# 3
# Modelos de Simulação

## 3.1
## Simulação de Monte Carlo

O método de Monte Carlo foi concebido com este nome nos anos 40 por John Von Neumann, Stanislaw Ulam e Nicholas Metropolis durante o projeto de pesquisa em armas nucleares no Laboratório Nacional de Los Alamos, que resultou na construção da primeira bomba atômica.

Seu nome remete às roletas do famoso cassino de Mônaco, fundado em 1982 e sua proposta é apresentar soluções numéricas em problemas de solução analítica complexa ou inexistente.

Primeiramente, o método foi aplicado à solução de integrais múltiplas para o estudo da difusão de nêutrons, mas, após a constatação de que seu uso era aplicével a qualquer modelo probabilístico que pudesse ser tratado como um problema determinístico por meio de amostras aleatórias, seu uso se tornou amplamente difundido, com aplicação em diversas áreas de conhecimento. Em finanças, ele é muito utilizado na apreçamento de ativos financeiros e opções.

A base do método de Monte Carlo está na amostragem de números aleatórios e sua precisão está, em geral, associada ao tamanho da amostra. O *trade-off* entre precisão e tempo de computação é uma característica relevante deste método.

O desvio-padrão de um processo de Monte Carlo é diretamente proporcional a $n^{-1/2}$, ou seja, a redução pela metade do desvio-padrão exige quadruplicação do número de amostras.

A execução do método de Monte Carlo exige etapas semelhantes para a maioria dos problemas no qual é utilizado. No caso da apreçamento de um ativo financeiro os seguintes passos são trilhados:

1. Simulação de caminhos aleatórios para os fatores de risco do problema, cujo padrão de comportamento deve ter sido previamente identificado;
2. Avaliação do resultado de cada caminho simulado no contrato financeiro em análise;

## 3.2
## Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano é um processo estocástico muito utilizado na área de finanças para explicar o comportamento de preços de *commodities* no curto prazo e, por esta razão possui elevada importância nos cálculos de apreçamento e mensuração do risco de carteira de opções, como será detalhado em capítulos posteriores.

Segundo Fonseca (2005), qualquer variável cujas mudanças em seus valores ao longo do tempo ocorram de maneira incerta segue um processo estocástico. Os processos estocásticos podem ser divididos em discretos e contínuos. Apesar dos ativos financeiros seguirem processos discretos, os modelos contínuos geram aproximações muito boas e, na prática, são os mais utilizados em finanças.

Um dos exemplos mais simples de um processo estocástico é o passeio aleatório definido em tempo discreto. Neste processo $x_t$ é uma variável aleatória cujo valor inicial $x_0$ é conhecido e que a cada instante $t = 1,2,3, \ldots$ dá um salto de valor 1 para cima ou para baixo com probabilidade de 50% para cada caso. Como os saltos são independentes o passeio aleatório pode ser descrito como apresentado na equação 17.

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t \qquad (17)$$

Onde $\epsilon_t$ é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade tal que $prob(\epsilon_t = 1) = prob(\epsilon_t = -1) = {}^1/_2$.

Como as probabilidades de saltos para cima e para baixo são iguais o valor esperado de $x_T$ para $T > t$ é $x_t$. Este processo pode ser generalizado de forma a refletir mais adequadamente a variável em estudo. Por exemplo, se as probabilidades forem diferentes, o processo se tornará um *passeio aleatório com drift* (ou tendência).

O passeio aleatório é importante porque satisfaz a propriedade de Markov e é, por esta razão, denominado processo de Markov[10]. De acordo com esta propriedade, a distribuição de probabilidade $x_{t+1}$ depende exclusivamente de $x_t$, não sofrendo influências de valores passados ou de qualquer outra informação.

O movimento browniano, ou processo de Wiener, representa no tempo contínuo o que o passeio aleatório define em tempo discreto. Ele é o *bulding block* de diversos modelos estocásticos e possui três propriedades importantes, sendo elas:

1. É um processo de Markov e, por esta razão; o valor presente é tudo que é preciso para fazer a melhor estimativa possível de seu valor futuro;
2. Possui incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidade da variação no processo em cada intervalo de tempo é independente de qualquer outro intervalo que não sobreponha o primeiro;
3. Variações no processo em intervalos de tempo finitos seguem uma distribuição normal cuja variância aumenta linearmente com o tempo.

A propriedade de Markov é especialmente importante para os ativos financeiros, para os quais se considera que o preço de mercado do ativo incorpora todas as informações relevantes disponíveis, de forma que o último valor é aquele que realmente reúne dados relevantes para previsões.

Se $z(t)$ é um processo de Wiener, $\Delta z$ é a variação de $z$ em um intervalo $\Delta t$ e pode ser expressa como

$$\Delta z = \epsilon_t \sqrt{\Delta t} \qquad (18)$$

Onde $\epsilon_t$ é uma variável aleatória com distribuição normal com média 0 e desvio-padrão 1. E também $\epsilon_t$ é serialmente descorrelacionada, ou seja, $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$ para $t \neq s$.

Ao tornar $\Delta t$ infinitesimal, pode-se representar o processo de Wiener em tempo contínuo como

[10]O passeio aleatório não é o único processo estocástico que satisfaz as propriedades de Markov.

$$\mathrm{d}z = \epsilon_t \sqrt{\mathrm{d}t} \qquad (19)$$

Assim como o passeio aleatório, o processo de Wiener pode ser generalizado de forma a representar o comportamento de uma dada variável. O movimento browniano com tendência, também conhecido como Movimento Aritmético Browniano (MAB), é uma extensão do movimento apresentado, expresso pela equação 20.

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \qquad (20)$$

onde $\alpha$ é o parâmetro de tendência, $\sigma$ o da variância, e $x$ um processo estocástico. É importante observar que, em qualquer intervalo $dt$, o variação em $x$, a qual denominamos $dx$, é normalmente distribuída com valor esperado $E(dx) = \alpha dt$ e variância $dt$.

O MAB permite que a variável assuma valores negativos, o que pode ser um problema para a modelagem de preços. Uma alternativa, então, é supor que, ao invés do ativo, o seu retorno segue um MAB, como expresso na equação 21.

$$\begin{gathered} {dx}/{x} = \alpha dt + \sigma dz \\ \text{ou} \\ dx = \alpha x dt + \sigma x dz \end{gathered} \qquad (21)$$

Este é o processo denominado Movimento Geométrico Browniano (MGB). O MGB pressupõe que os retornos do ativo (${dx}/{x}$) são normalmente distribuídos e, consequentemente, o preço do $x$ apresenta uma distribuição lognormal.

### 3.2.1
### O Lema de Itô

O Movimento Browniano pode ser generalizado para uma ampla gama de processos estocásticos em tempo contínuo, chamados processos de Itô.

As derivadas em relação ao tempo dos processos de Itô não seguem as regras convencionais e, como resultado disto, não podem ser tratadas pelas regras ordinárias do cálculo. Para trabalhar com estes processos, devemos fazer uso do Lema de Itô, também conhecido como o teorema fundamental do cálculo estocástico, que permite derivar e integrar funções de processos estocásticos.

Um processo de Itô é um processo estocástico contínuo representado pela equação 22.

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{22}$$

Onde $a(x,t)$ é a função não aleatória da tendência, $b(x,t)$ é a função não-aleatória da variância, $z(t)$ é um processo de Wiener e $t$ é o tempo.

Percebe-se facilmente que o Movimento Geométrico Browniano é um caso particular do processo de Itô, no qual $a(x,t) = \alpha x$ e $b(x,t) = \sigma x$.

O Lema de Itô é mais facilmente compreendido como uma expansão de Taylor. Dada uma função $F(x,t)$ diferenciável em relação à $x$ no mínimo duas vezes e uma vez em relação a $t$. Pela expansão de Taylor teríamos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(dx)^3 + \cdots \tag{23}$$

No caso do cálculo ordinário, os termos de ordens superiores tenderiam a zero no limite. No entanto, pelo Lema de Itô, temos que $(dx)^2 = b^2(x,t)dt$. Assim, podemos escrever $dF$ como

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 \tag{24}$$

Ou, substituindo, $(dx)^2$ por $b^2(x,t)dt$ e $dx$ por $a(x,t)dt + b(x,t)dz$

$$\begin{aligned} dF = {} & \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt \\ & + b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}dz \end{aligned} \tag{25}$$

No caso do Movimento Geométrico Browniano, através do Lema de Itô, podemos dizer que $F(x) = log\ x$ é o seguinte movimento Browniano com *drift*

$$dF = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \tag{26}$$

A equação 26 pode ser escrita na forma discreta (utilizada na prática nos modelos de simulação) como apresentado na equação 27.

$$ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t \qquad (27)$$

Ou, montando a expressão em relação ao preço

$$X_t = X_0 e^{\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t\right]} \qquad (28)$$

## 3.3
## Simulação de Monte Carlo de um Movimento Geométrico Browniano

Considerando que o preço $X$ de uma *commodity* de energia segue um movimento geométrico browniano, seu comportamento pode ser expresso por

$$X_t = X_0 e^{\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t\right]} \qquad (29)$$

Sabe-se que $\alpha$ é a tendência do preço da *commodity* observada historicamente, $\sigma$ é a volatilidade do preço da *commodity* e $\varepsilon_t$ uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão.

A simulação de Monte Carlo será realizada nesta dissertação através dos seguintes passos:

1. Sorteio ao acaso de valores para $\varepsilon_t$,respeitando as probabilidades da distribuição $N(0,1)$;
2. Substituição do valor sorteado na equação do preço;
3. Repetição dos dois primeiros passos n vezes;
4. Cálculo da distribuição de probabilidade dos preços.

No caso de uma carteira composta por mais de uma *commodity*, as variáveis aleatórias devem ser geradas de forma correlacionada, fazendo para tal o uso da fatoração de Cholesky.

Segundo Fonseca (2005), uma característica importante da equação discreta do movimento geométrico browniano apresentada anteriormente é que sua discretização é exata e precisa. Ou seja, não é preciso trabalhar com incrementos muito pequenos de tempo para se obter uma boa aproximação.