4
Métricas de Risco: metodologia e aplicação

4.1
VaR

Antes da apresentação do VaR é preciso que seja definido o que esta metodologia considera como risco. A teoria de finanças (Jorion, 2003) o define como “a dispersão de resultados inesperados, devido a oscilações nas variáveis financeiras”. Matematicamente, corresponde ao desvio-padrão dos retornos do ativo.

No entanto, quando se utiliza o VaR, a grande preocupação não está nos ganhos extraordinários que os riscos podem trazer à carteira, mas nas perdas potenciais. Jorion (2003) define o VaR de duas formas. Na primeira delas, intuitiva, o VaR sintetiza a maior (ou pior) perda esperada para um dado período de tempo e intervalo de confiança”. Na segunda definição, formal, o VaR é descrito como o percentil da distribuição de retornos projetados para um horizonte estipulado. Se *c* for o nível de confiança selecionado, o VaR corresponde ao *(1-c)* percentil da distribuição.

Tomando como exemplo o retorno esperado de contratos futuros de WTI (Gráfico 25), pode-se encontrar o percentil 5 dos retornos se estes forem organizados pela frequência (Gráfico 26). Este percentil representa o retorno mínimo esperado em um intervalo de confiança de 95% ou então ao VaR.

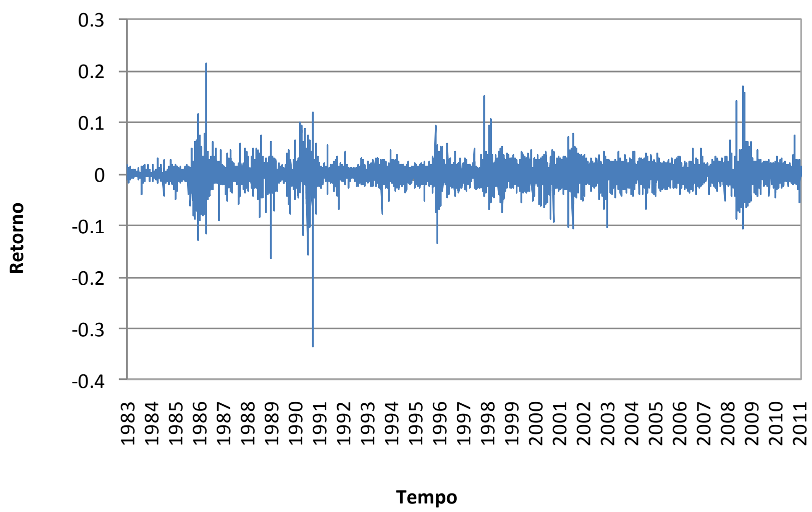

Gráfico 25 - Retorno do preço de WTI

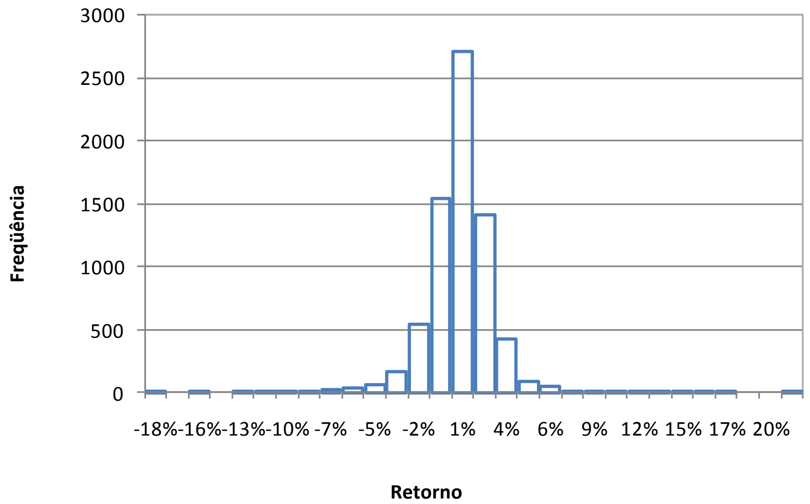

Gráfico 26 - Histgrama de retornos esperados de WTI

Este, no entanto, é o VaR para apenas um contrato. Para que ele seja aplicável a um *portfolio*, é preciso capturar o efeito combinado da volatilidade com a exposição. E se o primeiro é determinado pelo mercado, o segundo é gerenciável, tendo o gestor liberdade para agir e, desta forma, ajustar o risco de sua carteira. Esta gestão ativa se torna mais relevante com o aumento da volatilidade nos mercados mundiais.

O cálculo do VaR pode ser classificado em dois grupos. O primeiro baseia-se na avaliação local, que mede o risco e a posição inicial da carteira utilizando derivadas locais para inferir possíveis movimentos da carteira. O segundo utiliza a chamada avaliação plena, que para medir o risco avalia novamente a carteira por inteiro para uma gama de cenários. Esta classificação reflete o *trade-off* entre velocidade e precisão.

A avaliação local possui um cálculo mais simples e isto gera grandes vantagens em termo de velocidade, principalmente na mensuração de risco de carteiras compostas por muitos fatores de risco e que, por esta razão exigem cálculo de grande número de correlações. Mas à simplicidade estão associadas simplificações e, no caso de carteiras com componentes não-lineares, a precisão pode deixar a desejar.

4.2 Metodologias amplamente difundidas

4.2.1 Avaliação Plena ou *Full Monte Carlo*

A avaliação plena via simulação de Monte Carlo envolve um elevado número de simulações de cenários, com reavaliação do valor do *portfolio* para cada um desses cenários de acordo com o modelo de apreçamento específico. No caso deste trabalho, isto significa aplicar a fórmula de Black para cada um dos cenários. O VaR é definido como o percentil 5 da distribuição de valores calculados para o *portfolio*.

A avaliação plena gera valores mais precisos que a abordagem delta-normal ou delta-gamma-normal e esta diferença de precisão pode ser bem relevante nos casos de carteiras não-lineares.

Enquanto a avaliação local, que será discutida no tópico 4.2.2, utiliza premissas de linearidade, a avaliação plena considera todas as propriedades do comportamento da carteira, isto é, todos os fatores de risco que impactam o valor das opções, a saber: preço do ativo base, volatilidade e taxa de juros, e desta forma inclui em seu cálculo as não-linearidades.

O Gráfico 27 ilustra o comportamento da carteira de acordo com o princípio de não-linearidade.

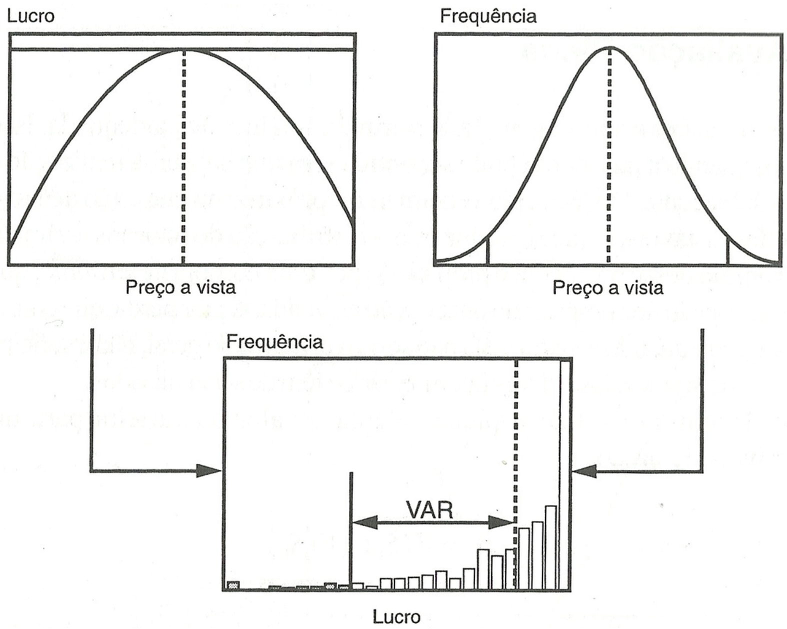

Gráfico 27 - Distribuição segundo premissas de não-linearidade (Fonte: Jorion 2003)

Nesta abordagem, é feito o cálculo do valor da carteira para um espectro grande de níveis de preço S_1 obtidos por simulação de Monte Carlo e o VaR é calculado a partir dos percentis da distribuição dos retornos.

Para cada valor de S_1 a carteira é reavaliada e a perda potencial é expressa pela equação 30.

$$dV = \mathrm{V}(\mathrm{S}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{S}_0) \qquad (30)$$

Esta é considerada a métrica de melhor acurácia, mas a grande crítica feita à mesma está na sua demanda elevada por recursos computacionais ao exigir a marcação a mercado da carteira para um grande número de variáveis aleatórias simuladas.

A simulação de cada um dos fatores de risco é discutida a seguir.

4.2.1.1 Simulação de preço

A simulação do preço considera que, no curto prazo, o preço do contrato futuro de petróleo segue um movimento geométrico, descrito no item 3.2.

4.2.1.2 Simulação de volatilidade

Há duas possíveis previsões de volatilidade previstas no *RiskMetrics*. A primeira se baseia na série histórica de preços do ativo base, enquanto a outra utiliza o preço das próprias opções, isto é, a volatilidade implícita.

Do ponto de vista teórico, o uso da volatilidade implícita pode introduzir uma série de problemas. O primeiro deles é que a volatilidade implícita é decorrente das expectativas de mercado dado um modelo específico de apreçamento de opções. Destes modelos, os mais difundidos e utilizados são Black-Scholes e Black e ambos tem como premissa a volatilidade constante, de forma que a interpretação da volatilidade implícita pode se tornar de difícil explicação e a acurácia de seu uso em previsões de volatilidade pode ser questionável.

Outro ponto de atenção levantado no *RiskMetrics* sobre o uso da volatilidade implícita em modelos de previsão se refere à dificuldade de obtenção de séries históricas confiáveis de volatilidade implícita, muitas vezes restritas a opções negociadas em bolsas e, ainda assim, sujeitas à liquidez em suas negociações.

Este segundo ponto não foi considerado relevante para o presente estudo, já que os *portfolios* analisados são constituídos somente por opções de WTI, com elevada liquidez e disponibilidade de dados.

Apesar de conceitualmente questionável, como apresentado no *RiskMetrics*, pesquisas acadêmicas que realizaram a comparação da capacidade de previsão das volatilidades histórica e implícita não chegaram a um veredito final à favor da volatilidade histórica. Kroner, Kneafsey e Claessens (1995) concluíram que previsões baseadas em volatilidade histórica do preço do ativo base eram melhores que as que baseadas em dados implícitos. Xu e Taylor (1995), porém, chegaram à conclusão oposta de que previsões baseadas nos preços das opções superavam aquelas que utilizavam série de preços do ativo base.

Diante desta inconclusividade acadêmica sobre o melhor parâmetro para previsão da volatilidade, utiliza-se a premissa de que, diante da disponibilidade de dados, é indiferente o uso da volatilidade histórica ou da implícita.

Superados os questionamentos teóricos, passa-se aos métodos de previsão, que podem ser dois: média móvel exponencial ou simulação via movimento geométrico browniano.

Média móvel exponencial

A média móvel exponencial associa pesos maiores às informações mais recentes, o que permite um reflexo mais rápido de choques de volatilidade que o método de médias móveis tradicional.

A média móvel exponencial pode ser escrita de forma recursiva como apresentado na equação 31 a seguir.

$$\sigma^2_{1,t+1\text{I}t} = \lambda\sigma^2_{1,t+1\text{I}t-1} + (1-\lambda)r^2_{1,t} \tag{31}$$

O *RiskMetrics* indica o uso de um fator de decaimento (λ) de 0.94 para o caso de operações de trading e 0.97 para operações de investimento.

Movimento Geométrico Browniano

Uma outra estimação de volatilidade proposta pelo *RiskMetrics* assume que o retorno das volatilidades implícitas segue um passeio aleatório com média zero. O que equivale a dizer, neste caso, que a volatilidade implícita segue um MGB com tendência (ou *drift*) zero. O MGB já foi discutido no item 3.2.

Para tal, sugere-se o uso de série histórica de 2 anos.

4.2.1.3 Simulação de taxa de juros

Para uma efetiva avaliação plena, seria necessária a simulação de preços, volatilidade e taxa de juros. O esforço computacional de simulação da taxa de juros, no entanto, não será utilizado neste estudo devido ao baixo impacto deste fator no preço de opções de futuro e, em especial, para opções com curto prazo para expiração, como será demonstrado a seguir.

Tome-se como referência a LIBOR[11] de 3 meses. Nos últimos 10 anos esta taxa variou entre 0.245% e 5.725%, como apresentado na Tabela 1. Em um período de 1 ano, ela apresentou variação máxima de 3.39% (ano de 2008).

[11] LIBOR é a sigla para *London Interbank Offered Rates*, ou, em português taxa interbancária Londrina. A taxa de juros LIBOR de 3 meses em dólares Americanos corresponde à taxa media contra a qual um grupo representativo de bancos em Londres concedem empréstimos mútuos em dólares americanos com uma duração de 3 meses. A LIBOR é considerada um dos mais importantes referenciais mundiais de taxas de juros de curto-prazo, incluindo o apreçamento de futuros, *swaps* e opções.

Tabela 1 - LIBOR 3 meses em dólares americanos (Fonte: GlobalRates.com)

Ano	Máxima	Mínima	Média
2012	0.582%	0.474%	0.521%
2011	0.581%	0.245%	0.337%
2010	0.539%	0.249%	0.344%
2009	1.421%	0.249%	0.675%
2008	4.819%	1.425%	2.929%
2007	5.725%	4.702%	5.297%
2006	5.520%	4.541%	5.198%
2005	4.536%	2.570%	3.568%
2004	2.564%	1.110%	1.623%
2003	1.390%	1.000%	1.214%
2002	2.047%	1.395%	1.801%

Da fórmula de rho pode-se concluir que o impacto da taxa de juros está relacionado somente ao tempo para expiração, não sofrendo influência da volatilidade ou do *moneyness* da opção.

Utilizando como exemplo uma *call* de WTI com as seguintes características:

- *Strike*: 100
- Futuro: 100
- Prazo para expiração: 22 dias úteis
- Taxa de juros: 0.25%

Se a taxa de juros sofrer uma variação de 3.39%, o que é extremamente conservador dado que este estudo se propõe a calcular o VaR de 1 dia, o prêmio sofrerá uma variação de apenas 0.299%.

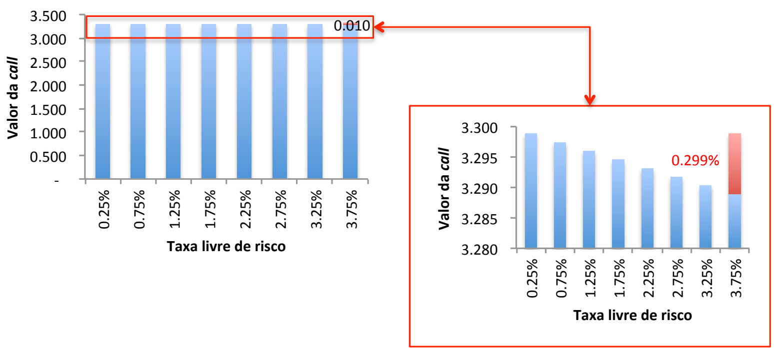

Gráfico 28 - Sensibilidade de *call* de WTI à taxa de juros

A Tabela 2 apresenta uma análise genérica do impacto da variação da taxa de juros no prêmio de opções de futuro (fórmula de Black) de diferentes prazos para expiração. Percebe-se que para opções de 1 mês, o impacto é bem baixo, o que retifica a não necessidade de simulação deste fator de risco para este trabalho. No entanto, em estudos que envolvam *portfolios* que contenham opções com prazos mais longos até o vencimento pode ser necessário reavaliar esta premissa.

Tabela 2 - Sensibilidade de opções de futuro à taxa de juros

	Prazo para expiração			
Taxa de juros	**2 semanas**	**1 mês**	**2 meses**	**6 meses**
0.25%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
0.75%	0.020%	0.043%	0.087%	0.248%
1.25%	0.039%	0.087%	0.173%	0.495%
1.75%	0.059%	0.130%	0.259%	0.740%
2.25%	0.078%	0.172%	0.344%	0.983%
2.75%	0.098%	0.215%	0.429%	1.224%
3.25%	0.117%	0.257%	0.514%	1.463%
3.75%	0.136%	0.299%	0.597%	1.701%
4.25%	0.155%	0.341%	0.681%	1.937%
4.75%	0.174%	0.383%	0.764%	2.172%
5.25%	0.193%	0.424%	0.846%	2.404%
5.75%	0.212%	0.465%	0.928%	2.635%

4.2.1.4 Simulação correlacionada preço x volatilidade

Neste trabalho optou-se por utilizar o mesmo processo de simulação para os dois fatores: movimento geométrico browniano com utilização da série histórica da volatilidade implícita. A simulação deve ser realizada de forma correlacionada através da utilização da matriz de Cholesky.

A matriz de Cholesky é uma matriz triangular *G* definida da seguinte forma:

$$A = G \cdot G^T$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & g_{22} & 0 \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \vdots \\ 0 & 0 & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Onde A é a matriz de correlação.

Para que os dois processos sejam correlacionados, o vetor de termos aleatórios utilizado no processo de simulação será, na verdade, um vetor de termos aleatórios multiplicado pela matriz de Cholesky.

4.2.2
Avaliação Local: Delta-VaR

A avaliação local mais conhecida e utilizada é a delta-normal, que tem como primeira hipótese a normalidade dos fatores de risco. A normalidade dos fatores de risco confere à carteira a mesma característica de normalidade.

A metodologia de Delta-VaR do *RiskMetrics* corresponde a uma fórmula analítica que aproxima a relação linear através de uma expressão matemática que relaciona o retorno do *portfolio* ao retorno de seu ativo base, utilizando como base a expansão de Taylor.

Os cálculos analíticos não pressupõem obrigatoriamente que o valor do *portfolio* dependerá somente da derivada de primeira ordem em relação ao preço (delta), apesar desta ser a mais conhecida dentre as metodologias.

Na avaliação delta-normal trabalha-se com a primeira derivada do premio da opção em relação ao preço do ativo base. Considerando um instrumento cujo valor dependa exclusivamente de um fator de risco, ao qual chamaremos *S*, os seguintes passos são realizados:

1º. Avalia-se a posição inicial da carteira ou marcação à mercado: $V_0 = V(S_0)$

2º. Define-se Δ_0 como a primeira derivada na posição inicial V_0. Esta derivada corresponde à sensibilidade do valor da carteira a mudanças no preço do ativo. No caso de uma carteira de derivativos, corresponde ao delta.

3º. Calcula-se a perda potencial dV da seguinte forma: $dV = \Delta_0 \cdot dS$, onde dS corresponde à mudança potencial no preço.

4º. Como a relação é linear entre V e S, a pior perda para V é atingida no valor extremo de S. Pela suposição de normalidade podemos dizer que

$$VaR = |\Delta_0| \cdot VaR_S = |\Delta_0| \cdot (\alpha\sigma S_0) \qquad (32)$$

onde α é o desvio padrão da normal padrão que corresponde ao nível de confiança desejado e σ é o desvio-padrão dos retornos dos preços do ativo base.

O método de análise local aqui apresentado é também classificado como método analítico, dado que o VaR foi calculado somente uma vez baseado na marcação a mercado da carteira V_0.

O Gráfico 29 possibilita melhor compreensão das premissas citadas e o impacto das mesmas no resultado do VaR obtido. A linearidade do valor da carteira em relação ao preço do ativo objeto combinada à normalidade da distribuição dos preços, gera uma distribuição normal do valor da carteira para mensuração do VaR. Logo, se a carteira não é linear, estaremos incorrendo em um erro de aproximação.

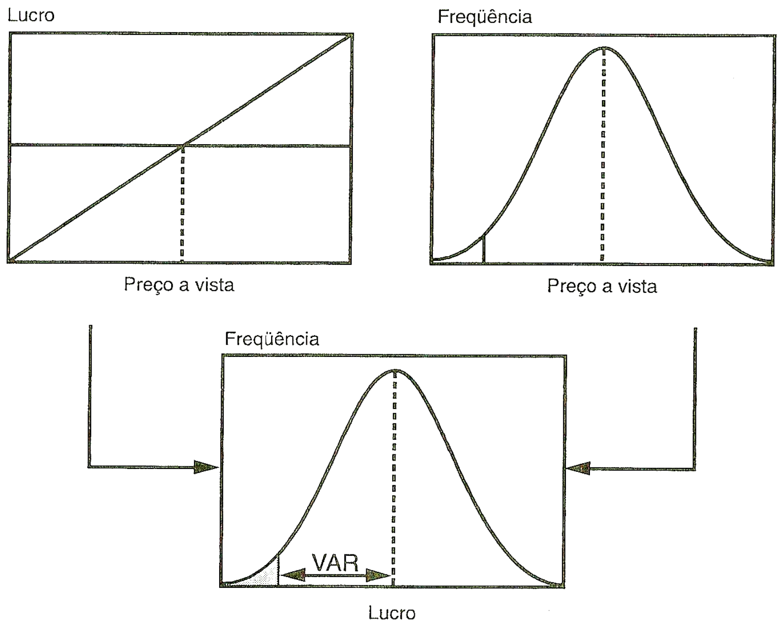

Gráfico 29 - Distribuição segundo premissas de linearidade e normalidade do delta-VaR (Fonte: Jorion 2003)

4.2.3
Delta-Gamma-VaR

O Delta-gamma VaR considera, assim como o Delta-VaR, que os retornos dos ativos são normalmente distribuídos, mas permitem que seja estabelecida uma relação não-linear entre o valor do *portfolio* e seu ativo base. Ou seja, considera que o *portfolio* possa também variar pelo efeito da segunda derivada em relação ao preço: o gamma.

Busca-se o aprimoramento da qualidade da aproximação linear desta abordagem analítica ao serem adicionados termos de ordem superior à série de

Taylor, adequando-a à mensuração de carteiras não-lineares a movimentos não-marginais no preço do ativo base.

Pela aproximação delta-gamma-normal a perda potencial seria expressa pela equação 33.

$$dV = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 \tag{33}$$

onde Γ é a segunda derivada do valor da carteira em relação ao preço (gamma).

O VaR seria, então, expresso por:

$$VaR = |\Delta|(\alpha\sigma S) - \frac{1}{2}\Gamma(\alpha\sigma S)^2 \tag{34}$$

4.3
Novas metodologias propostas

Cientes de que os métodos de cálculo de VaR que utilizam aproximações lineares para a relação entre o valor do derivativo e seu ativo base dificilmente apresentarão resultados robustos para os *portfolios* com comportamentos não lineares e diante da elevada demanda por recursos computacionais do *full* Monte-Carlo, algumas novas abordagens têm sido apresentadas no meio acadêmico.

A seguir serão apresentadas de forma breve 5 metodologias. As três primeiras serão aplicadas, enquanto as duas últimas serão apresentadas a título de informação por apresentarem apresentam alguma evolução interessante em relação às em atual uso, mas ainda requererem aprimoramentos para que sejam aplicadas.

As três primeiras apresentadas partem do mesmo princípio da metologia do delta-VaR e delta-gamma-VaR propostas pelo *RiskMetrics* (1996) e buscam aumentar sua precisão através da inclusão de outros fatores de risco. A primeira delas apresenta uma metodologia delta-gamma linear quadrática, proposta por Britten-Jones e Schaefer (1999). A segunda, baseada na metologia proposta por Breda (2008) e Malz (2001) inclui um fator vega-risk de forma a capturar o risco decorrente das variações na volatilidade. A terceira, e última, inclui derivadas de ordens superiores da fórmula de Black e investiga se há alguma outra grega relevante para a análise de risco.

As demais metodologias apresentadas são *Capital-at-Risk* e o MVaR.

4.3.1
Modelo quadrático Delta-Gamma VaR

Mark Britten-Jones & Stephen M. Schaefer (1999) apresentam uma alternativa que utiliza a aproximação quadrática para explicar a relação entre o valor do *portfolio* e seus fatores de risco.

A alternativa proposta neste paper é muito parecida com o Delta-Gamma VaR tradicional e considera que a variação no valor de um ativo não é uma função linear de seu ativo base, mas uma função linear-quadrática. A inclusão do termo quadrático na aproximação de ΔV (variação no valor do ativo) significa considerar o gamma e não somente o delta das opções. Os autores afirmam que o modelo é linear-quadrático porque é quadrático nos fatores, mas linear no tempo, já que só foi incluído o termo de primeira ordem do tempo. A justificativa para isto é que, na maioria dos casos, a passagem do tempo por si só não costuma resultar em grandes variações de valores.

Assumir que o *portfolio* é quadrático parece satisfatório o suficiente, dado que a maior parte da não linearidade da maioria dos contratos derivativos é bem aproximada quadraticamente e esta característica é mantida no *portfolio*.

Para o caso univariado, ou seja, de um *portfolio* composto por *n* ativos que possuem um único ativo base, a aproximação quadrática de ΔV é denominada $\Delta^{\gamma} v_i$, de forma que a variação no valor do i-ésimo ativo será

$$\Delta^{\gamma} v_i = \mu_i + \delta_i \Delta f + \frac{1}{2} \gamma_i (\Delta f)^2 \qquad (35)$$

onde

- $\mu_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t$, ou seja, captura o efeito de primeira ordem da variação de valor devido à passagem de tempo,
- δ_i corresponde ao delta e,
- γ_i corresponde ao gamma.

Para chegar à variação do *portfolio*, theta, delta e gamma do *portfolio* corresponderão ao somatório de thetas, gammas e deltas individuais ponderados pela participação de cada ativo no *portfolio*.

É tido como premissa que os ativos bases são normalmente distribuídos e, isto resulta em termos lineares em Δf com distribuições normais e o termo quadrático com distribuição qui-quadrada não centralizada e não podemos simplesmente somar estas duas distribuições. Este problema é solucionado completando o quadrado na equação e obtendo desta forma a equação 36.

$$\Delta^{\gamma} V = \mu_p^* + \frac{1}{2}\gamma(e + \Delta f)^2 \qquad (36)$$

onde

$e = \frac{\delta}{\gamma}$ e $\mu_p^* = \mu_p - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\gamma}$

Uma vez que Δf é normalmente distribuído, $(e + \Delta f)$ também o é, sendo sua média $(e + \mu_f)$ e variância (σ_f^2). Por esta aproximação delta-gamma, o VaR do *portfolio* pode ser calculado diretamente da função de distribuição acumulada da distribuição qui-quadrada não centralizada definida na equação 37.

$$\frac{\Delta^{\gamma} V - \mu_p^*}{\gamma\sigma_f^2 / 2} = \left(\frac{e + \Delta f}{\sigma_f}\right)^2 \equiv w \sim \text{non} - \text{central}\ \mathcal{X}^2 : \upsilon, d \qquad (37)$$

Os autores concluem que o modelo linear quadrático tem uma melhor resposta conforme aumenta o gamma do *portfolio* quando comparado ao delta-VaR tradicional, sendo (i) provavelmente melhor que o método linear na avaliação de *portfolios* que contém ativos não lineares, (ii) exigindo menos computacionalmente que o método de avaliação completa e (iii) operando nas características do *portfolio* (delta e gamma) e não nos instrumentos individualmente, à semelhança do delta-VaR.

Wiener (1999) faz uma crítica a este método pelo fato do ativo ter comportamento estocástico e, por esta razão, não pode ser aplicado à ele a expansão de Taylor, sendo necessário fazer uso do Lema de Itô. Wiener destaca, porém, o grande mérito dos autores em chegar a uma fórmula analítica para a distribuição final, que é uma qui-quadrado não centralizada. E uma vez conhecida a distribuição, basta aplicar a fórmula analitica desenvolvida pelos autores para calcular o quantil inferior.

Outra restrição deste cálculo é que as diferenciais de terceira e quarta ordens do valor do *portfolio* em relação à variação no valor do ativo base deve ser zero. E, além disso, o método funciona para funções suaves de preço.

4.3.2
Vega-VaR

O método aqui descrito foi proposto inicialmente por Malz (2001), no qual há a proposta de incorporação do Vega-Risk ao VaR, à semelhança do que é feito no Delta ou no Delta-Gamma VaR, dado que o risco associado à volatilidade pode constituir uma parcela relevante do risco de um *portfolio* que contém opções.

É preciso destacar que os *portfolios* que contêm opções estão expostos não somente a variações no nível da volatilidade implícita, mas também à alterações em sua curvatura (*smile*) e na estrutura a termo. Para tal é interessante que estes termos estejam bem definidos.

Smile: O *smile* de volatilidade descreve a forma característica do lugar geométrico dos pontos que relacionam a volatilidade implícita ao preço de exercício. Opões OTM e ITM geralmente possuem volatilidades superiores às ATM.

Estrutura a termo: A estrutura a termo da volatilidade implícita descreve o padrão das opções com mesmo preço de exercício e maturidades diferentes, que geralmente possuem, também, volatilidades implícitas diferentes.

A combinação do *smile* à estrutura e termo da volatilidade gera o que é denominado superfície de volatilidade. O Gráfico 30 apresenta a superfície para os opções de WTI em agosto de 2011.

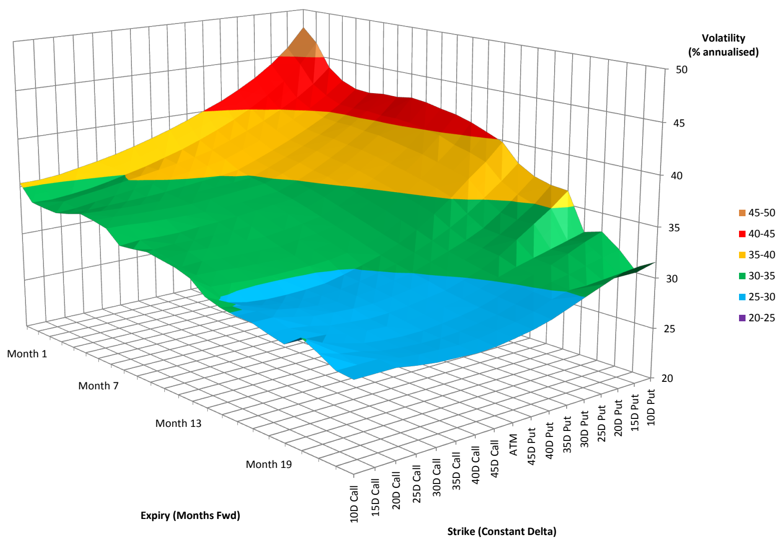

Gráfico 30 - Superfície de volatilidade (Fonte: Reuters)

Segundo o autor, o vega risk é analiticamente simples de ser mesclado à teoria padrão do VaR. A sua dificuldade de implementação se deve à dificuldade de obter dados de volatilidade implícita de opções e pela prevalência de *smiles* de volatilidade e estruturas a termo na maioria dos mercados de opções. Os *smiles*, apesar de altamente relevantes, são muitas vezes negligenciados pelos gerenciadores de risco.

Este não foi considerado um empecilho na aplicação deste modelo às opções de WTI, já que há elevada liquidez e facilidade de obtenção de dados históricos de preço e volatilidade.

Um ponto questionável do modelo vega risk é que este só é significante em contextos de modelos para os quais a volatilidade é randômica (ou aleatória), enquanto o modelo de Black-Scholes assume que o retorno do ativo segue um caminho aleatório com volatilidade constante. Por esta razão, há uma aparente contradição entre o uso da volatilidade implícita e o vega do Black-Scholes para mensurar o vega risk.

O modelo Black-Scholes é somente útil para uma primeira aproximação para o modelo real da volatilidade. Por este ponto de vista, a volatilidade implícita não seria mais necessariamente a medida correta para antecipação da volatilidade. Estaria mais para uma aproximação de Mercado para o parâmetro na formula de apreçamento de Black-Scholes, o que está intimamente relacionado, mas não é exatamente a antecipação da volatilidade.

No Mercado real, no entanto, a volatilidade não é constante e Bredda (2008) e Malz (2001) concluem que o modelo de Black trabalha bem com este padrão de volatilidade apesar da aparente falha teórica. Ederington e Guam (2007) também chegaram a conclusão semelhante.

Diante da conclusão de que o uso da volatilidade implícita é valido, pode-se dizer que, se o risco da opção estivesse relacionado somente à sua volatilidade, o VaR do *portfolio* seria:

$$VaR_{\sigma} = k * 1.65 * \sigma * \nu_{vol} \tag{38}$$

onde

k: vega

σ: volatilidade implícita

ν_{vol}: volatilidade da volatilidade implícita

Esta exposição ao vega considera que o incremento na volatilidade implícita $(1.65 * \sigma * \nu_{vol})$ corresponde ao choque de volatilidade para o período de um dia dado um intervalo de confiança de 95%.

Adicionando o risco de delta ao da volatilidade, obtem-se a equação 39 para o cálculo do VaR:

$$VegaVaR = 1.65 * \sqrt{\begin{bmatrix} \delta S \nu_{spot} & k\sigma\nu_{vol} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{spot,vol} \\ \rho_{spot,vol} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta S \nu_{spot} \\ k\sigma\nu_{vol} \end{bmatrix}} \tag{39}$$

onde,

δ: delta

S: preço do ativo base

ν_{spot}: volatilidade do preço do ativo objeto

k: vega

σ: volatilidade implícita

ν_{vol}: volatilidade da volatilidade implícita

$\rho_{spot,vol}$: correlação entre preço do ativo base e volatilidade implícita

4.3.3 VaR com derivadas de ordens superiores

A metodologia aqui apresentada foi baseada nos trabalhos de Barbosa (2011) e Ederington & Guam (2007).

Tradicionalmente a avaliação de risco de *portfolios* com opções é descrita em função de 4 derivadas de primeira ordem (delta, theta, vega e rho) e uma derivada de segunda ordem (gamma), que já foram discutidas e apresentadas anteriormente neste documento.

A metodologia proposta por Ederington & Guam (2007) inclui outras derivadas de segunda e terceira ordem ao modelo tradicional, de forma a capturar o efeito de outros fatores possivelmente significantes.

Como existem quatro fatores que determinam o premio de uma opção de acordo com o modelo de Black, existem quatro derivadas de primeira ordem, dez de segunda ordem e vinte e três de terceira ordem.

Dado que o impacto da taxa de juros só é relevante para opções com prazo para expiração muito longos, a análise deste fator foi considerada irrelevante e o número de derivadas analisadas foi reduzido para 6 de segunda ordem e dez de terceira ordem a serem testados por Ederington & Guam (2007).

O modelo foi aplicado a *portfolios* contendo opções de futuros do índice S&P 500 para o período de uma semana. A conclusão do trabalho é que as cinco gregas usualmente utilizadas são as mais significativas ao explicar a variação de preços destas opções no período de uma semana, mas também concluíram que outras derivadas de ordens superiores apresentam um poder explanatório incremental relevante. Ao lado do gamma, delta-vega, delta-theta, delta-delta-delta e delta-delta-vega foram consideradas as mais importantes. Todas as derivadas consideradas relevantes são derivadas de delta.

Diante destas conclusões, pode-se escrever o VaR como:

$$
\begin{aligned}
VaR = |\Delta|(\alpha\sigma S) - \frac{1}{2}\Gamma(\alpha\sigma S)^2 \\
- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial F \partial \sigma}(\alpha\sigma S)\left(\alpha\sigma_{vol} v_{implicita}\right) \\
- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial F \partial T}(\alpha\sigma S)(\Delta t) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 O}{\partial F^3}(\alpha\sigma S)^3
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Onde $\frac{\partial^2 O}{\partial F \partial \sigma}$, $\frac{\partial^2 O}{\partial F \partial T}$, $\frac{\partial^3 O}{\partial F^3}$ são as derivadas relevantes de segunda e terceira ordem da fórmula de Black e apresentam as seguintes fórmulas:

Δ−ν: Delta-vega

$$\frac{\partial^2 O}{\partial F \partial \sigma} = -e^{-rT} n(d_1) \left[{d_2}/{\sigma} \right] \tag{41}$$

Δ-Θ:Delta-Theta

$$\frac{\partial^2 O}{\partial F \partial T} = -\mathrm{r}\Delta - e^{-rT} n(d_1) \left[{d_2}/{2T} \right] \tag{42}$$

Γ-Δ :Delta-Delta-Delta ou Gamma-Delta

$$\frac{\partial^3 O}{\partial F^3} = -\Gamma F^{-1} \left[{d_1}/{\sigma\sqrt{T}} + 1 \right] \tag{43}$$

onde n corresponde à função densidade da distribuição normal.

Outro resultado importante foi a variação da relevância de cada derivada dado o *moneyness* das opções. A conclusão foi a de que as derivadas de segunda e terceira ordem tem mais importância quando as opções estão fora do dinheiro e menos quando estão no dinheiro.

E, assim como Malz (2001) Ederington & Guam verificam a acurácia do modelo de Black ao explicar o padrão da série histórica das opções. Assim como no primeiro, os autores questionam o famoso modelo teórico particularmente por sua premissa de que os retornos são log-normais e a volatilidade constante, o que não é observado no mercado real. Felizmente, a conclusão é também semelhante à de Malz: apesar de sua falha teórica, o modelo de Black explica razoavelmente bem o padrão. Desta forma, o presente trabalho partirá da premissa de que o modelo de Black é adequado para explicar o comportamento das opções.

Dado que o presente trabalho analisará carteiras com prazo de expiração de um mês, as premissas em relação à taxa de juros se adequam às premissas do trabalho de Ederington & Guam (2007) e considerará como relevantes às gregas por eles destacadas.

4.3.4
Capital-at-Risk

Um método de cálculo de delta-gamma V@R que não necessita de cálculo explícito da distribuição de probabilidade é a Programação Quadrática, método apresentado por Wilson (1994) e Rouvinez (1997).

O método define o valor em risco como a perda máxima em um intervalo de tempo dado um nível de confiança e busca, através da programação quadrática encontrar a solução que corresponde a esta perda máxima dada a restrição de que este evento e todos os demais que gerem perdas inferiores estejam dentro do intervalo de confiança. A chave da solução se encontra, portanto, na determinação deste intervalo.

A grande diferença está no fato de trabalhar com um intervalo de confiança multidimensional referente aos fatores que interferem no preço ao invés de trabalhar com intervalo de confiança unidimensional de valores do *portfolio*. Assim, se neste último caso, o intervalo de confiança de 95% correspondente ao VaR é (-1.65, +∞) e z tem uma probabilidade de 95% de estar dentro deste intervalo, no caso multidimensional é preciso definir a região por meio de linhas de isodensidades, como se esta tivesse o formato de um monte. A região de confiança é delimitada por elipses multidimensionais com limites (-1.92, +1.92).

Uma grande diferença entre este modelo e o VaR tradicional pode ser facilmente visto: os diferentes intervalos de confiança. E isto gera uma inadequação deste método para o cálculo do risco. A programação quadrática acaba indicando que o VaR a 5% corresponde ao limite z=-1.92 enquanto o real está somente em -1.95.

Assim, ao se comparar os intervalos do Delta-Gamma V@R com o do *Capital-at-Risk* encontra-se uma inadaquação deste último método, que contabiliza a cauda duas vezes. Isto faz com que o QP VaR seja conservador, indicando um montante de capital em risco superior.

Conclui-se que apesar de ser um método com aplicação aparentemente simples, peca por sua acurácia. De forma que será apresentado neste trabalho de forma informativa sobre mais uma técnica utilizada na mensuração de riscos, mas não será aplicado às carteiras para comparação com os demais métodos.

4.3.5 VaR Modificado, MVaR ou DGSK: inclusão de momentos superiores

Outro cálculo cujo objetivo é tentar reverter a baixa convergência do Delta-VaR para *portfolios* não-lineares é o chamado VaR modificado (MVaR) ou DGSK-VaR. Este modelo ajusta o desvio-padrão de forma a levar em consideração a assimetria da distribuição de retornos (*skewness*) e a curtose.

Com isto, esta metodologia foge da premissa de normalidade da distribuição de retornos e tenta aproximá-la da distribuição real ao considerar a possibilidade de distribuições assimétricas, com caldas mais pesadas à esquerda ou à direita. Além disso avalia a possibilidade da curva apresentar um achatamento diferente da distribuição gaussiana, o que é avaliado pela curtose. Curtoses positivas indicam distribuição mais afunilada e concentrada que a normal (distribuição leptocúrtica) enquanto curtoses negativas indicam maior dispersão da distribuição (distribuições platicúrticas).

O MVaR é calculado, então, pelas equações 44 e 45.

$$z = \left(z_c + \frac{1}{6}(z_c^2 - 1)S + \frac{1}{24}(z_c^3 - 3z_c) - \frac{1}{36}(2z_c^3 - 5z_c)S^2 \right) \quad (44)$$

$$MVaR = \mu - Z\sigma \quad (45)$$

onde μ e σ representam respectivamente a média e o desvio-padrão, *S* é a o índice de assimetria (*skewness*), *K* é a curtose, z_c é o quantil da distribuição e *Z* é a expansão assintótica de Cornish-Fisher para o qualtil de uma distribuição não-gaussiana.

As razões pelas quais este método não foi considerado nos testes realizados nesta dissertação, assim como o *Capital-at-Risk*, foram às limitações de sua aplicação.

Jaschke (2001) afirma que a aproximação de Cornish-Fisher é uma técnica adequada se a distribuição for relativamente próxima de uma curva gaussiana. Nos casos em que a distribuição a distribuição se afasta da nornal, que eram os casos em que a metodologia buscava encontrar um cálculo mais adequado que o Delta-Gamma-VaR a convergência do método pode ser comprometida.

Desta forma, esta metodologia será apenas citada, para que seja registrado mais uma ramificação dos estudos em busca de cálculos adequados à avaliação de risco de carteiras não-lineares.