3
Referencial Teórico

3.1
Método Tradicional de VPL

Os agentes econômicos estão constantemente à procura de ampliar sua riqueza através de investimentos em ativos que lhes garantam melhores retornos. O método mais utilizado para analisar a viabilidade econômica de um investimento é o VPL (Valor Presente Líquido). Para calculá-lo, precisa-se trazer para o presente todos os fluxos de caixa estimados para o futuro através de uma taxa mínima de atratividade. Essa taxa de desconto é conhecida como custo do capital ou custo de oportunidade. Em um segundo passo, subtrai-se do capital o Investimento inicial (I) do valor do Fluxo de Caixa Descontado:

$$VPL = \sum_{t=1}^{T} \frac{E[FC_t\ ]}{(1+k)^t} - I \qquad (3.1)$$

Onde:

FC_t= é o fluxo de caixa estimado para cada período t;

T = prazo total do investimento;

k = é a taxa de desconto;

t = é o instante de tempo, onde t = 1, 2,...... T.

Os fluxos de caixas (FC_t) estimados podem ser positivos ou negativos. Caso o VPL encontrado seja negativo, significa que o valor presente do fluxo de caixa gerado pelo projeto é inferior ao investimento inicial. Então, o projeto não é lucrativo e a decisão é não investir. Caso o VPL encontrado seja positivo, significa que o projeto pagará o investimento inicial e a decisão será investir.

3.2
Taxa de Desconto Ajustada ao Risco

Uma tarefa geralmente complicada para os agentes é determinar o valor correto da taxa de desconto(k). Um valor elevado de k pode inviabilizar um projeto bom e um baixo valor de k pode viabilizar um projeto ruim.

A principal metodologia utilizada é o WACC (Custo Médio Ponderado do Capital). De acordo com Massotti (2007), o WACC é a taxa de desconto que compensa os acionistas pelo risco que sofrem ao investir em um determinado projeto. Esse risco é mensurado de acordo com o setor a que o investimento pertence, conforme equação abaixo:

$$K = k_o \frac{K_p}{(Kp+Kt)} + k_d \frac{K_t}{(Kp+kt)} \text{(1- Alíquota IR)} \qquad (3.2)$$

Onde:

k_o = custo do capital próprio;

k_d = custo de capital de terceiros;

K_p = capital próprio;

K_t = capital de terceiros.

Geralmente, para calcular o Custo do capital próprio (K_p) utiliza-se o modelo CAPM.

De acordo com Souza (2003), a teoria do CAPM foi desenvolvida para explicar o comportamento dos preços dos ativos e fornecer um mecanismo que possibilite aos investidores avaliar o impacto do risco sobre o retorno de um ativo.

Nesse modelo, o mercado recompensa seus investidores apenas através do risco sistemático[10], pois parte do pressuposto de que o risco não sistemático já foi diversificado.

Pode-se separar o CAPM em duas partes: taxa livre de risco e prêmio de risco, conforme a seguinte equação:

$$K_p = R_f + \beta[R_m - R_f] \qquad (3.3)$$

[10] O risco sistemático está atrelado às mudanças econômicas medidas pelo β (Beta).

Onde:

K_p= custo do capital próprio;

R_f= taxa livre de risco;

R_m = retorno médio do mercado;

β = beta ou risco não sistemático.

Outra forma de analisar o investimento é utilizar o método da certeza equivalente. Segundo Samanez (2007), esse método transforma os fluxos de caixa esperados em fluxos sem risco, através do artifício que expurga o componente aleatório dos fluxos de caixa esperados.

3.3
Críticas ao Método Tradicional do VPL

O método VPL passa por questionamentos pelo fato de ser determinístico desconsiderando possíveis variações no fluxo de caixa, além de não incorporar a flexibilidade gerencial, isto é, não leva em consideração possíveis decisões que podem ser modificadas ao longo do projeto, como: adiar, abandonar e expandir.

Para Minardi (2002), o método VPL será aplicado quando as flexibilidades gerenciais não forem significativas, caso contrário, precisa ser remodelado para capturar o valor dessas flexibilidades. Em um investimento, quanto maior for o horizonte de tempo do projeto, mais incertos serão os valores dos fluxos de caixa. Existem inúmeros fatores econômicos que podem afetar o valor do fluxo, tais como: mudanças climáticas, crescimento da concorrência, políticas econômicas, novas tecnologias. Sendo assim, o método VPL pode levar o investidor a decisões erradas, aceitando projetos que deveriam ser rejeitados ou até mesmo rejeitando projetos que deveriam ser aceitos.

3.4
Teoria das Opções Reais

No mundo corporativo, as incertezas técnicas e econômicas de um projeto existem desde a fase inicial. O fluxo de caixa futuro de um investimento é modificado em resposta às alterações do mercado, havendo a necessidade constante de mudança na estratégia. A flexibilidade gerencial possui a vantagem de modificar ou alterar decisões estratégicas já realizadas, podendo aumentar os ganhos e limitar as possíveis perdas. De acordo com Gomes (2001), ao introduzir incerteza na análise de projetos, torna-se possível a implementação de estratégias diferenciadas, tais como: expandir o projeto em momentos otimistas, abandonar ou adiar o projeto em momentos desfavoráveis. Essas estratégias acrescentam valor ao projeto. De acordo com Trigeorgis (1995), ao incorporar a flexibilidade gerencial ao VPL tradicional, obtém-se o VPL expandido, conforme equação abaixo:

$$VPL_{expandido} = VPL_{estático} + \textit{Valor da Opção} \quad (3.4)$$

Desta forma, surge a Teoria das Opções Reais (T.O.R) que incorpora a flexibilidade gerencial ao VPL tradicional. Essa inovação fez com que esse método começasse a ganhar espaço no cenário financeiro para análise de investimentos.

O primeiro a utilizar um método de opções reais foi Tourinho (1979), o qual avaliou a opção de explorar uma jazida de recursos naturais. Já McDonald e Siegel (1986) avaliaram a opção de diferir um determinado investimento escolhendo o momento ótimo para executar o projeto. Os autores Paddock, Siegel e Smith (1988) foram os primeiros a valorar uma jazida de petróleo não explorada no Golfo do México.

Na década de 1990, houve um crescimento rápido das Opções Reais. Autores como Pindyck (1993) e Trigeorgis (1993) publicaram importantes artigos e que foram referência no meio acadêmico e industrial.

O primeiro livro-texto publicado sobre essa metodologia foi escrito por Dixit e Pindyck (1994), o qual tornou-se referência no assunto em tempo contínuo. Um pouco depois, Trigeorgis (1995) publica livro-texto abordando não apenas a valoração de um investimento em tempo contínuo, mas também em tempo discreto. Já Copeland e Antikarov (2002) escrevem um livro prático sobre Opções Reais, o qual foi traduzido para o português.

3.4.1
Características da Teoria das Opções Reais

Dixit e Pindyck (1994) afirmam que ao analisar um investimento, existem três características fundamentais para o tomador de decisão: irreversibilidade, a incerteza e o *timing*. Esses são pilares da Teoria de Opções Reais.

Quando se investe em um projeto, o valor despendido é praticamente irreversível, isto é, o custo inicial do projeto não é todo recuperado, caso o investidor se arrependa da decisão tomada. Sendo assim, a grande maioria dos desembolsos de um investimento são custos afundados.

Segundo Dias (1996), a irreversibilidade faz com que a opção de espera para investir tenha valor. Somente quando a probabilidade de fracasso for relativamente baixa é que o investimento irreversível deve ser feito. Com relação à incerteza, os fluxos de caixa futuros são duvidosos. Isso deve-se ao fato de que o mercado está em constante modificação. Sendo assim, a melhor alternativa nesse caso, é calcular as probabilidades do projeto e escolher aquela que maximizará o lucro do investidor. Já a terceira e última característica é o *timing*, que trata da possibilidade de adiar um investimento, ou seja, esperar novas informações do mercado para encontrar o melhor momento para investir.

Brandão (2002) comenta que a interação entre as três características determinam a decisão ótima dos investidores.

Apesar dessas inovações, é impossível obter informações precisas sobre a remuneração futura do investimento escolhido. Através da Teoria das Opções Reais, o investidor maximiza os ganhos em situações favoráveis e minimiza as perdas em situações desfavoráveis. (Brealey e Myers, 1992).

3.4.2
Tipos de Opções Reais

A partir do desenvolvimento da T.O.R (Teoria das Opções Reais), os projetos de investimento podem ser vistos como um conjunto de opções reais. Dentre as opções reais, têm-se as opções de adiar o investimento, cancelar novas etapas do investimento, alterar a escala de produção (expandir, contrair, fechar temporariamente, reiniciar), abandonar pelo valor, alterar usos (entradas e saídas) e opções de crescimento. (Trigeorgis, 1995)

3.4.2.1
Opção de adiar ou esperar o projeto

Neste caso, o investidor tem a possibilidade de retardar o início do projeto e esperar pelo momento mais propício no futuro. Então essa opção torna-se valiosa quando o investimento não apresenta condições satisfatórias para ser executado, como: custos altos, baixa demanda e preços baixos. Nesse contexto, esperar por novas informações se torna essencial, porque o titular de uma opção tem o direito e não a obrigação de exercer o investimento[11].

De acordo com o VPL tradicional, a regra de decisão diz para realizar um investimento toda vez que o valor presente dos fluxos futuros for maior do que o custo inicial. Na opção real, a possibilidade de adiar um investimento, chamado de opção de espera, garante uma flexibilidade na decisão evitando perdas desnecessárias.

3.4.2.2
Opção de abandonar o projeto

A princípio, esse tipo de opção é similar à opção de espera, caso as condições do mercado não estejam favoráveis. Assim, o tomador da decisão tem a opção de cancelar ou abandonar o projeto. No caso de abandono, o titular da

[11]Esse tipo de opção possui características de uma opção de compra (call).

opção não terá como voltar atrás, tornando a decisão irreversível. Esse tipo de opção é comparada a uma opção americana de venda (*put*).

3.5 Opções Financeiras

A expressão Opções Reais foi utilizada por Myers (1977) a partir do momento em que as oportunidades de novos investimentos em uma empresa são análogas às opções de compra do mercado financeiro. Desta forma, surge uma nova abordagem para a análise de investimentos.

Opções reais são nada mais do que direitos contigenciais sobre ativos que podem ser exercidos ou não.

Devido a incertezas do futuro e a fim de proteger-se de flutuações nos preços dos ativos ou ganhar com as especulações, investidores optam por derivativos no mercado de capitais. Os derivativos são instrumentos financeiros que derivam de ativo-básico ou ativo-objeto. Os contratos futuros, contratos a termo, opções e *swaps* são modalidades de derivativos, enquanto os ativos podem ser ações, títulos ou moedas.

Uma opção permite ao titular o direito e não a obrigação de comprar ou vender o ativo-objeto, em uma data futura, pelo preço de exercício. Para uma opção de compra, tem-se a equação abaixo:

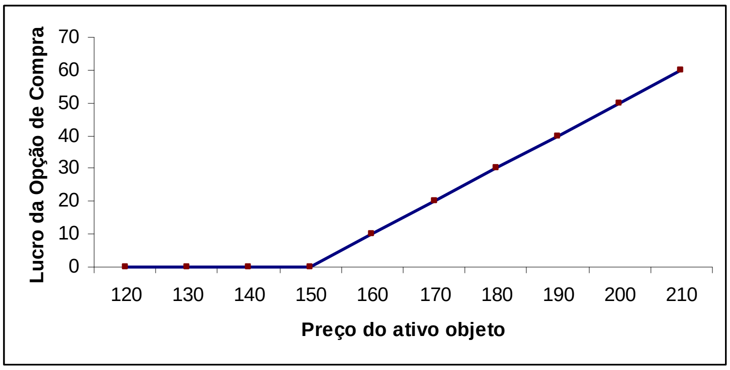
$$C_T = máx(\,S_T - x, 0) \qquad (3.5)$$

Em que C_T é o valor da opção de compra na data de vencimento T, S_T é o preço do ativo objeto e x é o preço de exercício.

Se o titular da opção não exercer seu direito até a data vencimento (ou data de exercício), o mesmo o perderá. Porém, se o titular exercer a opção, o lançador possui a obrigação de cumprir o acordado. Outro fator importante em opções é que o titular deverá pagar um prêmio (ou valor da opção) ao lançador, o qual não será devolvido, independente do titular exercer ou não a opção.

Opções mais comuns podem ser classificadas como *call* (opção de compra) e *put* (opção de venda).

O titular de uma opção de compra só terá lucro quando o preço do ativo-objeto for maior que o preço de exercício (Opção de compra *in- the-money*). Caso o preço da ação objeto seja inferior ou igual ao preço de exercício (Opção de Compra *out-of-money* ou *at-of-money*), o titular da opção poderá não exercê-la, pois em ambas as circunstâncias não obterá lucro. O Gráfico abaixo demonstra o lucro de uma opção de compra dentro do dinheiro (*in- the-money*).



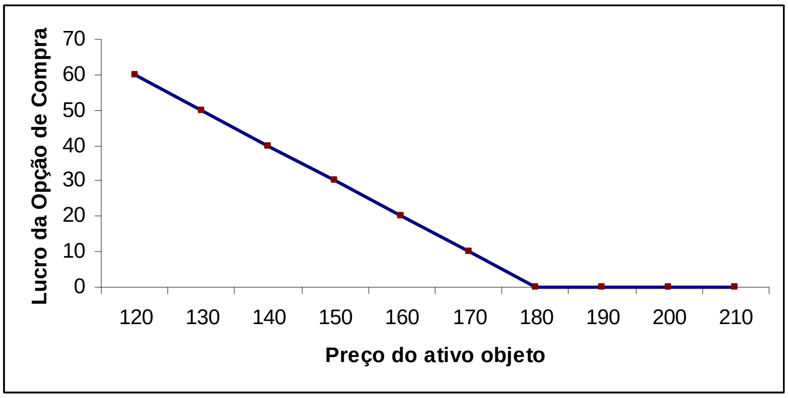
Fonte: Elaboração Própria

Gráfico 3.1 – Remuneração da Opção de Compra no Vencimento

Já uma opção de venda (*put*), permite ao titular o direito de vender o ativo-objeto, em determinada data, pelo preço estipulado. O valor da opção está representado pela equação seguinte:

$$V_T = máx(x - S_T, 0) \quad (3.6)$$

V_T é o valor da opção de venda na data de vencimento T. Ao contrário da opção de compra, o titular de uma opção de venda lucrará se o preço do ativo-objeto for menor do que o preço de exercício (Opção de venda dentro do dinheiro).



Fonte: Elaboração Própria

Gráfico 3.2 – Remuneração da Opção de Venda no Vencimento

Existem dois tipos de opções: opção americana e opção européia. Na opção americana, o titular poderá exercer sua opção a qualquer momento pelo preço pré-estabelecido. Na opção européia, o titular só exercerá sua opção na data de vencimento. Com isso, a opção americana pode ser mais valiosa do que a opção européia, pois na data de expiração, ambas devem possuir o mesmo valor. Para identificar o maior valor da opção americana, é necessário decidir qual é a data ótima que o titular deve exercer sua opção.

3.5.1 Analogias entre Opções Financeiras e Opções Reais

As opções reais são vistas como uma extensão das opções financeiras. A principal diferença entre uma opção financeira e uma opção real é que opções reais são aplicadas para ativos reais (ativos não negociados no mercado financeiro).

Dixit e Pindyck (1995) fazem uma analogia das Opções Reais com as Opções Financeiras. Para eles, uma empresa que possui uma oportunidade de investimento, tem o direito e não a obrigação, de comprar um ativo (investir no projeto) no futuro, a um preço de exercício (investimento inicial).

Conforme ocorre nas opções financeiras, o valor das opções reais também depende de seis variáveis básicas (Copeland e Antikarov, 2002).

Serão as mesmas variáveis da opção financeira sob um enfoque diferente.

- **Valor do ativo subjacente sujeito ao risco (S)**: no caso de opções reais, trata-se de um projeto, um investimento ou uma aquisição;
- **O preço do exercício (x)**: é o dinheiro investido para exercer uma opção real no caso da compra de um ativo (opção de compra), ou o dinheiro recebido no caso de estar vendendo um ativo (opção de venda);
- **Prazo de vencimento da opção (T):** é o prazo de expiração da opção;
- **Desvio padrão do retorno do ativo-objeto sujeito ao risco (σ):** O valor de uma opção real aumenta o risco do ativo-objeto.
- **Taxa de juros livre de risco (r):** é a taxa de juros

A Tabela 3.1 apresenta uma comparação das opções reais com as opções financeiras, mediante uma análise de um projeto:

Tabela 3.1 – Comparação das Opções Reais e Opções Financeiras

OpçõesFinanceiras	OpçõesReais
Opção de compra (*call*)	Opção de investor
Valor da ação	Valor presente do projeto
Preço de exercício (K)	Valor presente do Investimento
Tempo Para expiração (τ)	Tempo de expiração
Taxa livre de risco	Taxa livre de risco
Volatilidade da ação	Volatilidade do projeto
Dividendos	Fluxo de caixa do projeto

Fonte: Antikarov e Copeland (2002)

3.6
Processo Estocástico

De acordo com Hull (2006), qualquer variável que passe por mudanças nos seus valores ao longo do tempo, e que ocorra de maneira incerta,segue um processo estocástico.

Esses processos podem se dividir entre discretos e contínuos. No processo estocástico discreto, as variáveis oscilam em determinado instante do tempo. Já no processo contínuo, as variáveis oscilam em qualquer momento ao longo do tempo.

3.6.1
Tipos de Processos Estocásticos

Existem diversos tipos de processos estocásticos para explicar distintos fenômenos. Dentre os principais processos estocásticos utilizados em finanças, pode-se destacar: processo de Markov, *Random Walk,* Wiener. Porém serão apresentados os processos que são fundamentais para este trabalho.

3.6.2
Processo de Markov

Alguns processos estocásticos satisfazem a propriedade de Markov, os quais podem ser chamados de processo Markoviano. Esse processo parte de que o princípio que o mercado é eficiente na sua forma fraca. O preço da ação hoje é suficiente para prever o futuro, pois toda informação necessária está contida no preço atual.

3.6.3
Processo de Wiener

O processo de Wiener, também chamado de movimento Browniano, apresenta as seguintes características:

- É um Processo de Markov em tempo contínuo, pois depende apenas do valor atual para fazer a previsão futura da variável;
- Possui incrementos independentes;
- Os incrementos possuem distribuição normal, dependentes apenas dos parâmetros do intervalo de tempo.

O Movimento Browniano é um processo útil na modelagem de diversos tipos de ativos, porém algumas adaptações são necessárias. Por exemplo, a inclusão de um *drift* para determinar uma tendência. Mais adiante, serão apresentadas essas modificações.

3.6.4
Movimento Aritmético Browniano

O Movimento Aritmético Browniano é caracterizado pela seguinte equação:

$$dx = \alpha.dt + \sigma.dz \tag{3.7}$$

Onde:
α = representa o fator de crescimento ou tendência;
σ = representa o fator de incerteza do processo, que pode ser a volatilidade ou variância;
$dz =$ representa o incremento de wiener $\varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Uma mudança no preço do ativo, em qualquer intervalo de tempo Δ t, possui uma distribuição normal Δx, com média (equação 3.8) e variância (equação 3.9):

$$E(\Delta x) = \alpha\Delta t \tag{3.8}$$

$$Var(\Delta x) = \sigma^2\Delta t \tag{3.9}$$

Esse processo possui limitações, pois o preço do ativo pode assumir valores negativos.

3.6.5
Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano é um caso particular do Processo de Itô[12], normalmente utilizado para modelar ativos financeiros e ativos reais.

[12]O Processo de Itô é também conhecido como Movimento Browniano Generalizado dado pela equação: $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$, em que dz é o incremento de Wiener, os parâmetros a (x, t) e b(x, t) são conhecidos como taxa de crescimento esperado e taxa de variância,são em função do tempo e do estado atual.

Usado tanto no modelo de Black and Scholes (1973) e Merton (1979) quanto no modelo de Paddock, Siegel & Smith (1988), esse processo ganhou espaço devido a sua simplicidade matemática.

Sob a hipótese de um MGB, o preço x de um determinado ativo possui a seguinte equação:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \tag{3.10}$$

Onde:

$\alpha =$ é a tendência ou "*drift*";

σ = é a volatilidade ;

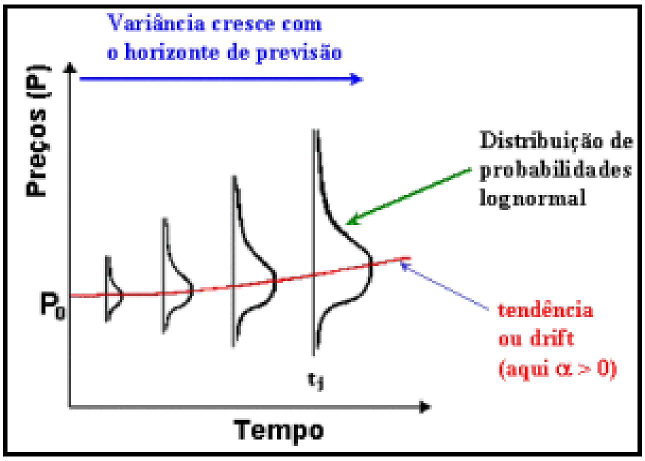
$dz =$ representa o incremento de wiener $\varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Um ativo x, que segue um MGB, tem a seguinte média e variância no período t:

$$E[x_{(t)}] = x_0 e^{\alpha t} \tag{3.11}$$

$$Var[x_{(t)}] = {x_o}^2\, e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \tag{3.12}$$

Vale ressaltar, que no processo MGB, a variância cresce com o horizonte de previsão, pois quando $t \rightarrow \infty$, Var $(x) \rightarrow \infty$. Já a tendência, cresce ou decai exponencialmente, conforme Figura 3.1.



Fonte: Dias (2005)

Figura 3.1 – Processo estocástico MGB

Na simulação de um processo que segue um Movimento Geométrico Browniano é preciso discretizar[13] a equação 3.10, através de uma transformação logarítmica em conjunto com Lema de Itô[14], resultando na seguinte equação:

$$x_{(t)} = x_0\, e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right).\Delta t \,+\, \sigma.N(0,1).\sqrt{\Delta t}\right]} \tag{3.13}$$

Para estimar os parâmetros de um MGB, é preciso calcular o logaritmo do preço $Ln(x_t)$ no instante t, através de uma regressão linear (equação 3.14):

$$Ln(x_t) = a + b.\,Ln(x_{t-1}\ ) + \varepsilon_t \tag{3.14}$$

Com uma sequência de i.i.d[15] $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2/$ N).

O coeficiente de $Ln(x_{t-1})$ da equação acima deve ser igual a 1, para que o processo seja um MGB. Após confirmada essa hipótese, é possível estimar os parâmetros dessa discretização, conforme equação 3.15 e. 3.16.

[13] Para mais detalhes ver http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.htmle o livro de Kloeden e Platen (1992) para equações estocásticas que admitem solução discretizada.

[14] Para calcular derivadas de uma função de F(x) em relação a x é preciso utilizar o Lema de Itô, pois x não é diferenciável. Esse Lema é considerado a melhor versão estocástica da Expansão de Taylor dado pelo seguinte cálculo: $dF = [\frac{dF}{dt} + a(x,t)\frac{dF}{dx} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{d^2F}{dx^2}]dt + b(x,t)\frac{dF}{dx}$ dz.

[15] Sigla de independente e identicamente distribuído

$$\sigma^2 = N.Var\left[ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)\right] \tag{3.15}$$

$$\alpha = N.\left\{média\ \left[ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)\right] + 0.5\frac{\sigma^2}{N}\right\} \tag{3.16}$$

Outra variação do MGB é o neutro ao risco, sob a Medida Equivalente de Martingale ou Medida Q.

Segundo Dias (2011), a medida de probabilidade Q é definida como aquela que faz o retorno total μ do ativo básico ser a taxa livre de risco.

$$\alpha - \pi\ = r - \delta \tag{3.17}$$

Em que α é a taxa de ganho de capital, π é o prêmio de risco, r é a taxa livre de risco e o δ é o *dividend yield.*

Sendo assim, pode-se reescrever a equação 3.18 e encontrar a medida neutra ao risco:

$$dx = (r - \delta)xdt +\ \sigma xdz \tag{3.18}$$

A mudança de medida Q significa que os investidores são indiferentes entre a escolha de um ativo livre de risco ou com risco, ou seja, são neutros ao risco.

O MGB neutro ao risco terá a seguinte média e variância no período t:

$$E\left[x_{(t)}\right] = x_0 e^{(r-\delta)t} \tag{3.19}$$

Estabelecendo:

$$Var\left[x_{(t)}\right] = {x_o}^2 e^{2(r-\delta)t} e^{(\sigma^2 t)-1} \tag{3.20}$$

A equação 3.18 pode ser discretizada substituindo a tendência real α pela tendência neutra ao risco $(r - \delta)$, conforme equação 3.21.

$$x_{(t)} = x_0 \, e^{\left((r-\delta)-\frac{\sigma^2}{2}\right).\Delta t+\sigma.N(0,1).\sqrt{\Delta t}} \tag{3.21}$$

3.6.6
Movimento de Reversão à Média

Embora a grande maioria dos preços dos ativos sejam modelados utilizando o Movimento Geométrico Browniano, em alguns casos a aplicação deste processo não é aconselhada. Quanto mais distante do instante inicial, maior será a incerteza quanto à previsão do preço do ativo. No Modelo de Reversão a Média, o preço dos ativos no curto prazo podem variar aleatoriamente, enquanto no longo prazo os preços tendem a retornar para o nível mais próximo do seu custo marginal de produção, então, para esses casos, utiliza-se um MRM. Dentre os modelos de reversão à média, o mais simples é também conhecido como processo aritmético de *Ornstein-Uhlenbeck*, descrito abaixo:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \tag{3.22}$$

Onde:
η = velocidade da reversão;
$\bar{x}$ = média de longo prazo, ou seja, é o nível que x tende a retornar;
σ = volatilidade;
$dz =$ representa o incremento de wiener $\varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Processos de Reversão à Média são muito usados para modelar os preços de *commodities* e de taxa de juros. Em muitas ocasiões, é necessário combinar dois tipos de processos estocásticos. Como, por exemplo, um MGB com MRM.

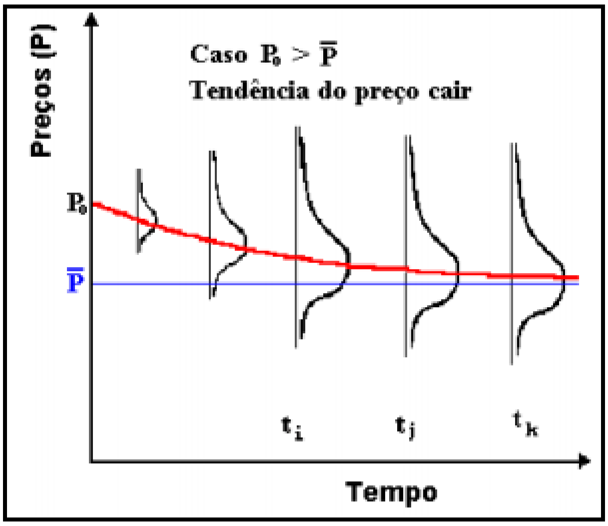
Para Dixit e Pindyck (1994), quando x_t tem distribuição normal, o valor esperado (equação 3.23) e a variância (equação 3.24) podem ser obtidos pela equação diferencial de *Kolmogorov*.

$$E\left[x_{(t)}\right] = x_o.e^{-\eta T} + \bar{x}(1 - e^{-\eta T}) \tag{3.23}$$

$$Var[x_{(t)}] = (1 - e^{-\eta T}).\frac{\sigma^2}{2\eta} \tag{3.24}$$

Neste caso, a variância do Movimento de Reversão à Média aumenta e logo depois estabiliza. Se o tempo tende a infinito, a variância converge para $\frac{\sigma^2}{2\eta}$.

A Figura 3.2 ilustra o Processo de Reversão à Média.



Fonte: Dias (2005)

Figura 3.2 – Processo Estocástico MRM

Para simular um MRM, é preciso discretizá-lo, transformando a equação 3.22 na seguinte representação matemática:

$$x_{(t)} = x_{(t-1)}.\, e^{-\eta\Delta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} \tag{3.25}$$

Como x_t possui uma distribuição normal, aceitam-se assim valores positivos e negativos. Segundo Dias (2011), em muitas aplicações é preciso que a variável estocástica assuma valores positivos, como no preço de *commodities,* e para isso é preciso fazer duas transformações: a primeira é fazer com que $\bar{x} = \ln(x)$ e a segunda é preciso estabelecer uma relação entre P e x, conforme equação 3.26.

$$E(x_t) = e^{\{E(x_t)\}} \qquad (3.26)$$

Para transformar a equação 3.25, essa resolução não funciona para x_t, pois a exponencial de uma distribuição normal adiciona metade da variância na média da distribuição lognormal. Sendo assim, é preciso realizar a seguinte alteração na equação 3.27.

$$x_{(t)} = e^{x_t - \frac{var[x_t]}{2}} \qquad (3.27)$$

Através da junção das equações 3.25, 3.26 e 3.27, é possível encontrar a equação 3.28 discretizada e simular P_t, conforme equação abaixo:

$$x_t = \exp\{[Lnx_{(t-1)} . e^{-\eta\Delta t}] + \left[Ln\bar{x}\left(1 - e^{-\eta\Delta t}\right)\right] - \left[(1 - e^{-2\eta t}).\frac{\sigma^2}{4\eta}\right] + [\,\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}]\mathrm{N}(0,1)\,\} \qquad (3.28)$$

Ao simular um processo MRM neutro ao risco, a equação 3.28 possui o acréscimo do termo $\frac{\mu - r}{\eta}$, conforme abaixo:

$$x_t = \exp\{[\,Lnx_{(t-1)}.e^{-\eta\Delta t}] + \left[[Ln\bar{x} - \frac{\mu-r}{\eta}](1 - e^{-\eta\Delta t})\right] - \left[(1 - e^{-2\eta t}).\frac{\sigma^2}{4\eta}\right] + [\,\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}\,].\,\mathrm{N}(0,1)\} \qquad (3.29)$$

Para estimar os parâmetros de um MRM, é preciso calcular o logaritmo $Ln(x_t)$, através de uma regressão linear, em que o coeficiente deve ser menor do que 1.

$$Ln(x_t) - Ln(x_{t-1}) = a + (b-1).Ln(x_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad (3.30)$$

Após confirmada a hipótese, é possível estimar os parâmetros de um processo MRM. (Dixit & Pindyck, (1994) corrigido por Ross, (1999))

$$\eta = -\,Ln(b).N \qquad (3.31)$$

$$\sigma = \sigma_{\varepsilon}\sqrt{N}\sqrt{\frac{2\,Ln\,b}{b^2 - 1}} \tag{3.32}$$

$$\bar{P} = e^{\left[\frac{(a + 0.5\,\sigma^2\,/\,N}{(1-b)}\right]} \tag{3.33}$$

3.7
Métodos de Apreçamento de Opções Reais

Identificando o processo estocástico do ativo, é necessário aplicar outras técnicas quantitativas na valoração do investimento. Além disso, a aplicação do método depende se é em tempo contínuo ou em tempo discreto.

Para avaliar uma opção em tempo contínuo, utilizam-se o método de ativos contingenciais ou a programação dinâmica[16]. Segundo Dias (2005), para modelar um problema de opções reais, uma das formas é através da equação diferencial parcial da opção real e suas condições de contorno. Nesse caso, as ferramentas necessárias para a modelagem são: o Lema de Itô, o qual permite escrever as relações entre a variável de interesse e as variáveis de estado, a programação dinâmica, utilizada por Dixit e Pindyck (1994) em mercados incompletos, e os ativos contingenciais utilizada em mercados completos. Em alguns casos, a equação diferencial não possui solução analítica, portanto é necessário utilizar aproximações ou simulações.

Em relação à avaliação de uma opção em tempo discreto, não é necessário utilizar equações diferencias parciais, pois a modelagem é resolvida através da aproximação do processo estocástico usando o Método Binomial. Copeland e Antikarov (2002) sugerem a utilização de quatro métodos para determinar o valor de uma opção, dentre eles está a utilização da Simulação de Monte Carlo.

[16]A Programação Dinâmica é um método utilizado para valorar ativos não replicáveis.

3.7.1
Contingent Claims

Esse método é utilizado na avaliação de ativos replicáveis. Segundo Dixit e Pindyck (1994), o que determina o valor de um projeto de investimento é o seu fluxo de caixa futuro. Portanto a empresa, ao investir num determinado projeto, possuirá os fluxos e também terá um ativo que possuirá um valor. Com isso, mesmo que esse ativo não seja negociado no mercado, pode-se comparar seu valor com aqueles negociados no mercado financeiro. Desta forma, a solução encontra-se na montagem de um portfólio de ativos negociados no mercado, que seja apropriado para replicar os retornos do projeto analisado no futuro. O projeto de investimento deve ter valor idêntico ao do portfólio de ativos encontrados no mercado financeiro, pois ambos devem apresentar o mesmo retorno, caso contrário apresentariam ganhos de arbitragem. Sendo assim, esse modelo é usado para mercados completos[17], ou seja, quando o número de ativos financeiros linearmente independentes é igual ao número de estados da natureza. (Dias, 2011)

Dixit e Pindyck (1994) criam um portfólio replicante em que a escolha adequada de n o torna livre de risco. Considerando que V segue um Movimento Geométrico Browniano.

$$\emptyset = F - nV \tag{3.34}$$

Onde:

F_t = Opção de Espera;

V_t = valor do projeto;

n = delta hedge.

[17]Em um mercado completo, o preço de qualquer ativo (ou projeto) pode ser obtido através da criação de uma carteira que reproduza o padrão de risco e retorno do ativo (também chamado de portfólio replicante); caso contrário, apresentariam ganhos de arbitragem. No mundo real, o mercado é incompleto para a grande maioria dos projetos existentes, isto é, não é possível criar um portfólio que replique exatamente os riscos do projeto. Neste caso, não é possível utilizar a avaliação neutra ao risco e, portanto, é sugerido utilizar uma taxa exógena.

Compra-se uma opção de investimento F e vende-se n unidades do ativo V da forma que n torne esse portfólio livre de risco. O retorno esperado dessa carteira é a taxa livre de risco, admitindo-se que o investidor é avesso ao risco.

A composição da carteira é dinâmica, pois F varia de acordo com os valores de V no decorrer do tempo.

Em um intervalo infinitesimal de dt o retorno exigido pela carteira será:

$$r\emptyset dt = r(F - nV)\mathrm{dt} \tag{3.35}$$

O retorno do valor do projeto em dt é a soma do capital de dv mais os dividendos $\delta V dt$. Sendo assim, o retorno da carteira será:

$$r\emptyset dt = dF - n(dV + \delta V dt) \tag{3.36}$$

Ao aplicar o Lema de Itô para expandir dF, tem-se:

$$dF = F_V \; dV + \frac{1}{2} F_{VV}(dV)^2 + F_t dt \tag{3.37}$$

Substituindo $(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$ e $dF = r(F - nV)dt$ e eliminado o termo estocástico dV, encontra-se a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)V F_V - rF = -F_t \tag{3.38}$$

A equação diferencial parcial acima é conhecida como EDP de Black & Scholes & Merton (1979). Nessa equação, assume-se que existe a medida equivalente de Martingale ou medida Q, a qual permite obter preços livres de arbitragem.

Para resolvê-la, utilizam-se condições de contorno, os quais determinam o tipo de opção (*call* ou *put*). Para o resultado do payoff, tem-se:

Para $V = 0, \; F(0, t) = 0$

Para $t = T, \; F(V, t) = máx[V - I, 0]$

Condições de Continuidade:

$$F(V^*, t) \ = \ V^* - I \tag{3.39}$$

Condições de Contato Suave:

$$F_V(V^*,\mathrm{t}) = 1 \tag{3.40}$$

Neste caso, é uma opção de compra americana, que expira em T. No valor crítico ou gatilho (V*) é ótimo exercer a opção. As condições de continuidade e suavidade são as condições de contorno ótimas para exercício antecipado de F.

As equações diferenciais parciais podem ser resolvidas de forma analítica ou numéricas. Para resolver a EDP de forma analítica, é preciso remover o componente tempo ($F_t = 0$), transformado-o em equação diferencial ordinária (EDO), conforme a equação 3.41.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)VF_V \text{-} \ rF = 0 \tag{3.41}$$

Ao eliminar o componente tempo, considera-se a oportunidade de investimento perpétuo. Existem diversas aproximações analíticas. A mais usual é Bjerksund & Steland (1993), a qual será utilizada nessa dissertação.

Ao resolver as condições de contorno da equação 3.41 encontra-se a seguinte solução para o valor da opção Fe o valor do gatilho V^*:

$$F = AV^{\beta 1} \tag{3.42}$$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \tag{3.43}$$

Ao substituir a equação 3.42 na equação 3.41, tem-se a seguinte equação quadrática:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\,\beta(\beta-1)+(r-\delta)\beta-r=0 \tag{3.44}$$

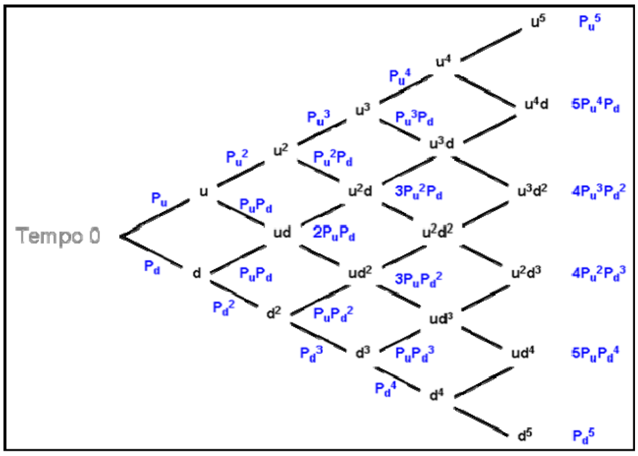
Os valores de β e A são os seguintes:

$$\beta=\frac{1}{2}-\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}+\sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}} \tag{3.45}$$

$$A=\frac{(V^*-I)}{(V^*)^{\beta_1}} \tag{3.46}$$

3.7.2
Método Binomial

De acordo com Dias (2011), o Método Binomial, desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein (1979), é uma aproximação discreta do processo estocástico contínuo usado por Black & Scholes (1973) e Merton (1979), pois este método converge para uma lognormal quando o intervalo de tempo se aproxima de zero e o número de passos se aproxima do infinito. Essa ferramenta baseia-se na construção de uma árvore de eventos binomiais, os quais representam os valores futuros do projeto.



Fonte: Elaboração Própria

Figura 3.3 – Árvore Binomial de Eventos

A Figura acima apresenta uma árvore binomial que vai do tempo zero ao tempo cinco em que o preço do projeto (P) sobe com o fator u e desce com o fator d, com probabilidade q e $(1-q)$.

Esses mesmos fatores u e d devem ser escolhidos de forma que não gerem oportunidades de arbitragem, portanto utiliza-se a taxa livre de risco r, em que o método impõe a seguinte restrição:

$$d < 1 + r < u \tag{3.47}$$

Para encontrar o valor da opção, o método binomial calcula os chamados nós terminais a fim de determinar se é ótimo exercer ou não a opção. Esse processo é conhecido como *backwards*, pois calcula primeiro os valores futuros até chegar em $t = 0$.

Para que exista convergência, no limite, quando n tende ao infinito, os parâmetros u e d devem ser:

$$d = \frac{1}{u} \tag{3.48}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{3.49}$$

$$p = \frac{1 + r - d}{u - d} \tag{3.50}$$

Onde:

σ = desvio-padrão instantâneo do retorno do ativo;

Δt = é o incremento de tempo.

O fator ascendente u (*upside*) é dado pela equação 3.49, o qual representa a volatilidade do ativo subjacente sujeito ao risco, enquanto o fator descendente d (*downside*) é dado pela equação 3.48. Cada nó da árvore é alcançado com certa probabilidade, que corresponde à probabilidade neutra ao risco, que é representada respectivamente pela equação 3.50, onde r representa a taxa livre de risco.

De acordo com Dias (2011), uma outra maneira de calcular a probabilidade neutra ao risco, porém inserindo os dividendos δ, é através da seguinte equação:

$$p = \frac{e^{(r-\delta)} - d}{u - d} \qquad (3.51)$$

3.7.3
Avaliações por Simulação de Monte Carlo

Em muitos casos, não é possível obter uma solução através de um modelo matemático devido a sua complexibilidade, ou porque não exista uma solução analítica. Logo, a simulação tem grande utilidade para problemas mais complexos.

A Simulação de Monte Carlo (SMC) é um método de simulação estatística, uma vez que utiliza números aleatórios para simular possíveis cenários.[18]

A SMC gera um processo físico para descrever o comportamento do sistema sem utilizar equações diferenciais. No entanto, é necessário que o processo possua uma distribuição de probabilidade conhecida. Uma vez determinada a distribuição, o método realizará as simulações gerando amostras aleatórias. A partir de um determinado número de simulações é alcançado o resultado desejado calculando os parâmetros de interesse.

A Simulação de Monte Carlo gera números aleatórios de forma contínua com o intuito de simular vários cenários prováveis. Cada nova geração de valores é inserida na distribuição de probabilidade, o que permite a avaliação de ocorrência de cada evento, através de medidas estatísticas. O procedimento para geração de dados é repetido quantas vezes forem necessárias. Quanto maior o número de iterações, mais se aproximará de uma distribuição normal.

[18] O nome “Monte Carlo” foi escolhido por S. Metropolis e N. Ulam durante um projeto realizado em Manhattan na Segunda Guerra Mundial devido à semelhança dos jogos de azar em Mônaco.

3.7.4
Avaliação através do MAD original e do MAD modificado

Ao analisar uma opção real, a grande dificuldade consiste em encontrar no mercado um ativo que replique os valores do projeto analisado, ou seja, encontrar um ativo perfeitamente correlacionado ativo gêmeo. De acordo com Copeland e Antikarov (2002), o valor presente dos fluxos de caixa do projeto sem flexibilidade, isto é o VPL tradicional, é a melhor estimativa não tendenciosa do valor de mercado do projeto; essa técnica é chamada de *Market Asset Disclaimer* (MAD). Segundo os autores, não há nada mais correlacionado com o projeto que o próprio projeto.

Copeland e Antikarov (2002) dividem o método MAD em quatro passos, conforme abaixo:

O primeiro passo consiste em calcular o VPL (valor presente líquido) sem flexibilidade. O fluxo de caixa do projeto será descontado pela taxa de desconto ajustado ao risco utilizando técnicas tradicionais.

O segundo passo é modelar as incertezas do projeto através de dados históricos utilizando a Simulação de Monte Carlo. Através da simulação, é possível encontrar a volatilidade agregada do projeto e montar a árvore binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979), descrita no item 3.8.2. Esse método assume que o fluxo de caixa do projeto segue um passeio aleatório, independente do processo estocástico o qual pertençam as variáveis envolvidas, conforme o Teorema de Samuelson (1965).

No terceiro passo, determinam-se as decisões gerenciais a serem tomadas nos nós das árvores de eventos. Já no último passo, calcula-se a opção real do projeto que é feito *backwards* ou por Programação Dinâmica.

Em suma, o método MAD calcula o retorno do valor de um projeto sem utilizar um ativo semelhante no mercado, simplificando e escolhendo uma maneira alternativa de calcular a volatilidade do ativo através da Simulação de Monte Carlo.

Porém algumas alterações foram recomendadas por Dias (2011) no MAD original. Devido a essas alterações, o MAD original ficou conhecido como MAD modificado. De acordo com as mudanças sugeridas por esse autor, o cálculo da volatilidade do processo estocástico deve ser realizado apenas no primeiro ano de operação do projeto, diferentemente de Copeland e Antikarov (2002), que sugerem simulações de processos estocásticos considerando todos os anos do projeto, resultando em altas volatilidades.

Após a simulação do processo estocástico no instante $t = 1$, os valores dos próximos períodos do projeto serão calculados em função dos valores simulados neste instante1.

A segunda modificação sugerida por Dias (2011) para o cálculo da volatilidade agregada consiste na simulação da variância do projeto (distribuição logaritmo de V) e não a variância dos retornos usadas por Copeland e Antikarov (2002). Assim, evitam-se problemas computacionais devido à ausência de cenários com valores negativos do projeto, ou seja, evita-se trabalhar com logarítmo de números negativos.