm} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \quad (4-30)$$

Desta maneira, a função autocorrelação do sinal de transmissão proposto, descrita em (4-29), é dada por

$$R_s(t_1, t_2) = PRe \left\{ e^{j2\pi f_c(t_1-t_2)} e^{jm} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \right\} \quad (4-31)$$

onde, m e σ^2 são, respectivamente, a média e a variância de $x_{t_1 t_2}$.

É demonstrado no Apêndice D.4 que, se o sinal modulador $a(t)$ tiver média nula, então a variável $x_{t_1 t_2}$ também apresentará média nula, ou seja,

$$E[x_{t_1 t_2}] = 0 \quad (4-32)$$

Também é demonstrado no Apêndice D.4 que a variância, σ^2 , de $x_{t_1 t_2}$ é dada em função do sinal modulador, $a(t)$, por

$$\sigma^2 = 2K_p^2 \int_0^{|\tau|} R_a(\gamma) [\tau - |\gamma|] d\gamma \quad (4-33)$$

A função autocorrelação do sinal de transmissão, descrita por (4-31) é, então, dada por

$$R_s(t_1, t_2) = P e^{-K_p^2 \int_0^{|t_1-t_2|} R_a(\gamma)[t_1-t_2-|\gamma|] d\gamma} \cos(2\pi f_c(t_1 - t_2)) \quad (4-34)$$

Note, a partir de (4-34) que a função autocorrelação do processo estocástico $s(t)$ é uma função do sinal modulador $a(t)$ e do intervalo de tempo $\tau = t_1 - t_2$, ou seja, é ESA. Pode-se, então, reescrever (4-34) em função do intervalo de tempo τ , como

$$R_s(\tau) = P e^{-K_p^2 \int_0^{|\tau|} R_a(\gamma)[\tau-|\gamma|] d\gamma} \cos(2\pi f_c(\tau)) \quad (4-35)$$

Alternativamente, é demonstrado no Apêndice D.4 que a variância, σ^2 , de $x_{t_1 t_2}$ é dada em função de $\theta(t)$, por

$$\sigma^2 = 2R_\theta(0) - 2R_\theta(\tau) \quad (4-36)$$

Consequentemente, outra forma de se escrever a função autocorrelação do sinal de transmissão proposto, descrita em (4-31) é

$$R_s(\tau) = P e^{-[R_\theta(0) - R_\theta(\tau)]} \cos(2\pi f_c \tau) , \text{ onde } \tau = t_1 - t_2 \quad (4-37)$$

Note, a partir de (4-34) e (4-37) que o processo estocástico que caracteriza o sinal de transmissão, $s(t)$, é estacionário no sentido amplo, pois depende apenas do intervalo $\tau = t_1 - t_2$. Desta forma, a densidade espectral de potência do mesmo é dada, pelo teorema de Wiener-Khintchine, por

$$S_s(f) = \mathcal{F}^{-1} [R_s(\tau)] \quad (4-38)$$

onde $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ é o operador transformada de Fourier inversa.

Por fim, deriva-se o último momento do processo estocástico que caracteriza o sinal de transmissão proposto, a correlação cruzada entre dois sinais transmitidos em momentos distintos, $s_1(t_1)$ e $s_2(t_2)$. Esta é dada por

$$\begin{aligned} R_{s_1 s_2}(t_1, t_2) &= E[s_1(t_1)s_2(t_2)] \\ &= E[2P \cos(2\pi f_c t + \theta(t_1) + \lambda_1) \cos(2\pi f_c t + \theta(t_2) + \lambda_2)] \\ &= E[2P \frac{1}{2} (\cos(4\pi f_c t + \theta(t_1) + \lambda_1 + \theta(t_2) + \lambda_2) + \cos(\theta(t_1) + \lambda_1 - \theta(t_2) - \lambda_2))] \\ &= P \{ E[\cos(4\pi f_c t + \theta(t_1) + \theta(t_2) + \lambda_1 + \lambda_2)] + E[\cos(\theta(t_1) - \theta(t_2) + \lambda_1 - \lambda_2)] \} \end{aligned} \quad (4-39)$$

Foi provado em [25] que, se uma variável aleatória é uniformemente distribuída, então a soma desta com outra variável aleatória, com qualquer função densidade de probabilidade, módulo m , onde m é qualquer valor, também será uniformemente distribuída.

Assim, observa-se que tanto $\lambda_1 + \lambda_2$, quanto $\lambda_1 - \lambda_2$ serão uniformes em $(0, 2\pi]$ e, conseqüentemente, (4-39) será nula, conforme mostrado pela solução de (D-3), comprovando que sinais de transmissão em tempos distintos são descorrelatados. A função correlação cruzada é, então, dada por

$$R_{s_1 s_2}(t_1, t_2) = 0 \quad (4-40)$$

4.3

Envoltória Complexa do Processo Estocástico que Caracteriza o Sinal de Transmissão

A envoltória complexa com relação à frequência central de transmissão, f_c , do processo estocástico $s(t)$ que caracteriza o sinal de transmissão, $\tilde{s}(t)$, é dada por (4-8), onde $\theta(t)$ é um processo estocástico e λ é uma variável aleatória uniforme, distribuída entre $(0, 2\pi]$.

Assim como foi feito para o processo real, o processo estocástico que caracteriza a envoltória complexa do sinal de transmissão será descrito com base nos seus momentos: função média, potência média, função autocorrelação e função correlação cruzada.

A potência média da envoltória complexa do sinal, com respeito à f_c , $P_{\tilde{s}}$, é dada por

$$P_{\tilde{s}} = E [|\tilde{s}(t)|^2] = E [\tilde{s}(t)\tilde{s}^*(t)] = 2P \quad (4-41)$$

Note que a potência média da envoltória complexa do sinal de transmissão é o dobro da potência média do sinal de transmissão real (4-21). Conseqüentemente, a potência média da envoltória complexa do sinal recebido, após o módulo RF-Rx também será o dobro da potência média do respectivo sinal real, o que está de acordo com (3-16).

A função média da envoltória complexa do sinal de transmissão, $m_{\tilde{s}}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} m_{\tilde{s}}(t) = E[\tilde{s}(t)] &= E [Pe^{j[\theta(t)+\lambda]}] \\ &= PE [\cos(\theta(t) + \lambda) + j \sin(\theta(t) + \lambda)] \end{aligned}$$

$$= PE [\cos(\theta(t) + \lambda)] + PE [j \sin(\theta(t) + \lambda)] \quad (4-42)$$

Conforme análise realizada na derivação de (D-3), uma vez que a variável aleatória λ é uniforme e distribuída entre $(0, 2\pi)$, tem-se que os dois valores esperados descritos em (4-42) são nulos.

Assim, a função média da envoltória complexa do sinal de transmissão é dada por

$$m_{\tilde{s}}(t) = 0 \quad (4-43)$$

Observa-se, de (4-43), que a função média da envoltória complexa do processo estocástico que caracteriza o sinal de transmissão com relação à frequência central, assim como em (4-23), é constante para todos os instantes de tempo t e nula.

A função autocorrelação da envoltória complexa do sinal de transmissão é dada por

$$\begin{aligned} R_{\tilde{s}}(t_1, t_2) &= E[\tilde{s}(t_1)\tilde{s}^*(t_2)] \\ &= E[2Pe^{j[\theta(t_1)+\lambda]}e^{-j[\theta(t_2)+\lambda]}] \\ &= E[2Pe^{j[\theta(t_1)-\theta(t_2)]}] \end{aligned} \quad (4-44)$$

Assim como na análise realizada na derivação da função autocorrelação do processo estocástico que caracteriza o sinal de transmissão, pode-se reescrever (4-44) em função da variável $x_{t_1 t_2}$, (4-27), como

$$R_{\tilde{s}}(t_1, t_2) = 2PE[e^{jx_{t_1 t_2}}] = 2Pe^{jm}e^{\frac{-\sigma^2}{2}} \quad (4-45)$$

onde m e σ^2 são, respectivamente, a média e variância da variável aleatória $x_{t_1 t_2}$.

Sendo assim, observa-se que a mesma análise feita para o processo estocástico $s(t)$, real, (4-27) a (4-36), com base na função característica da variável aleatória $x_{t_1 t_2}$, deve ser feita para o processo estocástico que caracteriza a envoltória complexa do mesmo. Desta forma, a partir de (4-32), (4-33) e (4-36), tem-se que a função autocorrelação da envoltória complexa do sinal é, então, dada em função do sinal modulador por

$$R_{\tilde{s}}(\tau) = 2Pe^{-K_p^2 \int_0^{|\tau|} R_a(\gamma)[\tau-|\gamma|]d\gamma} \quad (4-46)$$

ou ainda, em função do processo estocástico $\theta(t)$, por

$$R_{\tilde{s}}(\tau) = 2Pe^{-[R_{\theta}(0) - R_{\theta}(\tau)]} \quad (4-47)$$

Note, a partir de (4-46) e (4-47) que o processo estocástico que caracteriza a envoltória complexa do sinal de transmissão também é um processo estacionário no sentido amplo. Desta forma, pode-se reescrever a função autocorrelação deste processo, de forma geral, como

$$R_{\tilde{s}}(\tau) = E[\tilde{s}(t + \tau)\tilde{s}^*(t)] \quad (4-48)$$

Note que, considerando (4-48) é possível associar uma função amostra do processo complexo $\tilde{x}'_i(t)$, (3-41), a uma estimativa de $T_{int}A_iR_{\tilde{s}}(t - T_0)$, feita com base em uma função amostra da envoltória complexa $\tilde{s}_i(t)$. Desta forma, $\tilde{x}'_i(t)$ pode ser reescrito como

$$\tilde{x}'_i(t) = T_{int}A_i\hat{R}_{\tilde{s}}(t - T_0) \quad (4-49)$$

onde $\hat{R}_{\tilde{s}}(t)$ representa uma estimativa da função autocorrelação da envoltória complexa do sinal de transmissão com respeito à frequência central de transmissão, $R_{\tilde{s}}(t)$.

A densidade espectral de potência da envoltória complexa do sinal pode ser obtida diretamente de (4-38) por

$$S_{\tilde{s}}(f) = \mathcal{F}^{-1} [R_{\tilde{s}}(\tau)] \quad (4-50)$$

Por fim, deriva-se o último momento da envoltória complexa do processo estocástico que caracteriza o sinal de transmissão proposto, a correlação cruzada entre as envoltórias complexas de dois sinais transmitidos em momentos distintos, $\tilde{s}_1(t_1)$ e $\tilde{s}_2(t_2)$. Esta é dada por

$$\begin{aligned} R_{\tilde{s}_1\tilde{s}_2}(t_1, t_2) &= E[\tilde{s}_1(t_1)\tilde{s}_2^*(t_2)] = E[2Pe^{j[\theta(t_1) - \theta(t_2) + \lambda_1 - \lambda_2]}] \\ &= 2PE[\cos(\theta(t_1) - \theta(t_2) + \lambda_1 - \lambda_2)] + 2PE[j\sin(\theta(t_1) - \theta(t_2) + \lambda_1 - \lambda_2)] \end{aligned} \quad (4-51)$$

Foi provado em [25] que se uma variável aleatória é uniformemente distribuída, então a soma desta com outra variável aleatória, com qualquer função densidade de probabilidade, módulo m , onde m é qualquer valor, também será uniformemente distribuída.

Assim, observa-se que $\lambda_{1,2} = \lambda_1 - \lambda_2$ será uma variável aleatória uniformes em $(0, 2\pi]$ e, conseqüentemente, os dois valores esperados descritos em (4-51) serão nulos, conforme mostrado pela solução de (D-3), comprovando que a envoltória complexa de dois sinais de transmissão em tempos distintos, assim como dois sinais transmitidos em tempos distintos, são descorrelatadas. A função correlação cruzada entre duas envoltórias complexas de sinas transmitidos em tempos distintos é, então, dada por

$$R_{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2}(t_1, t_2) = 0, \forall t_1, t_2 \quad (4-52)$$

4.4

Sinal modulador aleatório e plano em uma faixa de frequências

Nas seções anteriores foram derivadas expressões da função autocorrelação do sinal de transmissão e de sua envoltória complexa com respeito à frequência central de transmissão em função de $\theta(t)$ e do sinal modulador, $a(t)$. Nesta seção, aborda-se um caso particular de sinal modulador $a(t)$, Gaussiano, Estacionário no Sentido Amplo, com potência, P_a , unitária e com densidade espectral de potência, S_a , plana em uma faixa de frequências de largura $2B_a$, ou seja, a densidade espectral de potência do sinal modulador é dada por

$$S_a(f) = \frac{1}{2B_a} \text{rect}_{2B_a}(f) \quad (4-53)$$

onde a função $\text{rect}_T(t)$ representa a função retângulo, definida como

$$\text{rect}_{2B_a}(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| \leq B_a; \\ 0 & \text{se } |f| > B_a. \end{cases} \quad (4-54)$$

Como o sinal $a(t)$ tem potência unitária, então equivale a dizer que

$$P_a = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) df = 1 \quad (4-55)$$

A densidade espectral de potência de $\theta(t)$ pode ser derivada em função da densidade espectral de potência do sinal modulador $a(t)$, uma vez que o primeiro é o resultado da passagem do último por um filtro com função de transferência $H(f)$, (4-4). Desta forma, a densidade espectral de potência de

$\theta(t)$, $S_\theta(f)$ pode ser escrita como

$$S_\theta(f) = |H(f)|^2 S_a(f) \quad (4-56)$$

Conforme descrito na primeira seção deste capítulo, se $a(t)$ é Gaussiano e ESA, então $\theta(t)$ também será. A função autocorrelação do processo estocástico que caracteriza $\theta(t)$, $R_\theta(\tau)$ é derivada a partir da densidade espectral de potência do mesmo (4-56). Tem-se, então, que esta é dada por

$$R_\theta(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_\theta(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (4-57)$$

A densidade espectral de potência de um processo estocástico é sempre uma grandeza real e, se o processo estocástico que representa $\theta(t)$ é real, que é o caso do presente trabalho, então $S_\theta(f)$ é par. Dessa forma, pode-se escrever

$$R_\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S_\theta(f)}_{\text{par}} \left[\underbrace{\cos(2\pi f\tau)}_{\text{par}} + j \underbrace{\sin(2\pi f\tau)}_{\text{ímpar}} \right] df \quad (4-58)$$

Sabe-se que, se uma determinada função $f(x)$ for ímpar, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0 \quad (4-59)$$

Assim, nota-se que, a partir de (4-58) e (4-59), pode-se reescrever (4-57) como

$$R_\theta(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_\theta(f) \cos(2\pi f\tau) df \quad (4-60)$$

A densidade espectral de potência do processo estocástico $\theta(t)$, $S_\theta(f)$, é obtida a partir de (4-4), (4-53) (4-56). Esta, então, é dada por

$$S_\theta(f) = \begin{cases} K_p^2 \left[\frac{1}{4\pi^2 f^2} \frac{1}{2B_a} + \frac{\delta(f)^2}{4} \frac{1}{2B_a} \right] & \text{se } |f| \leq B_a; \\ 0 & \text{se } |f| > B_a. \end{cases} \quad (4-61)$$

Consequentemente, utilizando-se (4-61), a função autocorrelação deste pro-

cesso, dada por (4-60) é reescrita como

$$R_{\theta}(\tau) = 2 \int_0^{B_a} \left[K_p^2 \frac{1}{4\pi^2 f^2} \frac{1}{2B_a} \right] \cos(2\pi f\tau) df + D \quad (4-62)$$

onde D é uma constante oriunda da integração da função impulso, cuja análise torna-se irrelevante para o presente trabalho.

A função autocorrelação da envoltória complexa do sinal de transmissão, com respeito à frequência central, dada conforme (4-47) é reescrita, a partir de (4-62) como

$$R_{\tilde{s}}(\tau) = 2Pe^{-\left[K_p^2 \frac{1}{4\pi^2 B_a} \int_0^{B_a} \frac{1 - \cos(2\pi f\tau)}{f^2} df \right]} \quad (4-63)$$

Neste ponto, faz-se necessário a análise de (4-63) para um caso especial, estudado com detalhes na seção seguinte.

4.4.1

Modulação FM faixa larga

Diz-se que uma modulação FM é de faixa larga se a constante de modulação K_p for muito maior do que a largura de banda do sinal modulador, B_a , conforme (4-64).

$$K_p \gg B_a \quad (4-64)$$

Se (4-64) for verdade, então, é demonstrado no Apêndice E.1, que a função autocorrelação da envoltória complexa, com respeito à frequência central, do sinal de transmissão caracterizado por um portadora modulada em frequência faixa larga é dada, a partir de (4-63) por

$$R_{\tilde{s}}(\tau) = 2Pe^{-\left[\frac{\tau^2}{2 \frac{1}{K_p^2}} \right]} \quad (4-65)$$

A densidade espectral de potência da envoltória complexa, com respeito à frequência central, do sinal de transmissão caracterizado por um portadora

modulada em frequência faixa larga é dada, conforme (4-50), por

$$S_{\tilde{s}}(f) = \frac{2P\sqrt{2\pi}}{K_p} e^{-\left[\frac{2\pi^2 f^2}{K_p^2}\right]} = \frac{2P}{\sqrt{2\pi} \frac{K_p}{2\pi}} e^{-\left[\frac{f^2}{2 \frac{K_p^2}{4\pi^2}}\right]} \quad (4-66)$$

Observa-se que, tanto a função autocorrelação, $R_{\tilde{s}}(\tau)$, quanto a densidade espectral de potência, $S_{\tilde{s}}(f)$, da envoltória complexa do sinal de transmissão caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga, têm formato de uma distribuição gaussiana, ambos com média nula e desvio padrão $\frac{1}{K_p}$ e $\frac{K_p}{2\pi}$, respectivamente. Assim, conclui-se que se K_p aumenta, resultando em $R_{\tilde{s}}(\tau)$ mais estreito, a banda do sinal, função de $S_{\tilde{s}}(f)$ também aumentará.

Nota-se, ainda, que a função autocorrelação do sinal, ao contrário de sua densidade espectral de potência, segue uma distribuição gaussiana não normalizada. Por fim, nota-se que ambos os momentos do sinal transmitido, derivados nesta seção, independem da largura de banda do sinal modulador, B_a .

4.5

Largura de Banda

A largura de banda do sinal de transmissão é uma característica fundamental do mesmo, sobre a qual se precisa ter total controle. Este conhecimento é imprescindível para o projeto dos circuitos analógicos, envolvendo os conversores analógico/digital, digital/analógico, os *up* e *down converters* e todos os filtros existentes, sem mencionar no projeto das antenas de transmissão e recepção.

Desta forma, faz-se necessário investigar como se comporta a largura de banda do sinal de transmissão proposto em função dos parâmetros do sistema, sendo estes o sinal modulador e a constante de modulação. Primeiramente, observa-se que a potência da envoltória complexa do sinal transmitido é dada por

$$P_{total} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{s}}(f) df \quad (4-67)$$

Considerando-se o sinal de transmissão caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga tem-se que, uma vez que a densidade espectral de potência, $S_{\tilde{s}}(f)$, é dada por uma gaussiana (4-66), então a potência

média do sinal de transmissão, dada por (4-67) será igual a $2P$.

Neste trabalho, define-se a largura de banda da envoltória complexa do sinal de transmissão com respeito à frequência central, como a faixa de frequências que concentra uma determinada porcentagem da potência total do sinal. Assim, pode-se escrever

$$kP_{total} = \int_{-B_s/2}^{B_s/2} S_s(f) df \quad (4-68)$$

onde k é a porcentagem da energia total concentrada dentro da largura de banda B_s da envoltória complexa do sinal de transmissão, $s(t)$. Então, para sinais caracterizados por portadoras moduladas em frequência faixa larga, tem-se, a partir de (4-68) e (4-66), que

$$k2P = 2P \int_{-B_s/2}^{B_s/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}} df \quad (4-69)$$

onde

$$\sigma = \frac{K_p}{2\pi} \quad (4-70)$$

É demonstrado, no Apêndice F, que a largura de banda da envoltória complexa do sinal de transmissão $s(t)$, caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga, é extraída da seguinte relação

$$Q \left[\frac{B_s}{2\sigma} \right] = \frac{1-k}{2} \quad (4-71)$$

onde a função $Q[x]$ é dada por

$$Q[x] = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (4-72)$$

Um valor comumente utilizado no meio científico é uma largura de banda B_s que concentre 90% da potência total do sinal. Nesta situação, tem-se que $k = 0.9$ e (4-71) é dada por

$$\frac{B_s}{2\sigma} = 1.64 \quad (4-73)$$

Conclui-se, então, que nesta situação, a largura de banda da envoltória

complexa com respeito à frequência central do sinal de transmissão proposto, caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga é dada, a partir de (4-73) e (4-70), em função da constante de modulação, por

$$B_s = 0.5223K_p \quad (4-74)$$

Note que a largura de banda do sinal de transmissão caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga não é função da largura de banda do sinal modulador, B_a .

4.6

Teste das aproximações efetuadas

Foi desenvolvido um *software*, na linguagem IDL (*Interactive Data Language*) [26] para simular portadoras moduladas em frequência, caracterizadas por processos estocásticos. Este *software* tem por objetivo verificar a coerência das equações deduzidas nas seções anteriores deste capítulo, validando as aproximações realizadas. Nesta seção são apresentados os resultados das simulações realizadas.

Primeiramente, foi implementada a relação descrita em (4-63), considerando $P = 0.5$. Nesta simulação, foi variado o valor do parâmetro B_a , para um determinado K_p , respeitando a relação descrita em (4-64). As curvas obtidas são apresentadas na Figura 4.2.

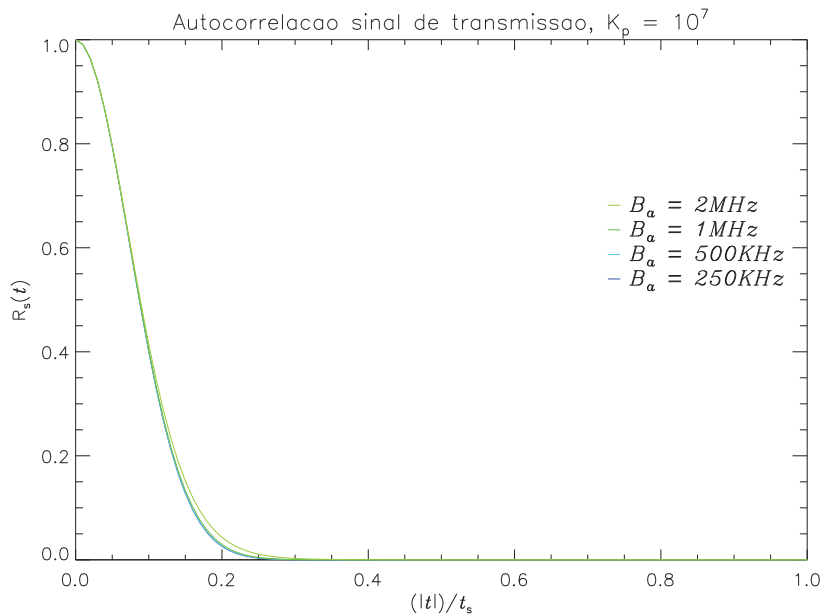


Figura 4.2: Função autocorrelação do sinal de transmissão parametrizada pela largura de banda do sinal modulador - $K_p = 10^7$.

Observa-se da Figura 4.2 que, se (4-64) é verdadeira, a largura de banda do sinal modulador, $a(t)$, não influencia no formato da autocorrelação do sinal de transmissão, a qual apresenta um formato de uma distribuição gaussiana. Este resultado está de acordo com o derivado na seção anterior, validando a aproximação efetuada.

Em seguida, foram realizadas simulações da geração de sinais de transmissão e cálculos, com base nestes, das funções autocorrelação e densidade espectral de potência dos sinais envolvidos. Destaca-se que em todas as simulações considerou-se apenas a envoltória complexa, com respeito à frequência central de transmissão, dos sinais e que, uma vez que os sinais em análise são ergódicos, considerou-se como média estatística a média aritmética de 400 funções amostras dos processos estocásticos em estudo.

Uma função amostra do sinal modulador $a(t)$, caracterizado por um processo estocástico gaussiano, com potência unitária e densidade espectral de potência plana em uma faixa de frequências com largura de banda $2B_a = 1\text{MHz}$ é apresentada na Figura 4.3. A média aritmética da densidade espectral de potência de 400 sinais é apresentada na Figura 4.4 juntamente com a função analítica, (4-53). Observa-se que o resultado obtido na simulação tende para o valor teórico considerado (4-53).

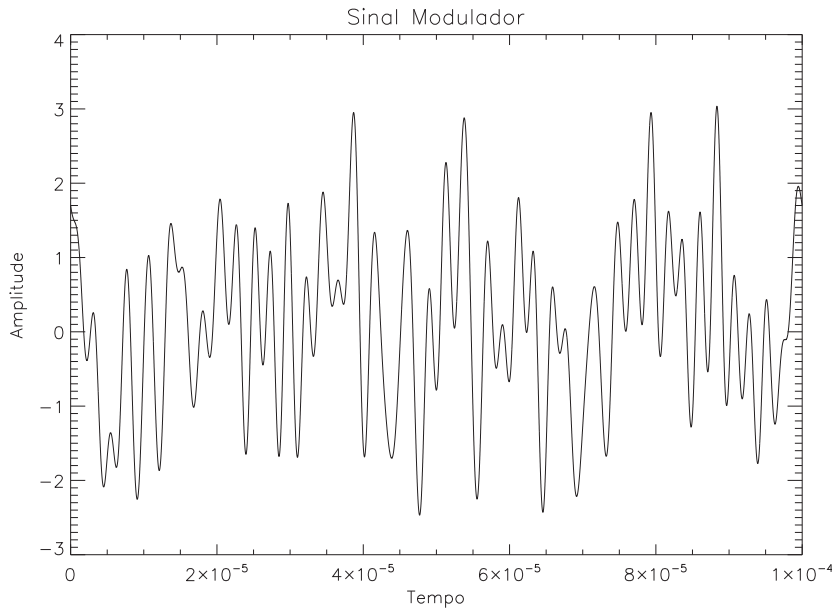


Figura 4.3: Função Amostra do Sinal Modulador $a(t)$ - 1MHz.

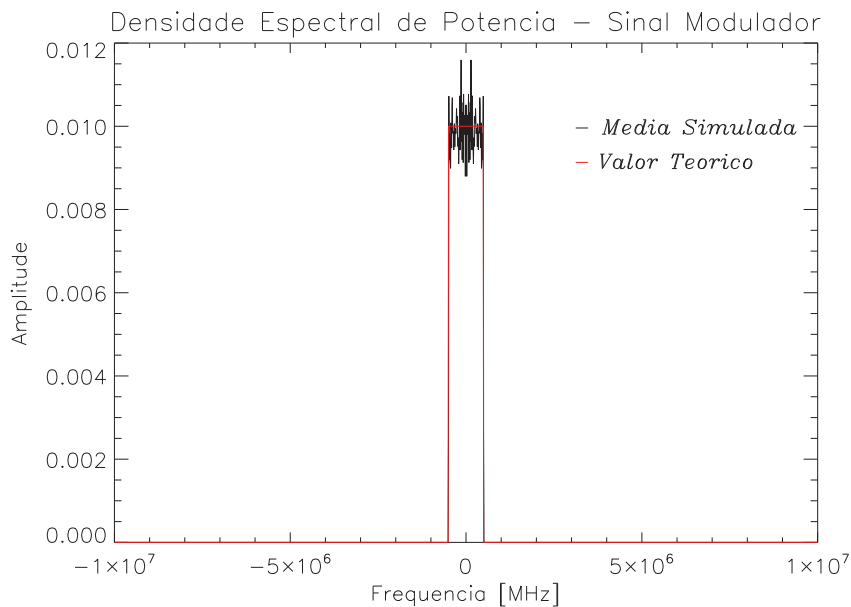


Figura 4.4: Densidade Espectral de Potência Média do Sinal Modulador - 1MHz.

De forma análoga, comparou-se a função autocorrelação, Figura 4.6, e a densidade espectral de potência, Figura 4.7, da envoltória complexa do sinal transmitido, caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga, com largura de banda $B_s = 5\text{MHz}$, de acordo com (4-65) e (4-66). A largura de banda medida durante a simulação foi exatamente $B_s = 5\text{MHz}$. Uma função amostra da envoltória complexa do sinal de transmissão é apresentada na Figura 4.5.

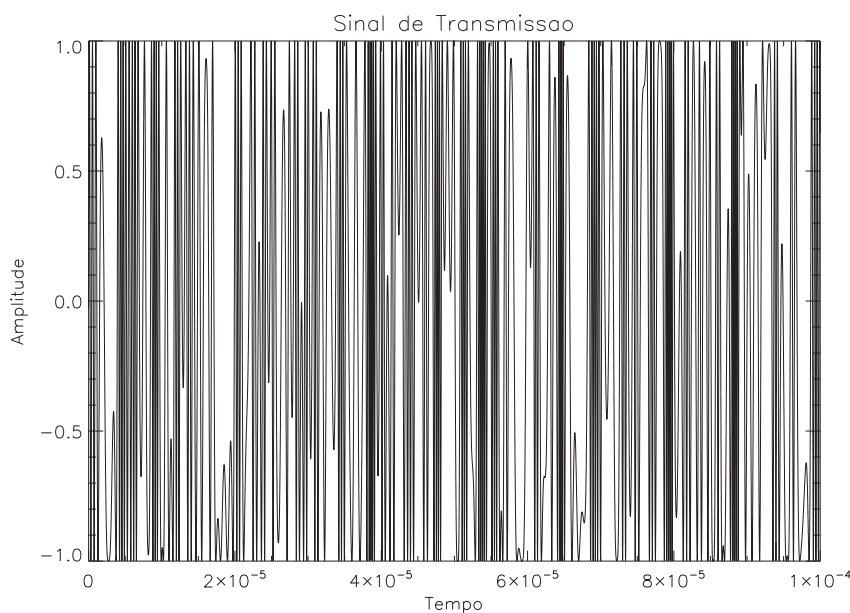


Figura 4.5: Sinal de Transmissão - 5MHz.

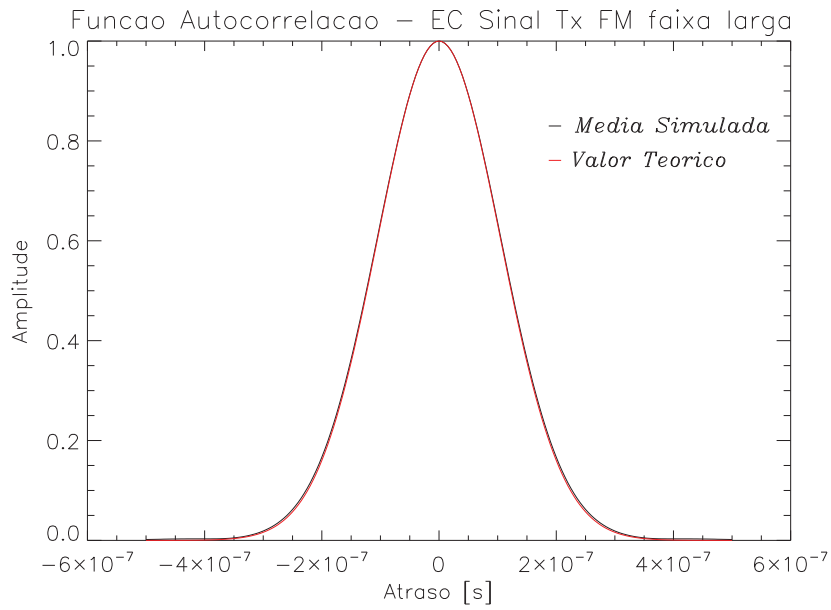


Figura 4.6: Função autocorrelação da envoltória complexa do sinal transmitido - FM faixa larga, $B_s = 5\text{MHz}$.

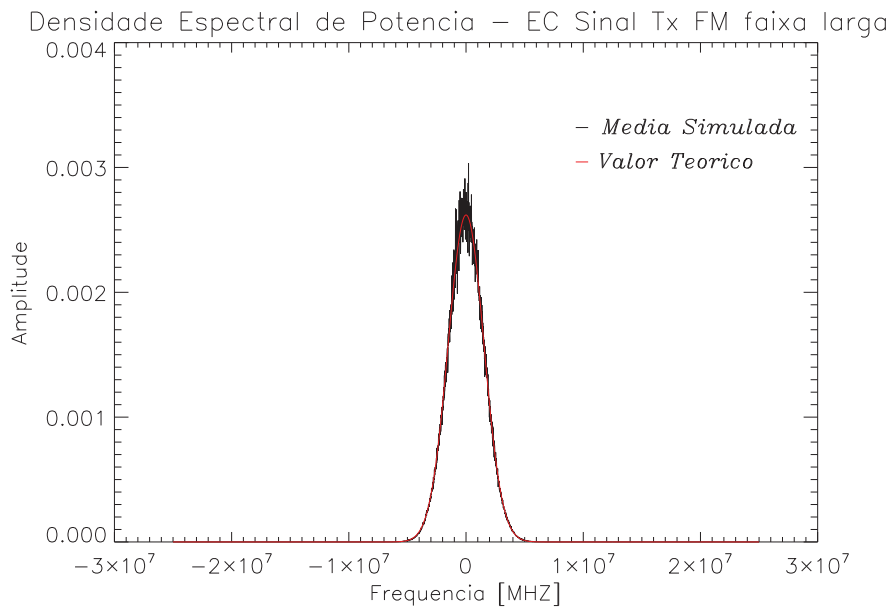


Figura 4.7: Densidade espectral de potência da envoltória complexa do sinal transmitido - FM faixa larga, $B_s = 5\text{MHz}$.