5
Tópicos Wittgensteinianos Entram em Cena

Reperdida a remembrança, a representação de tudo se desordena:
é uma ponte, ponte, – mas que, a certa hora, se acabou, parece'que.
Luta-se com a memória.
João Guimarães Rosa
Nenhum, nenhuma

5.1
Introdução

As controvérsias filosóficas em torno da prova do T4C não conservam o caráter sistematizado de uma *disputatio*. Nem tampouco é o caso que principiaremos aqui a descrição das primeiras reações ao artigo de Tymoczko pois, ainda que de modo breve, as críticas de Swart foram mencionadas anteriormente.[129] Apontamos, então, que a prova do T4C tem a estrutura de qualquer prova em teoria dos grafos e também criticamos com Swart a relevância atribuída por Tymoczko aos raciocínios probabilísticos, utilizados heuristicamente na descoberta do algoritmo que gera o conjunto inevitável de configurações redutíveis, para a compreensão da estrutura lógica ou conceitual da prova.

Respostas ao artigo de Tymoczko não tardaram a aparecer (duas, assim como a de Swart, no ano seguinte). Variando o grau de atenção aos detalhes do argumento central de Tymoczko, são até hoje produzidas, como se vê no supracitado artigo de MacEvoy,[130] publicado ainda no ano passado. Realizaremos nossa leitura das mesmas com base na reorganização anteriormente fornecida (AIE) e na estratégia de apresentação das controvérsias em torno da prova empregada por Dag Prawitz (seção 4.2). Após essa espécie de enquadramento dos

[129] Elas basicamente se apoiam na observação de que Tymoczko parece desconhecer a estrutura das provas em teoria dos grafos, que consiste em três passos: (i) O estabelecimento do fato de que o teorema é verdadeiro dado um determinado conjunto de grafos, configurações, ou – em geral – casos que possuam (ou circunstancialmente não possuam) uma propriedade estipulada; (ii) A obtenção de uma lista exaustiva desses casos; (iii) A confirmação de que todos os membros desse conjunto possuem a propriedade requerida. O conjunto finito de casos pode, em um dos extremos, ser tão pequeno e tão simples que o teste de casos pode ser feito em nossas cabeças ou pode, no outro extremo, ser tão extenso e/ou complicado que é impossível de ser levado a cabo sem o auxílio de um computador. (Swart, 1980, p. 699)

[130] Cf. pp. 55-56 acima – embora se deva notar que as observações sobre o artigo de Tymoczko ali contidas são bastante marginais, restringindo-se basicamente à anotação de que a conclusão do AIE é equivocada – ainda mais levando-se em conta o desenvolvimento disso que se tem chamado de matemática experimental e que, em realidade, corresponde à matemática computacionalmente assistida.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

primeiros movimentos de resposta a Tymoczko, concentraremos nossa leitura nos problemas relativos à noção de *surveyability* (utilizada nas duas primeiras premissas do AIE) na seção 4.3. Veremos então como elementos da filosofia da matemática de Wittgenstein foram explicitamente introduzidos nas críticas ao argumento de Tymoczko. Mais do que isso, examinaremos como em ao menos uma dessas críticas (de Stuart Shanker) uma determinada interpretação da função da noção de *surveyability* na filosofia wittgensteiniana da matemática foi acionada em nome de esclarecimentos lógicos ou gramaticais do resultado de Appel e Haken – mas que, no entanto, acaba, a nosso ver, engendrando mais problemas do que propriamente os dissolvendo.

5.2
As respostas ao artigo de Tymoczko: um panorama à la Prawitz

Como indica o título do artigo que invocamos,[131] Prawitz pretende dar conta de questões conceituais relacionadas a dois fenômenos: provas assistidas por computador e provas *sobre* computadores. Podemos, assim, complementar uma das distinções oferecidas no segundo capítulo, dando lugar ao esquema da figura abaixo.

Numa veia muito similar a de Chateaubriand, Prawitz afirma que se analisamos o conceito de prova em termos de como o empregamos, a noção de prova formal não possui grande valor. O ideal das provas formais – que para Prawitz compreende a ideia "razoável" de que *é preciso ter uma visão da prova como uma cadeia total de inferências* (cf. Prawitz, 2008, p. 84 grifo nosso) – não acomoda uma representação adequada do que sejam provas. E isso por duas razões: a primeira é que mesmo que a aplicação de regras de inferência preserve a verdade ao longo do processo, a "distância epistêmica" entre premissas e conclusão pode ser tão grande a ponto de a derivação perder valor epistemológico – valor que com Chateaubriand se diria nos termos da "compreensão e [da] explicação com relação ao que já se compreende". Vemos, assim, o texto de Prawitz concordar com a distinção que oferecemos acima a partir da perspectiva de Chateaubriand: as derivações formais e mecanizáveis que caracterizam a concepção padrão (formalista) de prova não são suficientes para dar conta dos

[131] "Proofs Verifying Programs and Programs Producing Proofs: A Conceptual Analysis" (Prawitz, 2008).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

fenômenos usuais, que o conceito de prova *simpliciter* pretende subsumir – perde-se algo epistemologicamente relevante.

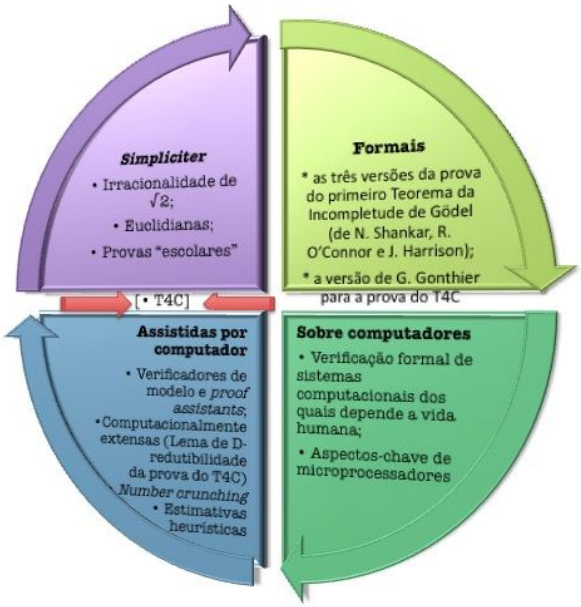

Figura 15: Um esquema complementar ao oferecido na seção 2.3 (capítulo II). Prawitz inclui no universo das práticas de prova aquelas *sobre computadores* de que fala MacKenzie (2005).

É preciso, para Prawitz, concentrar-se na função epistemológica decisiva de inferências dedutivas e de provas, que consiste em propiciar-nos bases conclusivas (ou fundamentos [*conclusive grounds*]) para a asserção das conclusões. Não abordaremos aqui os desenvolvimentos conceituais avançados por Prawitz – inspirados na leitura construtivista do significado das constantes lógicas como consistindo nas bases que possuímos para introduzí-las ou eliminá-las (nos moldes da dedução natural). Gostaríamos apenas de sublinhar as similaridades entre as abordages de Prawitz e Chateaubriand no que diz respeito, por exemplo, à insuficiência das derivações formais – "codificações" de provas para Prawitz (*loc. cit.*), "extrapolações idealizadas de provas comuns" para Chateaubriand (2005, p. 304) – para uma análise frutífera das provas em geral.

Poder-se-ia objetar aqui, que ao destacar essas similaridades nossa anunciada rejeição das conclusões mais radicais do AIE de Tymoczko perderia força, uma vez que ele também está preocupado com a necessidade de que um determinado modo de conceber provas matemáticas seja reformulado. Quanto a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

isso por ora diremos apenas que não nos parece nada trivial identificar os pontos elaborados por Chateaubriand e Prawitz com a estratégia anti-fundacionalista de Tymoczko. Isso por que, como vimos acima, as dicotomias aceitas por ele como representativas das posições fundacionalistas "em geral" de fato não correspondem nem aos processos de produção de conhecimento matemático (e alguns casos de conhecimentos físico-teóricos, como vimos com Pap), nem propriamente às posições de todos os autores ditos fundacionalistas. Desse modo, não servem como pano de fundo adequado contra o qual apresentar a novidade da prova do T4C. Parece-nos que posições intermediárias entre o *fundacionalismo d'Épinal* desenhado por Tymoczko e a proposta anti-fundacionalista radical a partir da qual trava seu combate – são capazes de melhor nos orientar na construção de um panorama das controvérsias sobre a prova do T4C, e sua efetiva especificidade com relação às práticas tradicionais de prova (onde por tradicionais entendemos apenas: práticas de cálculo e prova não computacionalmente assistidas). Tais posições intermediárias estão representadas, de nosso ponto de vista, nas análises de Pap, Bernays, Chateaubriand e Prawitz.[132]

Prawitz divide as posições disputantes nas referidas controvérsias em duas partes: a dos que afirmam e a dos que negam a ocorrência de uma mudança significativa nas práticas matemáticas a partir da prova do T4C. Como é de se esperar Tymoczko é alocado no primeiro grupo. O segundo, por sua vez, divide-se em dois: o grupo dos que negam a introdução da experimentação na matemática via prova do T4C (Teller, 1980) e o dos que afirmam que a ocorrência de procedimentos empíricos em provas matemáticas não representa qualquer novidade relevante na matemática (Detlefsen & Luker, 1980). A reconstrução que Prawitz fornece do argumento central de Tymoczko difere da nossa, embora os pontos centrais sejam os mesmos. Mais importante é destacar o modo como os dois outros textos, primeiro o de Teller e depois o de Detlefsen & Luker, respondem pela negação do AIE que enunciam e os conceitos principais que mobilizam para tal.

[132] Wang, comentando o espírito da abordagem de Tymoczko em "To and from philosophy – discussions with Gödel and Wittgenstein", sugere exatamente que se prime pela construção de posições intermediárias, capazes de eliminar falsos desentendimentos: "Certamente concordo com Tymoczko quando ele objeta a assunção de que 'filosofia da matemática' diga respeito somente a 'estudos fundacionais' o que, a seu turno, praticamente equivale a 'lógica matemática'. Mas me preocupo com a tendência familiar de ir de uma posição extrema a outra, de modo a excluir-se a interação entre diferentes perspectivas." (Wang, 1991, p. 269)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

Teller identifica uma confusão de Tymoczko entre *provar* teoremas, ou seja, *verificar se* uma asserção determinada é consequência das premissas assumidas na derivação, e o ato de *verificar que* um determinado objeto é uma prova. Nesse sentido tudo o que a prova do T4C traria de novidade para a matemática consistiria na utilização de computadores na verificação e não na execução da prova. Destarte, enquanto a posse de uma prova é, para Prawitz, a condição a ser satisfeita para *a asserção de um teorema*, a verificação de uma prova é o pré-requisito de uma asserção distinta: a de que *um determinado objeto* que se analisa é de fato uma prova. A verificação de uma prova, desse modo, não acrescentaria nada à prova mesma, mas somente, distinta questão, à nossa confiança de que ela é efetivamente uma prova.

Prawitz afirma que a distinção entre provas e verificação de provas é importante, embora não implique numa imediata resposta à questão acerca da novidade da prova do T4C. Isso porque nem Tymoczko nem Teller "dizem muito" sobre o conceito de prova. Prawitz pretende contribuir para uma análise do mesmo sugerindo que mais importante do que se perguntar pelo que são provas é preciso buscar determinar o que é *ter provado* uma asserção, ou seja, o que é *estar de posse* de uma prova. Está-se de posse de um procedimento de prova, para Prawitz – de modo alternativo com relação à cartesiana *visão* de cada passo inferencial da mesma[133] – quando se é capaz de aplicar ou realizar [*to perform*] uma *operação* sobre bases dadas, que transforma tais bases na conclusão.

Acionando a distinção entre provas como atos, objetos e traços pode-se dizer que ao aceitar a importância da distinção de Teller entre provar e verificar provas é como se Prawitz estivesse dizendo que *provas como atos* exigem a capacidade de executar uma operação de transformação de bases dadas em uma conclusão, enquanto que as *provas como objetos* só são plenamente acessíveis para quem as realiza (algo como: só podemos ter um mapa completo de um caminho que realizamos). Daí a importância que atribui à pergunta "o que é ter provado um teorema?" (o que é ter realizado o ato de construção da conclusão a partir das bases?) em contraposição à pergunta pelo que são provas (como objetos, que parece anular o processo de transformação de *ground*s que constitui o ato de

[133] A *Imaginationis intuientis*. Cf. especialmente a sétima das *Règles pour la direction de l'esprit*: "Pour l'achèvement de la science, il faut passer en revue une à une toutes les choses qui se rattachent à notre but par un mouvement de pensée continu et sans nulle interruption, et il faut les embrasser dans une énumération suffisante et méthodique." (*Règle* VII)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

provar). As similaridades com a estratégia wittgensteiniana em filosofia da matemática, como veremos, são patentes.

Quanto ao T4C, por conseguinte, Prawitz vai afirmar que embora seja justificável afirmar a possibilidade *em princípio* de provar dedutivamente (no domínio *a priori*) o lema chave de redutibilidade, as bases para uma tal afirmação residem, em última instância, no domínio empírico. Prawitz concorda com a ideia de que podemos "provar dedutivamente *que o programa* utilizado pelo computador para derivar o lema chave *é correto*, mas não podemos provar dedutivamente *que o computador executou o programa corretamente*" (Prawitz, 2008, p. 91, grifos nossos) – com o que vemos retornar a ideia de Tymoczko de que há fundamentos parcialmente indutivos ou empíricos para o T4C. Isso porque para Prawitz a verificação *via* execução do mesmo programa em máquinas diferentes conta como evidência meramente empírica.

> Devemos portanto concluir que as bases que temos para asserir o T4C não são do tipo tradicional em matemática, mas de tipo parcialmente indutivo, repousando como está na observação do resultado da execução de um programa particular em um computador, fornecendo evidência empírica para a existência da prova do lema chave. (*loc. cit.*)

Desde a leitura que sugerimos anteriormente a partir das distinções de Pap, entretanto, deveríamos poder dizer que mesmo a asserção de que o computador executou o programa corretamente pode ser considerada como constituindo o domínio *a priori*, ao menos em alguns contextos: essa verdade empírica funcionaria, no *setting* dedutivo da prova do T4C, como princípio metodológico, como condição de possibilidade da prova do T4C.[134] Qualquer pessoa que tenha compreendido a prova em certo grau de detalhe, e que por conseguinte seja capaz de reproduzi-la com o mesmo nível de pormenor – quer dizer, que seja capaz de mostrar as relações internas entre os conceitos que a constituem, ou a relação de fundamentação da conclusão nas premissas, como quer Prawitz – está tão capacitada/fundamentada a asserir o T4C quanto os *experts* que a verificaram. O próprio Prawitz reconhece que, com relação a teoremas difíceis, "coletivamente estamos de posse de provas dedutivas" (Prawitz, 2008, p. 92), sejam elas

[134] De uma perspectiva wittgensteiniana poderíamos dizer: do *sentido* matemático do enunciado do T4C.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

computacionalmente auxiliadas ou não, pois contamos com a *expertise* dos verificadores na fundamentação de nossa confiança.

É preciso observar, entretanto, que Prawitz utiliza uma expressão limitativa antes da afirmação: é "apenas" coletivamente que estamos de posse de provas dedutivas de teoremas difíceis – individualmente, possuímos evidência empírica. Se lembrarmos da análise de Chateaubriand, podemos dizer que se trata de um dos aspectos sociológicos das provas (ao qual também incluímos aspectos de ordem retórico-dialética): o convencimento com relação à efetividade de uma prova depende das relações de confiança epistêmica entre os membros da comunidade matemática, que contém auditórios (de especialistas) capazes de verificar as provas e na qual os demais auditórios (especialistas de outras áreas) confiam. Quem está de posse de um procedimento efetivo de transformação passo a passo das premissas na conclusão da prova – os verificadores – é capaz de garantir àqueles que só podem reproduzir a prova em menor grau de detalhe computacional que os passos não humanamente verificáveis estão corretos (ou "guardados nos arquivos"), ao contrário do que afirma Tymoczko.[135]

Para realizar a passagem à avaliação do segundo texto, no qual se nega a novidade do T4C em termos de introdução da experimentação, mencionaremos um dos tópicos em comum com um texto não comentado por Prawitz, qual seja, o de Swart. Ambos comentam um exemplo de Tymoczko para ilustrar a diferença entre procedimentos *a priori* e procedimentos empíricos. Ainda no início do artigo Tymoczko recorre a uma descrição da prova atribuída ao jovem Gauss, de que a soma dos cem primeiros números positivos é 5050. Vejamos sua descrição da prova:

> Escrever os números em duas linhas com cinquenta colunas, assim:
>
> 1 2 3 4 … 49 50
> 100 99 98 97 … 52 51
>
> Observar que a soma dos dois números de cada coluna é 101 e que há 50 colunas. Concluir que a soma dos cem primeiros números positivos é 5050.
> Agora sabemos que 1 + 2 + ... + 99 + 100 = 5050. Inspecionamos [*We have surveyed*] a prova totalmente e assim nos convencemos. Se alguém efetivamente

[135] Poderíamos dizer, retomando a distinção de Perelman & Olbrechts-Tyteca apresentada na nota 89, p. 75, que enquanto os verificadores são os únicos capazes de alcançar completa persuasão com relação à corretude do procedimento, os demais auditórios alcançam convicção sobre o mesmo. Ao modo de Wittgenstein diríamos que os experts são justamente o grupo de pessoas responsável por guardar os resultados verificados nos arquivos, sendo portanto quem de direito toma a *decisão* de transformar determinadas proposições em padrões, elementos normativos do sistema simbólico no qual a prova se realiza.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

> somar os números à mão e chegar à soma 5048, diríamos que ele adicionou errado. A construção que inspecionamos não deixa espaço para dúvida. E assim ocorre com todas as provas matemáticas; dizer que podem ser inspecionadas é dizer que elas podem ser definitivamente verificadas pelos membros da comunidade matemática. (Tymoczko, 1979, p. 59)

Com base nesse exemplo (que do ponto de vista de uma de nossas distinções poderia ser uma *prova-como-traço/instrução*) Detlefsen & Luker elaboram um argumento para mostrar que se Tymoczko estiver correto quanto à introdução de elementos empíricos na prova do T4C, seríamos forçados a concluir que ela já teria ocorrido em provas como a de Gauss. Para os autores, um "episódio substantivo de computação" ocorre entre a "observação" de que a soma dos dois números de cada coluna é 101 e a "conclusão" de que que a soma dos cem primeiros números positivos é 5050. Tal episódio pode ser considerado como a multiplicação de 50 por 101 ou como soma das cinquenta entradas de 101. Sem discutir a questão da identidade desses cálculos, o que importa notar é que Detlefsen & Luker (1980, pp. 808-9) desdobram a partir daí quatro exigências para que tais episódios de cálculo sejam confiáveis:

(a) que o algoritmo subjacente seja matematicamente correto [*sound*];
(b) que o programa particular seja uma implementação correta do algoritmo (onde um algoritmo é tomado como um "protoprograma", um *design* lógico de um processo que pode ser implementado em qualquer linguagem de programação)
(c) que o agente computador execute corretamente o programa;
(d) que o resultado reportado seja efetivamente obtido.

E em seguida remetem a uma passagem do texto de Tymoczko, na qual ele afirma que:

> O apelo a computadores, no caso do T4C, envolve duas alegações: (1) a de que toda configuração em *U* é redutível caso uma máquina com tais e tais características quando programada de tal e tal maneira produza um resultado afirmativo para [a redutibilidade de] cada configuração e (2) que tal máquina assim programada efetivamente produz resultados afirmativos para cada configuração. A segunda alegação é o resultado [*report*] de um experimento particular. Foi experimentalmente estabelecido que uma máquina de tipo *T*, quando programada por *P* resulta no output *O*. (Tymoczko, 1979, p. 73)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

O argumento de Detlefsen e Luker sustenta, então, que a alegação (2) de Tymoczko equivale à sua alegação (d), de modo que deve valer para uma o mesmo que vale para a outra. Além disso, identificam (1) com (c), de modo que se (1) for uma crença empírica, também o será (c). Tymoczko efetivamente afirma, sem esclarecer, a relação entre ambos, dizendo que os fundamentos para (2) são "difusos" o suficiente como para que sejam considerados empíricos. Agora, claro, o que Detlefsen e Luker desejam concluir – que há fundamentos empíricos mesmo em provas tão tradicionais quanto a do jovem Gauss – não precisa necessariamente ser o caso se levarmos em consideração duas observações apoiadas em nossa exposição anterior: a primeira é a de que calcular ou computar não equivale a realizar um experimento (algo para o que uma análise adequada ainda está para ser completada). Já a segunda é a de que mesmo que consideremos os episódios de computação como "algum tipo de experiência", eles poderiam muito bem ser tomados como elementos *funcionalmente a priori* no contexto da prova – os pressupostos "difusos" sobre a máquina sendo considerados princípios metodológicos da mesma. Desse modo, a conclusão dos autores acerca da constituição parcialmente empírica da prova do T4C não se sustentaria.

Dissemos acima que a elaboração do argumento de Detlefsen e Luker possui pontos de contato com a crítica de Swart. Em realidade o ponto de contato que temos em mente acaba sendo partilhado também pelo texto de Teller, e ele diz respeito ao uso de instrumentos em provas e cálculos matemáticos, que gostaríamos de alocar ao lado das considerações de ordem metodológica mencionadas acima. Para ilustrá-lo referiremos a uma passagem na qual Swart fornece uma tipologia de provas por casos:

> Na prática, teoremas (ou teoremas em potencial) que envolvem teste de casos podem cair sob quatro categorias:
>
> (i) Aqueles teoremas nos quais o teste de casos pode ser realizado em nossas cabeças.
> (ii) Aqueles teoremas nos quais é impossível que o teste de casos seja levado a cabo sem o auxílio de papel e caneta.
> (iii) Aqueles teoremas nos quais o teste de casos pode ser levado a cabo com imensos esforços por meio de papel e caneta – exigindo, digamos, muitas horas de esforço humano.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

> (iv) Aqueles teoremas que estão inteiramente fora do alcance de cálculos manuais e para os quais o teste de casos *tem que* ser levado a cabo por computador.
>
> As divisões entre essas categorias não são claras e, contrariamente, tendem a imiscuírem-se umas nas outras. Além disso, um dado teorema não tem localização permanente e necessária em uma categoria particular. (Swart, 1980, p. 699)

Com o que podemos resgatar o exemplo da prova de Gauss utilizado por Tymoczko como paradigma de prova puramente *a priori* e retornarmos às perguntas: se a prova for levada a cabo "em nossas cabeças" (o caso (i) de Swart) é *a priori* e se for levada a cabo "com as mãos", usando papel e caneta (casos (ii) e (iii)), é a posteriori? Qual a diferença desses últimos para o caso do uso de computadores? Quais são os critérios para tais diferenciações?

É nesse sentido que esclarecimentos acerca da natureza dos instrumentos computacionais são necessários. Em realidade o único dos três textos que analisamos no qual de fato há um comprometimento com o exame da natureza da computação é o de Detlefsen e Luker. O contexto em que o realizam é o apontamento para uma subjacente compreensão equivocada acerca da natureza da computação por parte de Tymoczko ou, mais precisamente, da natureza

> da 'elementaridade' que caracteriza os passos de uma computação ou algoritmo. *Não* se exige dos passos de uma computação que sejam *matematicamente perspícuos*. Não se supõe que eles representem passos sobre os quais a clara luz da intuição matemática imprime sua marca de aprovação (embora, claro, eles possam fazê-lo). Contrariamente, supõe-se que sua 'elementaridade', consiste no fato de que representam uma tarefa puramente mecânica, puramente burocrática [*clerical*] que não envolve nenhuma engenhosidade, nenhuma inteligência. E é supostamente uma questão puramente mecânica, clérica, verificar se tal passo foi efetivamente executado. E entretanto existem operações puramente mecânicas, puramente burocráticas que se pode realizar [*to perform on*] com símbolos que *não* representam ou correspondem a operações elementares com as coisas as quais os símbolos são considerados representar. E cálculos ou computações, do modo como os tratamos, são tomados como conjuntos de regras para operar com símbolos, e não com as coisas as quais os símbolos podem ser considerados representar! (*loc. cit.*)

Fica assim iminente a passagem ao tópico da inspecionabilidade de provas em geral e da prova do T4C em particular, que analisaremos na seção seguinte.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

Não se pode deixar de observar, entretanto, o encaixe dessas observações de Detlefsen e Luker no contexto de discussões sobre as funções do conhecimento simbólico ao qual remetemos anteriormente. Afirmar, por exemplo, que os passos de um cálculo ou computação não precisam ser "matematicamente perspícuos" equivaleria a dizer que se trata justamente de *uma operação de manipulação simbólica cega*, à qual não corresponderia qualquer aspecto epistemicamente relevante como a compreensão de significado dos termos envolvidos (uma vez que no pensamento cego, como vimos, não se trata de lidar com nada para além do que o simbolismo mostra, "nada está oculto" – e que "significado" aqui está sendo tomado como aquilo ao que os signos refeririam ou *estariam por*, um conceito de significado incessantemente criticado por Wittgenstein).

5.3
Sentidos de *surveyability*

Antes de seguir analisando as críticas ao AIE de Tymoczko no que tange ao modo como ele articula a noção de *surveyability*, lembremos o lugar da noção em nossa reconstrução do argumento. Na primeira premissa tínhamos que provas são tradicionalmente caracterizadas por serem "deduções a priori a partir de premissas" dotadas de (α_a) capacidade de gerar convicção, (α_b) *surveyability* (até então traduzido por inspecionabilidade) e (α_c) formalizabilidade (respectivamente denominados pelo autor de aspectos antropológico, epistemológico e lógico). Na segunda premissa Tymoczko lança mão da tese de que:

(β) A prova do T4C, embora seja (α_a) e (α_c), não é (α_b), uma vez que os cálculos realizados com o auxílio de programas computacionais não podem ser verificados passo-a-passo por uma pessoa no tempo de uma vida humana;

Afirma-se em seguida que o operar não inspecionável do computador – o vínculo da prova com um complexo conjunto de fatores empíricos – permite a afirmação da introdução de elementos experimentais em provas matemáticas. Observamos anteriormente, nos termos de Chateaubriand, que mesmo que todos os *outputs* do computador tivessem sido impressos eles não seriam de grande valia do ponto de vista da compreensão e da explicação que as provas são supostas fornecer. Dir-se-ia ao modo de Prawitz que a "distância epistêmica" entre as

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

premissas e a conclusão da prova do T4C seria demasiadamente extensa para preservar o indispensável caráter explicativo destacado por Chateaubriand. Prawitz, entretanto, não fala de explicatividade mas prefere colocar o problema em termos da *possibilidade em princípio* de "percorrer" a referida distância epistêmica. Isso, para Prawitz, deve-se à sua identificação entre possibilidade em princípio de realizar a prova e a posse ("coletiva") de um procedimento efetivo que permitiria levar a cabo as operações que a constituem – o que o algoritmo, ou o programa que o executa, utilizado para a prova do referido lema do T4C efetivamente é. Uma vez que podemos (novamente: "coletivamente") inspecionar o algoritmo, mas não seguir sua execução passo por passo, parece que a questão da posse do procedimento efetivo de prova de Prawitz se pode desdobrar em duas. Pode-se afirmar que à prova do T4C falta a possibilidade de percorrer passo a passo a distância entre premissas e conclusão da prova do lema – mas, que, com o auxílio do computador, isso se pode realizar. A distinção de que trataremos a seguir pode auxiliar a esclarecer esse ponto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

5.3.1
Inspecionabilidade e sinopticidade

Nos primeiros capítulos introduzimos, e posteriormente utilizamos sem a apresentação de qualquer pormenor, uma distinção entre *surveyability* local e global. Essa distinção foi sugerida por B.O. Bassler em um dos coevos artigos que tomam parte no debate sobre a prova do T4C – "The surveyability of mathematical proof: an historical perspective" (Bassler, 2006). Notemos desde logo que embora o autor identifique o que denomina de *inspecionabilidade local* já nas concepções de prova dos filósofos modernos por ele considerados,[136] é para o contexto dos debates lógico-filosóficos fundacionais de meados do século XIX que ele aponta como origem contemporânea das análises de provas que enfatizam esse gênero local de *surveyability* em contraste com a *surveyability* global. A essa, a partir de agora, denominaremos *sinopticidade*.

Essa modificação de vocabulário pretende sublinhar a distinção com base nos requisitos que Bassler determina para cada uma – a *surveyability* local, ou *inspecionabilidade* tem por requisito mínimo a inspeção de todo passo individual

[136] Esses filósofos são Bacon, Descartes e Locke. Um estudo complementar deveria certamente incluir ao menos Spinoza, Leibniz e Kant.

da prova em uma determinada ordem. Seu antecedente mais célebre encontra-se nas *Regras para a direção do espírito*, de Descartes. Bassler ademais observa que se deve considerar a possibilidade de utilização de *dispositivos* ou *recursos de contagem* para o registro dos referidos passos da prova – algo que nos permitiria conjecturar que Descartes aceitaria, pois na sétima das referidas regras ele afirma que "auxiliando a memória, corrigimos também a lentidão do espírito e estendemos de algum modo sua capacidade." (Regra VII)[137] Associaríamos, assim, a capacidade de ser inspecionada com a função do conhecimento simbólico ligada à ideia de mecanização do cálculo, pois o passo a passo pode, digamos, ser traduzido em um procedimento puramente algorítmico, "legível" para a máquina.

Já quanto ao que denominamos *sinopticidade*, a inspeção da prova como um todo, um requisito mínimo sugerido por Bassler consiste no "reconhecimento conceitual" de que os passos da prova ajustam-se em uma determinada *ordem*, que *estabelece* a conclusão. Assim, a "força coletiva dos passos da prova" requereria "uma confirmação/reconhecimento [*acknowledgement*] adicional em adição ao reconhecimento da validade de cada passo e seu respectivo posicionamento na prova." (Bassler, 2006, p. 102) Essa capacidade das provas diz respeito ao que se pode ver "como um todo", todo que mostra relações internas entre conceitos e cuja "visualização" não é mecanizável. Deve-se observar também que na mesma Regra há pouco referida, Descartes prescrevia que a fraqueza [*la faiblesse*] de nossa memória fosse remediada por uma espécie de *movimento contínuo* do pensamento *qui voit d'un seul coup*.[138] Nesse sentido, dado o fato de que existem provas matemáticas mais universalmente "visíveis numa só olhada" do que outras, pelo simples fato de que há provas mais conceitualmente simples do que outras, talvez fosse propício o desenho de uma espécie de "ideal regulativo, do que faria com que uma prova fosse 'fully perspicuous'." (Bassler, 2006, p. 103)

Reconhecendo a incapacidade de construir um critério maximal de sinopticidade, Bassler contenta-se com listar algumas virtudes comumente associadas à *apresentação perspícua* de provas – como a clareza, a subdivisão

[137] Lembremos que o conhecimento simbólico pode ser concebido como uma extensão instrumental do conhecimento intuitivo.

[138] *Numa só olhada* (*Imaginationes intuendis*). Que um tal movimento pudesse ser mecanizável e mesmo assim preservar a capacidade de ser visto numa só imagem intuitiva, já é uma ideia que somente um estudo aprofundado nos poderia certificar de que Descartes também aceitaria.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

perspícua da prova em lemas e seções, a exclusão de ideias irrelevantes e a disposição da prova em termos de ideias-chave. O leitor atento percebe aqui a passagem que Bassler realiza entre falar da sinopticidade *de provas* e da sinopticidade *da apresentação de provas*, o que talvez se justifique na medida em que ao fazê-lo ele está empregando de modo coerente uma ideia de W. Thurston, de que aos diferentes graus de sinopticidade e de inspecionabilidade correspondem distintas exigências de rigor.[139] Desse modo, embora uma prova inteiramente formalizada não seja inspecionável, suas variadas possibilidades de apresentação contemplam aquelas adaptações aos contextos de enunciação ou realização que viemos sublinhando no caso das provas entendidas como atos, sendo portanto mais ou menos sinópticas conforme mais ou menos contiverem as virtudes acima listadas. Não se deve perder de vista que uma apresentação suficientemente detalhada de uma prova (que em termos kantianos talvez se dissesse capaz de possibilitar uma construção na intuição) *conta como* prova mesma.

O operar do computador na construção de casos, a seu turno, ainda que não seja inspecionável, é o executar de um algoritmo, ao menos formalmente análogo a qualquer episódio de cálculo humano, ou seja, um procedimento composto por um conjunto de instruções bem definidas para a manipulação de signos com o objetivo de resolver um problema (no caso que nos interessa, construir um conjunto inevitável de configurações redutíveis). Essas instruções, que no computador ocorrem em diferentes níveis,[140] são regras para a

[139] O artigo de Thurston constata, em realidade, algo já destacado por Wang (1955), e também por Chateaubriand: que diferentes domínios das ciências (especificamente as formais), e mesmo diferentes contextos no interior de um único domínio, reconhecem/estabelecem/possuem diferentes noções de rigor. Em algumas, a formalização anda de par com o que se considera o tipo relevante de *surveyability*, ou seja, a inspecionabilidade, por sua vez associada à ideia de formalização como mecanização de procedimentos (esse seria o caso de uma abordagem predominantemente formalista da matemática e de alguns ramos da ciência da computação, como o da engenharia de *software*). Contrariamente, desde outras perspectivas e contextos, a associação do rigor com o encadeamento original de conceitos e procedimentos não mecanizáveis numa determinada ordem – da qual não é incomum que se valorizam virtudes estéticas como a simplicidade e a elegância – seria mais relevante do que qualquer extenso desenvolvimento calculatório formal ou mecanicamente executado, como nas provas de redutibilidade do T4C. Seria interessante examinar, a partir desse gênero de consideração comparativa entre exigências formais e estéticas, as similaridades entre requisitos de boa disposição das ideias de uma prova com e os requisitos retórico-literários para a *disposito* adequada de um bom discurso. Para uma apresentação da noção de *perspicuitas* – uma das virtudes da *dispositio* – nos estudos literários cf. os *Elementos de retórica literária* de H. Lausberg, 1993.

[140] Lembremos, por exemplo, que as primeiras provas de redutibilidade foram executadas com algoritmos escritos em uma linguagem de alto nível (ALGOL 60), que, no entanto, não era eficiente. A linguagem na qual Koch escreveu o algoritmo que efetivamente foi utilizado (ASSEMBLY) é mais eficiente porque mais simples de ser "traduzida" para a linguagem binária da máquina.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

manipulação (decodificação) de certos signos, ao modo do que, na tradição do conhecimento simbólico se denomina de *pensamento cego*. Ademais, o computador, como "máquina de pensamento cego", constitui as condições instrumentais de possibilidade da prova do T4C.

Alegar, como fazem Tymoczko e Detlefsen & Luker, que essa manipulação simbólica é empírica por não ser inspecionável consiste em interditar os distintos sentidos da noção de *surveyability* na elucidação do conceito de prova a partir da prova do T4C. Comparativamente falando, ao afirmar que a não-inspecionabilidade dos cálculos envolvidos na prova do lema principal implica na empiricização do processo de prova do T4C é como se Tymoczko estivesse afirmando que na medida em que só podemos chegar a um determinado lugar (digamos, o enunciado do T4C como resultado do ato de prová-lo) utilizando, em uma parte do caminho (a prova do lema chave de redutibilidade), um determinado meio de transporte (o computador), então não se trata mais de um percurso no sentido tradicional (uma prova levada a cabo mentalmente ou com papel e caneta). Seríamos, assim, forçados a modificar o sentido vigente de percurso, de modo a incluir em seu conceito a "artificialidade" (entendida como algo da ordem empírica) do meio de transporte utilizado na prática de transladar-se.[141]

Teller parece ter observado algo similar ao afirmar:

> Diferentes matemáticos inspecionam e verificam provas diferentemente, e há muito se tem utilizado instrumentos como papel e caneta, e às vezes quadros, réguas ou calculadoras. Os limites de qualquer poder de julgamento dos matemáticos dependem, dentre outras coisas, de quais ferramentas são utilizadas. (Teller, 1980, p. 798)

Considerando-se as observações tecidas desde a perspectiva da tradição do conhecimento simbólico, a resposta de Detlefsen e Luker ao artigo de Tymoczko parece mais adequada que as respostas de Teller e Swart. Mas isso somente na medida em que atentam para a importância de uma análise da noção de cálculo ou computação. Em um trecho que se segue à passagem citada acima (p. 116), os autores afirmam que "[um] episódio de cálculo pode ser um 'experimento de pensamento' levado a cabo na cabeça do matemático ou um experimento visual

[141] Nesse sentido conferir *Understanding media: the extension of man*, o clássico estudo de Marshall McLuhan sobre os artefatos que *estendem* nossas mais diversas capacidades e, ponto fundamental, forjam novas capacidades e habilidades. Cf. também a citação de Appel fornecida na p. 34 acima.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

levado a cabo com papel e caneta, *mas é sempre um experimento*." (Detlefsen & Luker, 1980, pp. 814, grifos nossos)

Vemos aí a radicalização de uma ideia de Tymoczko, qual seja, de que a parte computacionalmente auxiliada da prova do T4C constitui uma lacuna "preenchida" pelo resultado de um "well-thought-out experiment". (Tymoczko, 1979, p.58)

No que se refere à pergunta de Prawitz – sobre o significado filosófico da prova do T4C – Detlefsen e Luker acreditam que outros resultados são ainda mais representativos de alterações paradigmáticas nas práticas matemáticas de prova do que a prova fornecida pela equipe de Appel e Haken.[142] Trata-se, especificamente, do "algoritmo de Rabin", um algoritmo probabilístico desenvolvido para resolver eficientemente problemas – como o de determinar a primalidade de grandes números – sem apresentar provas, mas soluções não-dedutivas (probabilísticas). Assim, os autores sustentam a novidade na medida em que raciocínios probabilísticos – diferentemente do papel meramente heurístico que desempenham no desenvolvimento do algoritmo de descarga – constituem, de modo significativo nesse caso, a *justificação* de resultados matemáticos. E qual seria a diferença com relação ao que tradicionalmente se faz ao provar teoremas? A possibilidade de erro no procedimento computacionalmente executado. Com isso, vemos retornar um elemento do AIE de Tymoczko (contido na conclusão) já analisado por Prawitz nos termos do vocabulário de Hume, a saber: a progressiva eliminação da possibilidade de erro, conforme se realizam repetições do procedimento de prova ou cálculo mais e mais vezes, aumentando a confiança de que o resultado é correto.

Nesse sentido, provas computacionalmente complexas como a do T4C, cuja justificação depende de elementos calculatórios, só adquiririam sinopticidade se pudéssemos "comprimir" a cadeia das articulações dedutivas operadas pelo computador em nossa memória, como sugeria Descartes.[143] O computador "alivia-

[142] Cf. cap II, final da seção 2.3, a classificação de McEvoy.

[143] E também Poincaré, na conferência *L'invention mathématique*: "Em uma palavra, minha memória não é ruim, mas ela seria insuficiente para fazer de mim um bom jogador de xadrez. Por que, então, ela não me faz falta em um raciocínio matemático difícil no qual a maior parte dos jogadores de xadrez se perderia? Evidentemente porque ela é guiada pela marcha geral do raciocínio. Uma demonstração matemática não é uma simples justaposição de silogismos, são silogismos *dispostos em uma certa ordem*, e a ordem na qual os elementos são dispostos é mais importante do que os elementos mesmos. Se sinto, se tenho por assim dizer a intuição dessa ordem, de modo a perceber **d'un coup d'œil** o conjunto do raciocínio, não devo temer esquecer os elementos, cada um deles se disporá por si mesmo no quadro que lhe foi preparado, e sem que eu precise fazer qualquer esforço de memória." (Poincaré, 1908, p. 360, nossa tradução)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

nos" do encargo de memorizar todos os resultados dos cálculos, fazendo o trabalho que Saaty & Kainen compararam ao de um *idiot savant*.[144]

Assim, mesmo que os cálculos fossem considerados sob seu aspecto de processos empíricos, o que geram é um resultado que no contexto geral da prova do T4C pode ser tomado como *hipoteticamente necessário* ou funcionalmente *a priori.* Que, por sua vez, eles componham perspicuamente uma imagem sinóptica da prova como um todo é algo que parece depender da disponibilidade em aceitar que aquela posse "coletiva" do algoritmo ou do programa conta como "posse de um procedimento efetivo de decisão" para o problema. Ao acolher, desse modo, as redes de codificações simbólicas que fazem com que o computador guarde em sua memória os resultados calculatórios como parte de um todo maior que, esse sim, é capaz de ser intuído como um símbolo, está-se assentindo em "vê-lo" ou "compreendê-lo" do mesmo modo que se vê ou compreende um mapa temático, digamos, da rede de metrô de uma cidade, que mostra as conexões entre as estações.[145]

Caberia ainda observar que a distinção entre inspecionabilidade e sinopticidade parece concordar com a distinção entre provas *simpliciter*, formais e assistidas por computador, no seguinte sentido: a inspecionabilidade é uma exigência para provas formais e assistidas por computador, que nem sequer existiriam não fosse possível desmembrar em diferentes níveis lógicos alguns passos do raciocínio que compõem a prova. A sinopticidade, a seu turno, é virtude que se pode exigir apenas de provas *simpliciter*, que serão mais ou menos

[144] Não custa lembrar que nos estamos referindo ao texto citado na p. 18 acima. O termo *idiot savant* designa algo pejorativamente pessoas (em geral diagnosticadas como autistas) que possuem uma capacidade extraordinária para realizar uma só atividade (como calcular números imensos ou lembrar todos os nomes de uma lista telefônica). O personagem do filme *Rain Man*, Kim Peek, talvez seja a representação mais popular de alguém que vive nessa condição. Vale também resgatar aqui a passagem de Leibniz citada ao final do primeiro capítulo, p. 34.

[145] No capítulo IV *Filosofia das Formas Simbólicas III*, Ernst Cassirer sintetiza: "Em lugar da sucessão de passos do pensamento deveria haver uma simultaneidade de visões gerais. Somente o pensamento simbólico é capaz de realizar tal feito. Isso porque, em virtude de sua própria natureza, ele não opera com os próprios conteúdos do pensamento, mas correlaciona a todo conteúdo do pensamento determinado signo, e é por força dessa correlação que se atinge a condensação que torna possível concentrar todos os membros de uma complexa cadeia de provas em uma única fórmula e englobá-los em uma só visão como uma totalidade articulada. É essa ideia básica da 'característica de Leibniz' que foi retomada por Hilbert em sua 'formalização' dos processos dedutivos lógicos e matemáticos e que agora, graças à ampliação do âmbito da matemática, bem como do refinamento e aprofundamento extraordinários de seus instrumentos conceituais, parece por fim estar suficientemente amadurecida para que possa ser de fato posta em prática. Entendemos agora por que Hilbert deu tanta ênfase ao fato de os objetos aos quais as inferências matemáticas se relacionam precisarem ser constituídos de tal forma que possam ser prescrutados em todas as suas partes e reconhecidos de modo universal e seguro. Não são as coisas, mas somente os signos que tornam possível tal 'recognição', e com isso livram o pensamento dos riscos e da ambiguidade de uma mera reprodução." (Cassirer, 2011, p. 661-2)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

sinópticas conforme o contexto de sua apresentação, suas funções (ilustrar uma técnica, justificar o uso de axiomas e definições, apresentar uma prova em contexto didático, acadêmico, etc).

Vale sublinhar que essas associações não pretendem servir como critério de hierarquização de provas – provas formais não são mais rigorosas que provas *simpliciter*.[146] Que um tipo de *surveyability* em algum sentido dependa do outro – questão que Bassler responde afirmando que *sinopticidade é independente de inspecionabilidade* – é algo que, como veremos, desde uma perspectiva wittgensteiniana caracteriza um tipo de problema filosófico engendrado no seio dos projetos fundacionalistas e que arrogou-se, ao menos por um tempo, a competância de tentar dissolver.

5.3.2
Dos limites da sinopticidade da prova do T4C

Em artigo publicado em 1986, posteriormente incluído em *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*,[147] Stuart Shanker sustenta que boa parte das controvérsias em torno da prova do T4C exemplifica um tipo de confusão categorial que recebeu especial atenção da parte de Wittgenstein – entre provas e experimentos. Ele se refere especificamente a autores de quem já tratamos: Tymoczko, Saaty & Kainen e, especialmente, Detlefsen & Luker que, como vimos *identificam* cálculos com experimentos.

Shanker afirma que tanto a prova do T4C quanto os comentários filosóficos acerca dela representam um duplo embaraço para os argumentos wittgensteinianos sobre a natureza das provas matemáticas. De acordo com o autor, tais argumentos insistem na exigência de que provas matemáticas preservem sinopticidade (*surveyability* e *perspicuity* são usados indiscriminadamente como tradução para *Übersichtlichkeit*) e dedicam-se especialmente ao problema do estatuto das proposições indecidíveis. Com relação ao último ponto, nada diremos aqui. Apresentaremos brevemente os principais "argumentos de surveyability" de Shanker com a finalidade de mostrar que

[146] Cf. notas 58 e 136 acima. Sobre a questão do rigor em provas informais pode-se com proveito consultar "Informal Rigour and Completeness Proofs" (Kreisel, 1967).

[147] "The Appel-Haken solution of the Four-Colour Problem" apareceu no terceiro volume da coletânea, organizada pelo próprio Shanker, *Wittgenstein: Critical Assessements*. London: Croom Helm, 1986. O referido livro de Shanker, por sua vez, foi publicado em 1987.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

mesmo sendo wittgensteiniano o anúncio de seu objetivo – um esclarecimento lógico ou gramatical do resultado de Appel e Haken – ele acaba alcançando conclusões, no todo, pouco wittgensteinianas.

Os "argumentos wittgensteinianos" de Shanker contra a atribuição de "matematicidade" à solução de Appel e Haken, e contra o AIE de Tymoczko, são formulados no contexto de sua reconstrução da filosofia da matemática do vienense a partir de alguns textos do período intermediário. Esses textos apresentam peculiares desafios e dificuldades, uma vez que nessa fase de seu pensamento[148] questões centralíssimas da primeira filosofia de Wittgenstein estavam constantemente sendo criticadas, discutidas e reformuladas. Parece, portanto, no mínimo precipitada a postura de Shanker, ilustrada no tipo de pergunta que formula: como Wittgenstein responderia à prova do T4C? Sem problematizar a questão ela mesma, diremos que qualquer resposta que não leve em conta a especificidade (para não dizer a volatilidade) dos textos do período intermediário está irrevogavelmente por assim dizer amarrada à ilusão que consiste em julgá-los como possível última palavra do filósofo.[149]

Resumindo de maneira um tanto drástica pode-se dizer que uma das principais ideias de Wittgenstein que Shanker aciona para suportar a conclusão geral – de que "o que eles [Appel e Haken] ofereceram não foi uma prova da existência do conjunto inevitável de configurações, mas uma *descrição do procedimento experimental utilizado para descobrí-lo*" (Shanker, 1987, p. 157, grifos nossos) – é a de que uma prova matemática deve preservar a característica

[148] O "período intermediário", ao qual também se costuma referir como "middle Wittgenstein", vai desde 1929 – quando, retornando a Cambridge, Wittgenstein retorna também à filosofia, da qual havia se afastado institucionalmente desde a publicação do *Tractatus* – até meados de 1934 (embora também se considerem alguns textos de 1936, cf. "The 'Middle Wittgenstein and Modern Mathematics" (Stenlund, 2012a)). Não queremos sugerir que a leitura dos textos desse período seja irrelevante em se tratando de compreender determinados movimentos de pensamento de Wittgenstein. Nosso ponto aqui é tão somente sublinhar o fato de que apenas com base nesses textos não se pode sustentar uma posição legitimamente wittgensteiniana.

[149] Uma abordagem propriamente wittgensteineana consistiria em procurar *descrever* como as práticas matemáticas que se pretende analisar de fato tomam vida, do que fixar-se em afirmações contidas em fragmentos que, agrupados sem muito critério, confundem mais do que esclarecem a compreensão daquelas práticas – no caso específico, a prova do T4C. Esse tipo de estratégia de Wittgenstein, entretanto, não foi muito bem recebido pelos primeiros (filósofos e matemáticos) que resenharam suas observações sobre matemática reunidas em RFM – o que se percebe nos reclames de que os exemplos de provas e "situações matemáticas" de que tratava Wittgenstein são demasiadamente simplificados. Uma avaliação desse contexto de recepção encontra-se em "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", (Wrigley, 1986). Para o caso específico das más compreensões acerca das observações de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel pode-se com proveito conferir o apêndice da tese de Camila Jourdan "Impredicatividade, Generalidade e o Desenvolvimento do pensamento de Wittgenstein" (Jourdan, 2009).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

da *Übersichtlichkeit*, que associaremos com o conceito de sinopticidade. O autor observa que o próprio Wittgenstein tinha dificuldades com a tradução do termo para a língua inglesa,[150] optando por apontar, a título de esclarecimento, para o que uma *Übersicht* gera não no caso das provas matemáticas, mas em investigações filosóficas: "o ponto fundamental de uma *Übersicht* em investigações filosóficas consiste em que deveria clarificar as articulações lógicas forjadas pelas convenções gramaticais." (Shanker, 1987 p. 122)

A partir daí o autor segue reconstruindo o sentido da expressão, utilizando indistintamente aforismos da *Gramática* e das *Observações filosóficas*[151] sem jamais levantar qualquer dúvida quanto a possíveis diferenças entre uma *Übersicht* de provas matemáticas e aquela que deveria resultar de investigações gramaticais – nem tampouco o fato de que a noção mesma de gramática, herdeira da noção tractariana de lógica, é uma daquelas que estão sendo repensadas e transformadas em boa parte dos textos do período. O que se deve destacar é o fato de que Shanker insiste em evitar a inserção de elementos epistemológicos na reconstrução da noção wittgensteiniana de sinopticidade de provas. Por "elementos epistemológicos" Shanker compreende, por exemplo, preocupações com o que denomina de "limitações médicas" ou "capacidades de recognição": nossa capacidade limitada de memória ou nossa incapacidade de, por exemplo, construir apenas com a operação de soma o cardinal expresso por 10^{10x10}. Nesse sentido, o autor afirma:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

[150] No que ele segue as observações de Baker e Hacker na primeira edição do comentário analítico às IF (*Wittgenstein, Understanding and Meaning, Vol. I*). Sua exegese do §92 afirma, "(ii) *Übersicht*: Wittgenstein parafraseou como 'tornar-se transparente. Quero dizer, capaz de ser visto num relance (PPI(R) §100).' Aqui Wittgenstein, como seus tradutores, sentiu dificuldade em traduzir *Übersicht* e seus cognatos." (Baker e Hacker, 1980, p. 495). A segunda edição do comentário inclui uma nova seção sobre *Übersichtlickeit*, dedicada ao famoso § 122. Recentemente Hacker disponibilizou na internet o texto de uma palestra conferida em 2009 na Utrecht University sob o título "Proof in Mathematics": "a slightly modified excerpt from a very much longer essay entitled 'Grammar and Necessity' in the 2nd edition of G. P. Baker and P. M. S. Hacker, *Wittgenstein: Rules, Grammar and Necessity* (Wiley-Blackwell, Oxford, 2009), pp. 241-370". Para a interpretação "dissidente" de Baker cf. o primeiro capítulo do póstumo *Wittgenstein's Method: neglected aspects: essays on Wittgenstein* (Baker, 2005).

[151] Os textos do período intermediário que, ao lado das conversações com Waissman e Schilck, são utilizados por Shanker. O autor utiliza ainda passagens as RFM, que começaram a ser anotadas em 1939, fazendo parte portanto da fase madura do pensamento do vienense. Deve-se acrescentar à bibliografia que contém observações do período intermediário pelo menos diversas passagens das *Vermichte Bemerkungen* editadas por G. H. von Wright (*Culture and Value*, *Remarques mêlées*), *Zetttel* (*Fichas*), as Wittgenstein's *Lectures Cambridge 1930-32*, e o *Big Typescript*. Para informações sobre a especificidade do último cf. o texto de Mauro Engelmann "O que é o *Big Typescript*?" (Engelman, 2009b).

> Devemos nos distanciar das tentativas de forçar os comentários de Wittgenstein sobre sinopticidade em um quadro epistemológico e portanto cético e reconhecer, ao invés disso, que ele estava interessado, e.g., pela relação de um número com a lei que gera a série na qual ele ocorre. **É a lei** que governa a expansão da série, não sua atual expansão, **o que deve ser sinóptico**. (Shanker, 1987, p. 128)

A primeira parte dessa passagem associa questões epistemológicas com problemas relativos aos possíveis erros escondidos em processos que não somos capazes de inspecionar. Esses problemas "céticos", que se devem evitar, suporiam para Wittgenstein a possibilidade de que tais processos de algum modo ocorressem independentemente de nossas capacidades de lhes acompanhar. Já na segunda parte da passagem, Shanker menciona o interesse tractariano na elaboração de uma concepção intensional da matemática, que permitiria conceber a totalidade de todos os números, apoiada na noção de número não como objeto, mas como propriedade de uma série formal.

Wittgenstein estava, então, preocupado em esclarecer as confusões que surgem quando se identificam totalidades finitas com processos ou séries infinitas (que são "séries formais" no sentido da aplicabilidade de uma operação).[152] Importa observar que para Shanker o apelo ao problema tractariano, da relação entre operação (ele usa sempre *law*) e a série formal gerada ao executá-la, ajudaria a mostrar que o que determina a capacidade de uma construção como a de Appel e Haken ser uma prova sinóptica equivale, para Wittgenstein, à posse de um procedimento efetivo de decisão para quaisquer questões relativas aos membros do sistema no qual a construção é estabelecida. O autor afirma nesse sentido que "o ponto que Wittgenstein estava elaborando é o simples ponto **essencialmente lógico** de que o *Beweissystem* erige os limites da perspicuidade não menos que os do sentido." (Shanker, 1987, p. 129, grifo nosso) Lembrando da exposição sobre o ponto de vista de Prawitz realizada anteriormente talvez seja possível dizer que se Shanker está correto em sua interpretação, é bastante wittgensteiniana a perspectiva de Prawitz, na medida em que, como vimos, provar como um ato corresponde para o filósofo sueco à possibilidade de realizar uma determinada operação sobre bases dadas – possibilidade fornecida pela posse de um procedimento efetivo para a realização da operação.

[152] Detalhes a esse respeito podem ser obtidos no segundo capítulo de Marion (1998), no sexto capítulo de Marion (2004) bem como na seção 2.5 da referida tese de Jourdan.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

De todo modo, esse é o quadro no qual Shanker vai elaborar uma série de considerações cujo objetivo é a conclusão acima anunciada de que a equipe de Appel e Haken em realidade não apresentou uma prova do lema de D-redutibilidade, mas "apenas uma descrição" dos procedimentos pelos quais o computador construiu os casos a ela necessários. Vejamos:

> Wittgenstein argumenta que o octaedro de cores deve ser sinóptico no sentido de que **as articulações lógicas forjadas pelas construções gramaticais** são perspícuas. Do mesmo modo, uma prova deve ser sinóptica no sentido de que podemos apreender [*grasp*] a 'lei' forjada pela prova: 'Devo ser capaz de escrever uma parte da série de modo que você possa reconhecer a lei. Isto é, **nenhuma *descrição* deve ocorrer** no que é escrito, tudo deve ser representado.' (PR §190) Mas essa é **precisamente a condição que a solução de Appel e Haken não satisfaz: o que é dado é uma descrição** de *U* – **junto com as operações** que o computador realizou para testar sua redutibilidade – **e não uma 'manifestação da lei'** para a geração de conjuntos inevitáveis de configurações redutíveis. (Shanker, 1987, p. 153, grifo nosso)

Ora, temos insistido a partir de Prawitz que a descrição do algoritmo de descarga conta como posse de um procedimento efetivo para a solução do problema de construir um conjunto *U* de configurações redutíveis – *constituindo*, portanto, o sistema de prova, o *Beweissystem* no qual o T4C é provado. Ademais observamos acima (pp. 92-93) que no caso de programas escritos em linguagem de baixo nível como a utilizada na construção do algoritmo com o qual a prova do lema chave é produzida, a descrição do procedimento também instrui ou capacita a realizá-lo. O que se descreve nos artigos de Appel e Haken é, digamos, o modo como uma "operação formal" (que poderíamos realizar caso tivéssemos mais memória e tempo) gera uma série finita (os casos listados no conjunto *U*). O algoritmo cumpre, ao ser executado, a função de determinar o sentido mesmo do T4C, é constitutivo de seu método de prova. Por que isso não é o caso para o Wittgenstein de Shanker?

De acordo com a passagem acima, ele não aceitaria a descrição do algoritmo (e do conjunto *U* que ele gera ao se executado) como posse de um procedimento efetivo de construção na medida em que elas não permitiriam uma apreensão da "manifestação da lei" que, executada, constrói *U*. Além disso, porque, de acordo com o parágrafo selecionado da *Gramática*, Wittgenstein não outorgaria qualquer descrição em processos de prova. Diante disso, e lembrando que o autor está preocupado em não introduzir considerações sobre "limitações médicas", podem-se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

elaborar várias perguntas: Em que consistiria apreender uma "manifestação da lei" que gera o conjunto *U*? Seu reconhecimento nos é impedido por que o conjunto foi construído por cálculo mecanicamente executados? Em que essa apreensão difere com relação à posse do algoritmo executado? A apreensibilidade de "manifestações normativas" é de que tipo: *inspecionabilidade* ou *sinopticidade*?

À primeira questão o autor responde remetendo à ideia de que "o programa não é uma aplicação mas, ao contrário, seria constitutivo do que chamaríamos de 'conjunto inevitável de configurações redutíveis'." (Shanker, 1987, p. 154) Shanker entende, portanto, que o operar do computador por assim dizer *esconde* as relações internas em jogo nos cálculos, uma vez que não podemos acompanhar a execução do programa passo a passo. Mas o problema é que para Wittgenstein uma *relação interna* é sempre uma relação constitutiva ou estrutural.[153] Desse modo, na medida em que o algoritmo como conjunto de instruções formais para operações que, repetidas, geram o conjunto *U*, e que sabemos qual a função da geração desse conjunto no todo da prova – conectar a noção de conjunto inevitável de configurações com a de redutibilidade, para alcançar o absurdo – como sustentar que a "lei" não se manifesta? Além do mais, apostar que Wittgenstein permaneceu subscrevendo à ideia mesma de "manifestação da lei" – como se a operação que gera os casos pudesse existir mas estar em algum sentido oculta – é bastante problemático. Como nota Jacques Bouveresse, falando da posição tardia de Wittgenstein (e, portanto, posterior à defendida no período intermediário): "ele se esforça por esvaziar de todo modo

[153] A expressão *sempre* deve ser enfatizada. Ao referir-se ao tema no *TLP*, Marion afirma: "Uma operação é definida como 'a expressão de uma relação entre as estruturas de seus resultados e suas bases (TLP, 5.22)" (Marion, 1998, p. 23) Segue-se, então, uma nota importante para nosso trabalho: "Wittgenstein aponta ainda para o fato de que 'o conceito de operação é geralmente aquele de acordo com o qual signos podem ser construídos de acordo com uma regra' (NB, p. 90) e que '[u]ma operação é o que deve acontecer a uma proposição para que se transforme em outra. E isso naturalmente depende de suas propriedades formais, das similaridades internas de suas formas' (TLP, 5.23 – 5.231)], i.e. que uma operação é definida mostrando como se toma um *input* e como se o transforma em um *output*." (*loc .cit.*)" No texto principal, explica-se que, na terminologia de Wittgenstein, "uma lei formal é uma 'operação' ou 'uma relação interna' (...) duas entidades são ditas internamente relacionadas se é inconcebível que não estejam em tal relação." (*op. cit*. p. 24) A semelhança dessa definição com uma das definições kantianas de juízo analítico é notável. (Cf. nota 113 acima) Outra observação na qual Wittgenstein deixa mais claro o ponto consta nas LFM: "Uma relação interna não é nunca uma relação entre dois objetos, mas você poderia chamá-la de uma relação entre dois conceitos. E uma sentença asserindo uma relação interna entre dois objetos tal como uma sentença matemática, está não descrevendo objetos, mas sim construindo conceitos." (Wittgenstein, LFM, p. 73) Sobre a centralidade do conceito de operação até a filosofia tardia cf. o capítulo final da supracitada tese de Jourdan.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

possível da matemática, por causa de suas ressonâncias metafísicas, a noção tradicional de 'lei' em favor daquela de 'regra'." (Bouveresse, 1971, p. 171)

Por fim, afirmar que o programa é constitutivo do conjunto *U* não seria justamente razão para aceitar, *com Wittgenstein*, que se trata de um procedimento de prova? Não poderíamos pensar que as descrições do programa e do conjunto gerado possuem uma *função normativa* na prova, na medida em que correspondem, senão ao seguir mesmo de regras, ao menos à sua simulação formal nos computadores?

Vimos, no terceiro capítulo,[154] que desde uma perspectiva dinâmica como a de Pap seria possível problematizar o argumento de Tymoczko, reativado por Shanker, mostrando que o programa não cumpre qualquer função descritiva na prova (embora seja "descrito" para quem quiser executá-lo à mão).[155] Mas o próprio Shanker nos dá elementos para essa problematização, pois reconhece que o programa é constitutivo de parte da solução! Do mesmo modo que Tymoczko (o que talvez explique parcialmente sua confusão), Shanker considera que quando o computador é utilizado para construir os casos com os quais se prova o lema de redutibilidade, realizam-se raciocínios probabilísticos – o que de algum modo nos expulsaria do domínio matemático. Mas, lembremos: esse uso foi feito na fase de determinação do algoritmo e não em sua execução ou verificação.[156] Confundindo os dois usos, como então afirmar que Wittgenstein não aceitaria o segundo uso como parte de um legítimo sistema de prova, já que constitui seu método?

Nesse ponto, a única diferença da abordagem de Shanker com relação a de Tymoczko é que ele, muito wittgensteinianamente, não aceita a tese da "hibridização", da mistura entre prova e experimento no caso do T4C, mas conclui, como já sabemos, que a solução não é matemática, senão empírica. O problema permanece, entretanto, no fato de que ambos os autores confundem os usos instrumental/heurístico e o uso repetição/verificação dos computadores na prova. Se algum processo de cálculo possui mais similaridades com o que julgamos ser experimentos, seria o da fase da descoberta ou determinação, e não da aplicação do algoritmo na construção do conjunto *U*. Ainda assim, a partir do momento em que o

[154] Cf. p. 89.
[155] Comparar com a "descrição" que Tymoczko fornece da prova de Gauss, p. 114.
[156] Mesmo assim, já foi observado (p. 81 acima, por exemplo) também que raciocínios probabilísticos em matemática são dedutivos e não se assemelham relevantemente a casos de uso probabilidade na física.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

algoritmo computacionalmente executado “entra no sistema de prova”, como padrão, está garantida sua função *a priori*, ou condição normativa.

Por fim, caberia perguntar se o modo como Shanker lê a exigência wittgensteiniana de *Übersichtlichkeit* de provas poderia ser equacionado com a ideia que apresentamos anteriormente, de que provas são manifestações simbólicas que ocorrem em distintos contextos e, portanto, não podem ser pensadas como algo que *sempre e para todo auditório* deva preservar o mesmo grau de sinopticidade. Ou seja: a “manifestação da lei” deve ser manifesta para quem? Parece-nos adequar-se a esse ponto uma observação de Teller:

> O fato de que eu não possa acompanhar uma prova complexa produzida por um bom matemático não mostra que essa prova é uma prova num sentido diferente do que uma prova que eu possa seguir. Do mesmo modo, o fato de que nenhum matemático possa acompanhar uma prova produzida por um computador não mostra que essa prova é apenas uma prova mas em um novo sentido. (Teller, 1980, p. 800)

Não subscrevemos à ideia de Teller de que um computador possa propriamente produzir, construir ou realizar uma prova, seja do tipo *simpliciter* ou não. Nosso ponto é que algumas provas podem ser *assistidas* ou mesmo *verificadas por* computadores, embora não sejam realizadas por eles. Com relação ao ato de calcular, é muito provável que já não se possa dizer o mesmo, embora também não se possa dizer, como Shanker, que calcular mecânico (ou mecanicamente simulado) equivalha à construção de soluções experimentais. Provas, mesmo assistidas por computadores, são *affairs* humanos, estando inseridas em determinados contextos institucionais de práticas – escolares, acadêmicas, científicas. Verificações de provas também foram, durante muito tempo, realizadas somente por seres humanos, mas dado que os processos que as constituem podem ser mecanizáveis, esse trabalho foi relegado às máquinas – embora sempre em grande medida seja um trabalho supervisionado por uma ou um conjunto de pessoas.

A passagem acima apenas lembra mais uma vez que verificar (no sentido de reproduzir passo por passo) pode ser um ato mecanicamente auxiliado. Nesse sentido, a leitura de Shanker, segundo a qual não temos acesso às relações normativas em jogo nos cálculos mecânicos, não apenas descontextualiza as observações selecionadas de Wittgenstein como parece ignorar por completo o fato de que o filósofo não pretendia formular qualquer afirmação que desembocasse em uma conclusão similar à sua (dogmática), com relação a uma

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

prova aceita pela comunidade matemática enquanto tal.[157] Wittgenstein talvez dissesse: provas assistidas por computador são, ou podem se transformar (conforme sejam mais frequentemente realizadas) em fatos da "história natural do homem" – uma observação que acaba sugerindo um teor fortemente não-revisionista em sua filosofia, pois ao filósofo cabe descrever as práticas matemáticas, não legislar sobre elas.

Por fim, tomar, como Shanker, a observação de Wittgenstein que nada se descreve em matemática como fundamento para identificar as descrições dos programas (que nada mais são do que conjuntos de instruções para operações formais mecanicamente executáveis, uma nova técnica) com as descrições que tipicamente ocorrem em experimentos, nos parece um equívoco. Ainda mais em se tratando de pressupor que no âmbito experimental não ocorrem "manifestações normativas" similares às matemáticas, o que buscamos destacar no capítulo anterior como um aspecto relevante para nossa discussão na medida em que aponta para a possibilidade de modificações funcionais de algumas sentenças em determinados contextos de investigação. Não se trata aqui de afirmar que Shanker não tem um ponto, afinal a sinopticidade é, para Wittgenstein, o critério a partir do qual se diferenciam processos de prova – característico do conjunto de sistemas normativos que é a matemática – e de experimentos, típico do domínio descritivo da linguagem, e pelos quais a matemática é aplicada nas descrições do mundo físico. Como procuraremos mostrar no capítulo seguinte, entretanto, acionar sem muito cuidado esse critério ao caso da prova do T4C pode não ser frutífero para a discussão

Parece-nos possível afirmar que se levarmos em conta algumas modificações à época em curso no pensamento de Wittgenstein quanto ao estatuto de provas, e mesmo de regras gramaticais (sua distinção categorial com relação a proposições empíricas, os processos pelos quais transformamos umas em outras), as observações do vienense estariam melhor alocadas ao lado daquelas de Pap do que das de Shanker, que lhe pretende dar voz.

Vale notar, ainda, que Mauro Engelmann, em "The Multiple Complete Systems Conception as *Fil Conducteur* of Wittgenstein's Philosophy of

[157] "Só podemos evitar a injustiça ou o vazio de nossas afirmações, na medida em que apresentamos o modelo como aquilo que ele é, ou seja, como objeto de comparação – por assim dizer, como critério –; e não como prejuízo, ao qual a realidade deva corresponder. (O dogmatismo no qual tão facilmente caímos ao filosofar)" (IF § 131) Para uma abordagem das preocupações de Wittgenstein com o dogmatismo cf. (Stenlund, 2012a).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

Mathematics", observa algo importante com relação a essa associação, pois poderia reforçá-la:

> Wittgenstein alega [no *Livro Amarelo*] que podemos pensar que uma e a mesma sentença passa por "uma transição entre uma hipótese e uma regra gramatical (Wittgenstein, 2001, 70). Ele diz ainda, nas *Lectures* de 1934-5: "É bem possível para uma proposição de experiência tornar-se uma regra de gramática (Wittgenstein, 2001, 160). [...] A possibilidade de transição de uma sentença *a priori* em uma sentença empírica expressa uma importante ruptura na filosofia de Wittgenstein. (Engelmann, 2009a, p. 112)

Ou seja, Wittgenstein parece ter se dado conta ainda no período intermediário[158] da plausibilidade de uma concepção algo similar àquela do *a priori* funcional. De todo modo, já estávamos anotando desde os capítulos anteriores para nossa aceitação de um dos, digamos, resultados da filosofia da matemática do Wittgenstein tardio, resultado derivado de sua metodologia descritiva, qual seja: o de que a matemática é uma espécie de agregado de diferentes técnicas de prova (de "múltiplos sistemas completos", nas palavras de Engelmann).

5.4
Notas finais

Nossa apresentação da estréia de temas wittgensteineanos nas disputas em torno da prova do T4C termina resgatando as perguntas que sugerimos formular diante da alegação "à la Wittgenstein" de Shanker – de que à descrição do conjunto *U* e dos programas faltaria a apreensibilidade de relações internas, dado que não se pode "reconhecer a lei", a operação que gera o conjunto através das instruções descritas. Perguntávamos: O reconhecimento dessa 'manifestação da lei' nos é impedido por que o conjunto foi construído por cálculos mecanicamente executados? A apreensibilidade de uma manifestação normativa é de que tipo: calculatória/local/inspecionabilidade ou conceitual/global/sinopticidade?

Todas essas questões não podem ser respondidas desde uma perspectiva de espírito wittgensteiniano sem que se adentre na seara das discussões sobre em que consiste seguir uma regra – uma das questões mais importantes e complexas do

[158] O *Livro Amarelo* é uma coletânea dos ditados de Wittgenstein a um grupo de alunos, que data da época da redação do *Livro Azul* – que, por sua vez, representa, junto com o *Livro Marrom*, a "virada dos anos 1934-5" no pensamento de Wittgenstein. Cf. "The Yellow Book Notes in Relation to 'The Blue Book'" (Ambrose, 1977).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

pensamento de Wittgenstein. De todo modo parece que Shanker foi insensível ao fato de que essas discussões estavam, sobretudo à época dos textos por ele utilizados, apenas começando a ser lapidadas – o que parece tornar razoável a exigência de que se atente para os textos de maturidade como a fonte de elementos adequados ao *esprit* da filosofia de Wittgenstein e à sua legítima aplicação ao caso do T4C.

A resposta de Shanker à pergunta sobre em que consiste a apreensibilidade a que se refere insinua-se ao final do texto, ao citar uma passagem de *Concepts of Modern Mathematics*. Nela, como vimos no primeiro capítulo, Stewart reclama que a prova de Appel e Haken é "aparentemente sem estrutura",[159] ou seja, não explica *as razões* pelas quais o conjunto inevitável de configurações redutíveis existe. Com isso o autor aproxima-se de uma ideia que queria evitar (porque introduz elementos epistemológicos onde não deveriam), qual seja, a de que a falta de inspecionabilidade do procedimento corresponde a não compreendermos as razões pelas quais o conjunto inevitável de configurações é de fato redutível (mesmo que ele não fale em compreensão, o que pode ser "apreender razões" senão compreender como se conectam conceitos através de algumas regras?) – a conhecida objeção de que a prova do T4C não é explicativa.

A isso podemos responder lembrando que provas por casos, ainda mais com um número imenso deles, não são explicativas no mesmo sentido em que outras provas poderiam ser consideradas – o que não faz delas menos provas (ou mais experimentos). As razões pelas quais o conjunto *U* de configurações é redutível são dadas pelo sistema simbólico no qual a prova é produzida (o domínio da combinatória), pelas estratégias escolhidas para solucionar o problema, realizar a prova (redução por absurdo que inclui uma provas por casos) e que consistem: na definição mesma dos conceitos de mapa ou grafo (ou correspondentes), de inevitabilidade e de redutibilidade; no estabelecimento dos métodos calculatórios que constroem as articulações combinatórias necessárias ao estabelecimento das articulações conceituais (entre inevitabildiade e redutibilidade). Dentre tais métodos estão incluídos os algoritmos de descarga que geram o conjunto provado redutível, etc.

Nesse sentido, apenas na medida em que não fosse possível seguir a construção nos seus passos lógicos (conceituais) é que se poderia dizer que a

[159] Cf. p. 24.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

prova não é "apreensível" em seu aspectos normativos.[160] Dito do nosso modo, Shanker ignora a distinção entre inspecionabilidade e sinopticidade: não poder realizar a clérica tarefa de calcular todas as combinações possíveis em questão nas provas de redutibilidade não pode equivaler a não "apreender a manifestação da lei" – se com isso o que se afirma é que o algoritmo executado na construção dos casos não conta como essa manifestação (pois um algoritmo consiste, precisamente, num conjunto de instruções bem definidas para a resolução de um problema: construir um conjunto com tais e tais propriedades, por exemplo).

Shanker admite, do mesmo modo que Tymoczko, que "em um sentido importante nós compreendemos porque U é redutível..." (o que equivale a dizer que é relativamente sinóptica), parecendo compartilhar o diagnóstico de Stewart:

> Uma prova *satisfatória* é uma prova que pode comunicar como um teorema se situa no esquema geral das coisas. É provável que Appel e Haken tenham uma tal compreensão do problema das quatro cores – duvido que eles tivessem construído seu conjunto inevitável sem ela – mas **sua prova não comunica o entendimento a mais ninguém**. (Stewart, 1995, p. 305)[161]

Shanker termina seu texto reforçando a tese de que o que está fazendo é realizar um esclarecimento da natureza lógico-sintática do resultado de Appel e Haken (como Tymoczko pretendeu esclarecer o conceito de prova a partir do

[160]Como veremos a seguir, um dos pontos de Wittgenstein com a repetibilidade de provas como aspecto lógico da *Übersichtlichkeit* está sem "ser capaz de reproduzir exatamente o que é essencial à prova", como afirma já no primeiro parágrafo da terceira seção das RFM.

[161]O trecho segue com uma passagem interessante: "[...] nos dias de Hilbert era crença predominante entre os matemáticos que todo teorema verdadeiro deve ter uma prova, e Gödel mostrou o quão ingênua era essa crença. Talvez seja justamente tão ingênua quanto a crença de que todo teorema provável tenha uma prova intelectualmente satisfatória" (*loc. cit*) – diríamos: a crença de que toda prova seja explicativa. Outro caso interessante de ser observado, por historicamente mais recente, é o de D. I. A. Cohen que, em "The superfluous paradigm", escreve sobre critérios de satisfação de provas: "O trabalho de Appel e Haken sobre o Problema das Quatro Cores remonta a uma confirmação de que um cartógrafo com apenas quatro potes de tinta não vai ficar sem trabalho. Isso não é uma questão com a qual matemáticos estivessem preocupados em primeiro lugar. A grande emoção da matemática é mostrar que como uma questão de puro raciocínio pode-se compreender por que quatro cores seriam suficientes. Admitir que as peripécias do computador de Appel e Haken nas fileiras da matemática apenas nos deixaria intelectualmente insatisfeitos. (Cohen, 1991, p. 328) Esse tipo de declaração nos faz lembrar mais uma vez Poincaré (em *Science et Méthode*, p. 104): "Será que compreender a demonstração de um teorema é examinar sucessivamente cada um dos silogismos e constatar que ele está correto, de acordo com as regras do jogo? Para alguns, sim; quando tiverem feito essa constatação, dirão: compreendi. Para a grande maioria, não. Quase todos são bem mais exigentes, querem saber não apenas se todos os silogismos de uma demonstração estão corretos, mas por que eles se articulam em certa ordem e não em outra. Não acham que compreenderam enquanto lhes parecer que os silogismos são fruto do capricho e não de uma inteligência constantemente consciente do objetivo a atingir. Sem dúvida, não percebem muito bem o que querem reclamar e não saberiam formular o que desejam. Mas se não forem atendidos, sentem vagamente que lhes falta alguma coisa." (citado em Hadamard, 2009, p. 125) Comparar com a epígrafe do capítulo seguinte.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

mesmo caso). Ao não aceitar que a descrição das instruções que compõem o algoritmo de redutibilidade *plus* a lista das configurações construídas a partir delas possa participar do tipo de sinopticidade que julga relevante para Wittgenstein, Shanker acaba, novamente como Tymoczko, por assim dizer legislando sobre o uso da linguagem com critérios que o próprio Wittgenstein, assim nos parece, talvez não adotasse. Isso dada a insistente primazia da função descritiva que atribui ao trabalho do filósofo frente ao trabalho do matemático. Um filósofo da matemática, nesse sentido, não teria mais muito o que fazer senão descrever as práticas matemáticas, compará-las, e talvez propor algum diálogo frutífero entre matemáticos e filósofos.[162] Ao alegar que não faz sentido "falar da 'prova do teorema das quatro cores' de Appel e Haken, muito menos que ela nos força a modificar nossa compreensão do conceito de prova e teorema" (Shanker, 1987, p. 157) – com o que também critica, na segunda parte da afirmação, uma das conclusões que Tymoczko extrai do AIE – Shanker contrapõe-se à nossa leitura das modificações que a prova do T4C coloca em ação.

De nosso ponto de vista, as transformações pertinentes ocorrem na ordem procedimental, instrumental ou metodológica – no domínio das técnicas de cálculo – e portanto constituem aquela espécie de fundo simbólico-sistemático (condição de possibilidade, e portanto *a priori*) dentro do qual provas são produzidas[163] (sistemas simbólicos de topologia algébrica, de geometria euclidiana e não-euclidiana, de aritmética elementar, ou mesmo de lógica proposicional...). Esse conjunto de condições *a priori* não necessariamente *se mostra* com a mesma clareza que as relações lógicas no octaedro de cores, afinal o *modelo wittgensteiniano de sinopticidade*:[164] "A prova de uma proposição certamente não menciona, certamente não descreve o inteiro sistema de cálculo que sustenta a proposição e lhe dá sentido." (RFM, p. 313)

Para finalmente resumir os tópicos aqui tratados, diremos que se tivéssemos de retomar à premissa (β) do AIE, reescrevendo-a a partir do que foi

[162]Cf. "Pertinence et actualité de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein" (Marion, 2004).
[163] Com o que fica mais uma vez aberta a possibilidade de associação com abordagem funcional de Pap, no sentido de que a partir dela é atribuível a isso que chamamos de "fundo simbólico-sistemático" o caráter de *a priori transcendental* ou *normativo.*
[164] Parece-nos que um dos equívocos por assim dizer metodológicos de Shanker consiste em considerar o modelo de sinopticidade como algo que se deve encontrar tal qual em cada exemplar com o qual ele é comparado, e não somente um padrão com o qual comparar as práticas que cabe descrever, reconhecendo suas diferenças.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

considerado neste capítulo, se critério epistemológico de *surveyability*, (α_b), desdobra-se em dois

($\alpha_b^{\mathbf{I}}$) inspecionabilidade (à qual se associa uma larga noção de compreensão como capacidade operatória, pensamento cego);

($\alpha_b^{\mathbf{S}}$) sinopticidade (característica vinculada a uma acepção de compreensão como "ver conexões", relações internas/conceituais/formais);

Desse modo, reescreveríamos a segunda premissa do AIE afirmando que a prova do T4C é (α_a), (α_c) e ($\alpha_b^{\mathbf{S}}$) mas não ($\alpha_b^{\mathbf{I}}$), ou seja: é convincente, formalizável e passível de apresentação/representação sinóptica, embora não seja senão humanamente inspecionável ou verificável.[165] Avaliar essa formulação desde uma perspectiva wittgensteiniana equivale a oferecer uma leitura de sua "exigência" de *Übersichtlichkeit* de provas como critério para a distinção entre provas e experimentos, leitura capaz de abarcar a distinção entre inspecionabilidade e sinopticidade, mostrando como a ausência da primeira no caso da prova do T4C não implica na ilegitimidade de sua cidadania matemática. A articulação dessa leitura aparecerá na medida em que analisarmos outra sugestão de enquadramento de temas wittgensteinianos em filosofia da matemática, no capítulo seguinte e também final.

Abaixo, apresentamos um panorama inspirado na pergunta de Prawitz sobre as controvérias em torno da prova do T4C, dispondo as posições até aqui consideradas.[166] Quanto à solução de Prawitz, que a novidade da prova do T4C consiste em possuir garantias parcialmente empíricas, apenas destacaremos que nossa apropriação da concepção funcional do *a priori* de Pap permite considerar que essas evidências, ao cumprirem a função regulativa de determinação do que se

[165] Poder-se-ia também pensar que ($\alpha_b^{\mathbf{I}}$) corresponde a uma inspecionabilidade *mecanicamente factual* mas *humanamente em princípio*? Se sim, poderia ser uma versão adaptada daquilo que em outro contexto, referindo-se às provas como figuras, foi denominado de *factual com estatuto de em princípio*? (Cf. Jourdan & Pereira, 2012)

[166] Em realidade a resposta de Swart não foi elencada, mas poderia figurar entre a resposta de Prawitz e a nossa, não fosse sua proposta de pensar o T4C como um resultado híbrido entre hipótese e teorema, que consideramos relevante apenas na medida em que é um esforço para dar conta do aspecto pragmático das provas envolvido nos processos de persuasão da comunidade em geral a partir do convencimento dos especialistas – processo que talvez Wittgenstein associasse à decisão de considerar a prova do T4C como integrante legítima do panteão da necessidade matemática, seu lugar no uso normativo da linguagem.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA

considera como garantia de que os cálculos foram corretamente executados, não podem ao mesmo tempo ser consideradas empíricas.[167]

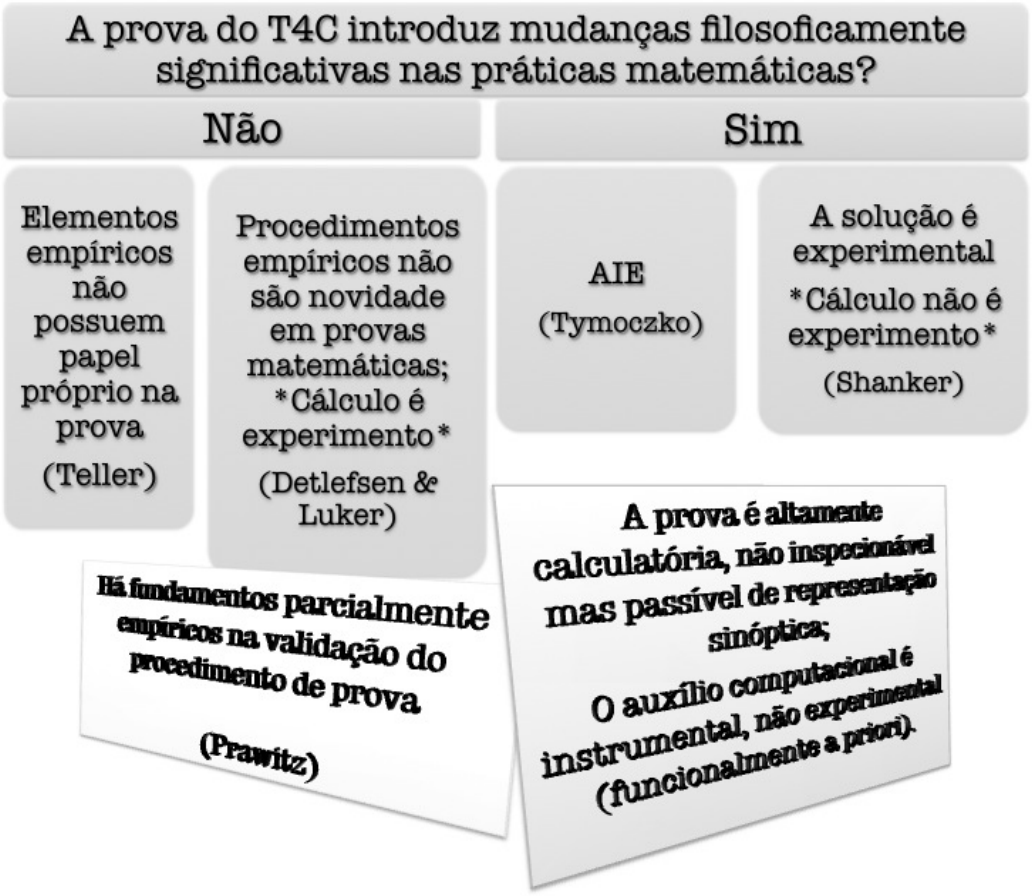

Figura 16: Um panorama das disputas em torno da prova do T4C, situando nossa posição ao lado da de Prawitz.

[167] Tyler Burge oferece, em um texto que bem poderia ser comparado com a solução de Prawitz, uma leitura do possível conteúdo empírico da prova do T4C, considerando a utilização de "conhecimentos de terceira pessoa", ou testemunhal, *como garantias a priori* (Cf. Burge, 1998).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912803/CA