

## 2

# O Teorema das Quatro Cores: História, Prova e Recepção

The more I think of it, the more evident it seems.  
If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal,  
I think I must do as the Sphinx did.  
Augustus de Morgan,  
em carta a Hamilton (1852).

### 2.1

#### Introdução: a invenção do problema

Há 160 anos alguns matemáticos profissionais e amadores perguntam-se, com variações estilísticas, o mesmo que Augustus De Morgan em nossa epígrafe. Na carta que enviou a Hamilton para apresentar aquilo que, na ocasião, era somente *um fato que não se sabia ser um fato*,<sup>1</sup> está expressa uma constante na história que esse capítulo irá delinear. A pergunta pela possibilidade de produção de uma solução simples para um problema de simples formulação pareceu desde o início aquilo que efetivamente tornou-se: um “tricky work”.

Saber se qualquer mapa pode ser colorido com apenas quatro cores sem que nenhuma região vizinha compartilhe a mesma cor foi, inicialmente, anseio de um professor de matemática. Francis Guthrie, irmão do aluno de que fala De Morgan na primeira de uma série de cartas que escreveria sobre a conjectura,<sup>2</sup> muito provavelmente não imaginava que enquanto coloria um mapa da Inglaterra estava iniciando uma longa história – mais especificamente, uma história *matemática* (que vincula sobretudo topologia, teoria dos grafos e combinatória), pois: “em cartografia, uma restrição a apenas quatro cores nunca foi necessária” (Fritsch & Fritsch, 1998, p. 12).

Embora tenha sido formulada em 1852, a Conjectura das Quatro Cores foi tema de publicação apenas em 1879, um ano após a sessão da *London Mathematical Society* na qual Arthur Cayley perguntara a respeito da submissão de uma solução ao problema trazido a público por intermédio de De Morgan. Trata-se de uma pequena

---

<sup>1</sup> “A student of mine asked me today to give him a reason for *a fact which I did not know was a fact, and do not yet*”. (In: Fritsch & Fritsch, 1998, p. 8, grifos nossos).

<sup>2</sup> Há registros de cartas, datadas de 1852 e 1853, nas quais De Morgan discute a então denominada Conjectura das Quatro Cores, além de uma resenha do livro de William Whewell, *The Philosophy of Discovery*, publicada em 1860, na qual De Morgan menciona a mesma. Detalhes acerca da história da formulação e subsequentes tentativas de solução do problema podem ser encontrados em Saaty & Kainen, 1986; Fritsch & Fritsch, 1998; MacKenzie, 2001 e Wilson, 2002.

análise do problema, de autoria do mesmo Cayley, publicada nas *Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography* (Cayley, 1879).

No ano de 1879 aparece também a primeira pretensa prova do Teorema das Quatro Cores (T4C), apresentada por Sir Alfred Bray Kempe, um advogado relacionado a *London Mathematical Society*. Essa primeira tentativa de provar o T4C merece nossa atenção na medida em que a estratégia mais geral da prova aceita hoje em dia permanece a mesma: uma prova por redução ao absurdo<sup>3</sup>, cuja assunção inicial é *a existência de pelo menos um mapa que exige cinco cores para ser colorido*, seguida da contradição por ela engendrada. Com isso obtém-se a falsificação da assunção inicial, o que torna verdadeira a afirmação de que quatro cores são suficientes para colorir todo e qualquer mapa do tipo estipulado.

O capítulo apresentará, primeiramente, a estratégia e as ideias centrais da tentativa original de provar o T4C, assinalando alguns pontos de sua história que são determinantes na descrição geral dos procedimentos utilizados por Appel e Haken na prova do T4C. Em segundo lugar, aduziremos as primeiras reações à publicação do artigo que contém a prova, apenas mencionando o artigo filosoficamente seminal de Thomas Tymoczko, sobretudo o que denominamos de *argumento da introdução da experimentação na matemática* – que será examinado em detalhe no terceiro capítulo.

## 2.2

### **A prova do T4C: estratégia geral, ideias centrais, extratos de história**

Para compreender a prova do T4C alguns esclarecimentos iniciais são necessários. Como dissemos na Introdução, não se trata aqui de uma exposição detalhada da prova, mas de uma apresentação geral de sua estrutura, bem como dos principais conceitos e procedimentos metodológicos nela envolvidos. Ao expor as diferentes subestratégias desenvolvidas na procura de uma solução para o problema, entretanto, não podemos nos privar de lidar com algumas ideias mais abstratas ou técnicas que ocorrem em suas formulações. Começaremos com as noções mais fundamentais de mapa e coloração admissível, introduzindo em seguida outras noções, concomitantemente com os métodos engendrados pela solução.

---

<sup>3</sup> Até as mais recentes reformulações da prova, seja a de Robertson *et al* (Robertson, Sanders, Seymour & Thomas, 1997) ou a de Gonthier (2008) utilizam a clássica *reductio ad absurdum*.

### 2.2.1 Mapas e colorações admissíveis

Embora a formulação original do problema refira-se a qualquer tipo de mapa, é bem verdade que algumas especificações são necessárias para que se excluam de antemão alguns contra-exemplos à conjectura. O que é, então, um *mapa* nesse contexto? De acordo com um de nossos livros-guia<sup>4</sup>, mapa é “uma partição de um plano (infinito) em um número finito de países separados um do outro por fronteiras” e no qual “apenas um país é não-delimitado [*unbounded*]. Um conjunto de pontos é denominado não-delimitado se nenhum retângulo o circunda completamente” (Fritsch & Fritsch, 1998, p. 44). Denomina-se *coloração admissível* a uma coloração que não permite que uma região adjacente esteja pintada com a mesma cor.

A segunda observação relevante diz respeito a algo já postulado por De Morgan, a saber, que *ser uma região adjacente* é compartilhar uma linha fronteira [*border line*]. Observemos as figuras abaixo: se o ponto central for considerado uma fronteira, a quatro-coloração da figura da esquerda seria inadmissível, uma vez que as regiões A e E, bem como C e F, compartilhariam a mesma cor. A obtenção de uma coloração admissível (figura direita) implicaria, por seu turno, na perda da quatro-colorabilidade.



Figura 1 – Um contra-exemplo possível

A terceira observação, que igualmente exclui alguns contra-exemplos à conjectura, é a exigência de que se trate apenas de mapas com regiões diretamente conectadas. Como podemos ver na imagem da figura abaixo (extraída de Mackenzie 2001, p. 105, nossa coloração), se atribuirmos a cor vermelho à região

<sup>4</sup> Fritsch, G. & Fritsch, R. *The Four-Color Theorem – History, Topological Foundations, and Idea of Proof*. Translated by Julie Peschke. New York: Springer-Verlag, 1998.

C, azul à região B, verde à região D e amarelo à região A (“interna”), não poderíamos atribuir quaisquer uma das demais cores à região A (“externa”) sem a obtenção de uma coloração inadmissível. Para a obtenção de uma coloração admissível, assim, ficam excluídas configurações nas quais uma região tenha partes desconectadas:

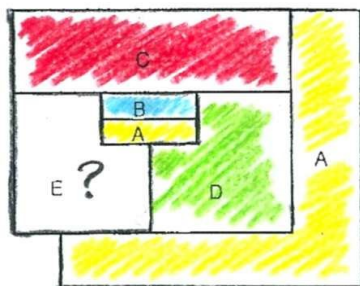


Figura 2 – Outro contra-exemplo à conjectura: a região A é dividida em duas

Sendo assim, mapas como o dos Estados Unidos ou do Brasil, nos quais algumas regiões são separadas do continente (no caso dos EUA as regiões do Alasca e do Hawaí, além do estado de Michigan, dividido em duas regiões; no caso do Brasil, a Ilha de Fernando de Noronha) teriam de ser excluídos do escopo dos mapas admissivelmente coloridos com quatro cores. A referência aos mapas desses dois países serve também de ocasião para introduzir a noção de *mapa normal*, essencial para a prova do T4C: denomina-se normal a um mapa no qual não há uma região que circunde completamente outra região e, além disso, não mais do que três regiões encontram-se em um ponto. Sendo assim, o mapa da figura 1 acima não é um mapa normal, bem como o mapa dos Estados Unidos, uma vez que nele os estados do Colorado, Utah, Arizona e Novo México encontram-se todos em um mesmo ponto (cf. figura abaixo). Esperamos que a explicação do método desenvolvido por Kempe para engendrar a contradição da *reductio*, que realizaremos na seção seguinte, torne a definição de mapa normal mais intuitiva.

Note-se que a formulação da versão topológica do problema<sup>5</sup> diz respeito à relação de vizinhança entre regiões de um mapa: pouco importa a forma das

<sup>5</sup> Na versão topológica o teorema enuncia: “For every map there exists an admissible 4-coloring” (Fritsch & Fritsch, 1998, p. 86). Na versão combinatória, sem referência à geometria ou à topologia: “Every planar graph has an admissible vertex 4-coloring.” (*op. cit.*, p. 149)

regiões, mas apenas o modo como as fronteiras das diferentes regiões relacionam-se umas com as outras<sup>6</sup>. Assim, os mapas da figura abaixo são topologicamente idênticos (cf. figura 4).



Figura 3 – Mapa dos EUA, não colorível de acordo com a conjectura, pois a) possui regiões separadas (na figura, Michigan) e b) não se trata de um mapa normal (há uma configuração na qual se encontram mais de três regiões em um único ponto).

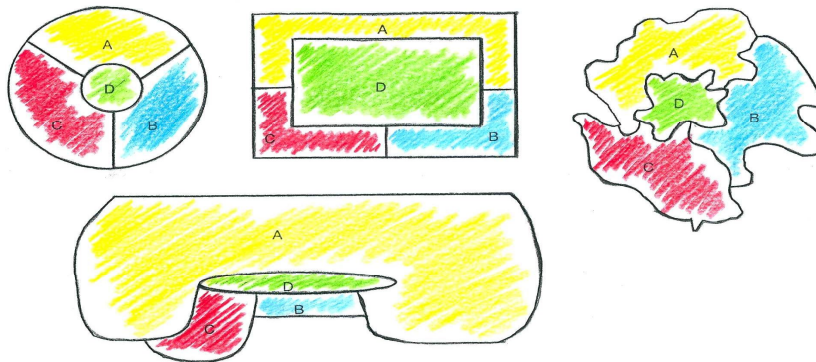


Figura 4 – Identidade topológica, dada pela identidade das relações de vizinhança.

Se, por outro lado, considerássemos o problema em sua versão combinatória, teríamos de levar em conta o fato, já observado por Kempe, de que  $a$

<sup>6</sup> Devlin lembra que na geometria estudam-se “as propriedades dos objetos (ou figuras) em duas, três ou mais dimensões (...). O mesmo vale para a topologia; a diferença entre as duas disciplinas está no tipo de propriedade considerada. Em topologia, distância e tamanho não são importantes, nem linearidade ou circularidade ou ângulo. De fato, a topologia ignora quase todas as propriedades vitais da geometria, estudando ao invés delas aquelas propriedades dos objetos (figuras) que permanecem imutáveis sob transformações contínuas – por exemplo, dobras, esticamentos, esmagamentos e torções.” (Devlin, 1999, p. 169)

cada mapa corresponde um grafo e, além disso, que grafos podem ser completamente descritos em termos combinatórios. Assim, a forma combinatória, uma espécie de “dual” da conjectura, consiste “em uma conjectura superficialmente bastante diferente que, caso seja verdadeira, implica a verdade da conjectura das quatro cores.” (MacKenzie, 2001, p. 106) A passagem da topologia à teoria dos grafos e, por conseguinte, à versão puramente combinatória do procedimento de prova do T4C, será abordada na seção 1.2.4. Vejamos agora como a estratégia da prova coloca em operação os conceitos que acabamos de introduzir.

### 2.2.2

#### **Método de redução e cadeias de Kempe: inevitabilidade e redutibilidade**

Como vimos, a hipótese inicial da prova do T4C afirma *a existência de pelo menos um mapa que exige cinco cores para ser colorido*. De acordo com Appel e Haken<sup>7</sup>, ficou estabelecido desde a pretendida prova de Kempe que se existe um mapa que requer cinco cores (um mapa *cinco-cromático*), então deve existir um mapa *cinco-cromático normal* – um mapa, lembremos que satisfaz as condições:

- (a) não conter nenhuma configuração na qual uma região circunde completamente outra;
- (b) não possuir configurações nas quais mais de três regiões encontrem-se em um ponto.

Assim, provar que um mapa cinco-cromático normal é impossível seria suficiente para provar o T4C. Kempe notou, entretanto (e nisso consiste a engenhosidade de seu argumento), que se existe um mapa cinco-cromático normal, teria de haver um tal mapa com um número menor de regiões, um mapa *cinco-cromático normal minimal*. Por conseguinte, para provar o T4C é suficiente provar a impossibilidade de um mapa cinco-cromático normal minimal, quer dizer, que a postulação da existência de um mapa normal minimal que demanda cinco cores para ser admissivelmente colorido leva a uma contradição. A estratégia é semelhante à da prova da irracionalidade da raiz quadrada de dois: suponha que é racional; nesse caso haverá uma fração menor (menores divisor e

---

<sup>7</sup> Em um dos numerosos artigos de divulgação da prova, publicado em *Scientific American* (Appel & Haken, 1977).

dividendo); mas para cada fração correspondente à raiz quadrada de dois se pode obter uma fração menor, donde a contradição com a suposição inicial.

Hao Wang explica de maneira relativamente intuitiva o modo como Kempe desmembrou o argumento nos seguintes lemas:

(1) Todo mapa contém uma região com cinco ou menos regiões vizinhas.<sup>8</sup>

(2) Nenhum mapa cinco-cromático minimal pode ter uma região com apenas duas ou três regiões vizinhas (porque podemos encontrar um mapa menor que ainda requeira cinco cores).

(3) Do mesmo modo, nenhum mapa como esse pode ter uma região com exatamente quatro vizinhas.

(4) Nenhum mapa como esse pode ter uma região com exatamente cinco regiões vizinhas.

Ocorre que Kempe provou (1), (2) e (3), mas sua prova de (4) é falaciosa. A forma do raciocínio de Kempe revela dois componentes: (1) gera um conjunto “inevitável” de configurações; (2), (3) e (4) pretendem mostrar que cada configuração no conjunto acima é “reduzível”. Em geral, qualquer conjunto inevitável de configurações reduzíveis provaria o teorema mostrando a não existência de qualquer mapa cinco-cromático minimal. (Wang, 1981, pp. 43-44)

Vejamos, então, como foram construídos os casos de redução (2) e (3) referidos por Wang. O primeiro deles é trivial, embora seja útil para esclarecer o procedimento nos demais casos: para provar que a região com três regiões vizinhas não pode ser parte de um mapa cinco-cromático normal minimal – o que contradiz a assunção inicial – ele utilizou um procedimento de redução (e ampliação) de mapas. O procedimento consiste em remover uma determinada região (a região D no exemplo da figura abaixo) “amalgamando-a” com outra (a região C), de modo a formar uma nova região (no caso, C’). O novo mapa possui menos regiões do que o mapa original (que foi assumido como o menor mapa cinco-cromático normal) e, assim, pode ser colorido com quatro cores. Se todas as regiões do mapa original forem coloridas – exceto, evidentemente, a região “amalgamada” à outra (D) – com apenas quatro cores, então a região D pode ser colorida com uma cor que não foi

<sup>8</sup> A explicação em termos técnicos é a seguinte: “Any normal map (in a plane) satisfies the formula  $4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - 3p_9 - \dots (N - 6) p_N = 12$ , where  $p_n$  is the number of countries of the map that have exactly  $n$  neighbors and  $N$  is the largest number of neighbors that any country has. (Note that  $n = 0$  and  $n = 1$  cannot occur in a normal map since no enclaves or islands can occur in normal maps; thus, the formula begins with  $p_2$ .) Now each  $p_n$  is either positive or zero and occurs in the formula with a positive sign only if  $n$  is less than 6. Thus for the formula to have a positive sum on the left (to match the positive number on the right) at least one of  $p_2, p_3, p_4$  or  $p_5$  must be positive. In other words, some country must have either two, three, four or five neighbors”. (Appel & Haken, 1978, p. 159)

atribuída a A, B ou C. Desse modo, reinserindo a região anteriormente “amalgamada”, também o mapa original pode ser colorido com quatro cores, o que contradiz a assunção de que ele é um mapa penta-cromático normal *minimal*.

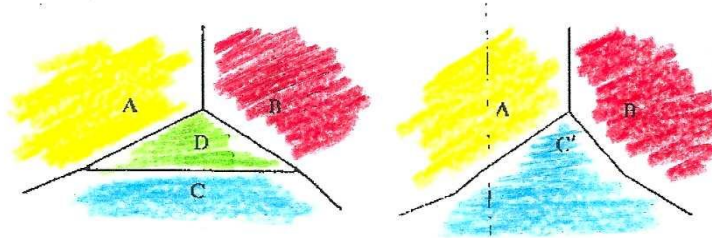


Figura 5 – Redução de um mapa

Observemos agora o caso de redução de um mapa que nos dará uma ideia das modificações realizadas mais tarde por Appel e Haken no método de Kempe. Suponhamos, então, que um mapa cinco-cromático minimal possua uma região com quatro regiões vizinhas – nesse caso a região E da primeira das figuras abaixo. Do mesmo modo que no exemplo anterior, procedemos de modo a “amalgamar” a região que nos interessa com uma região vizinha, colorindo esse novo mapa com apenas quatro cores. Para o caso de as quatro regiões que circundam a região “amalgamada” estarem coloridos com menos de quatro cores, basta apenas escolher uma outra cor para colorir a região “amalgamada” quando da sua reinserção ou ampliação. O argumento de Kempe para casos distintos é o que segue.

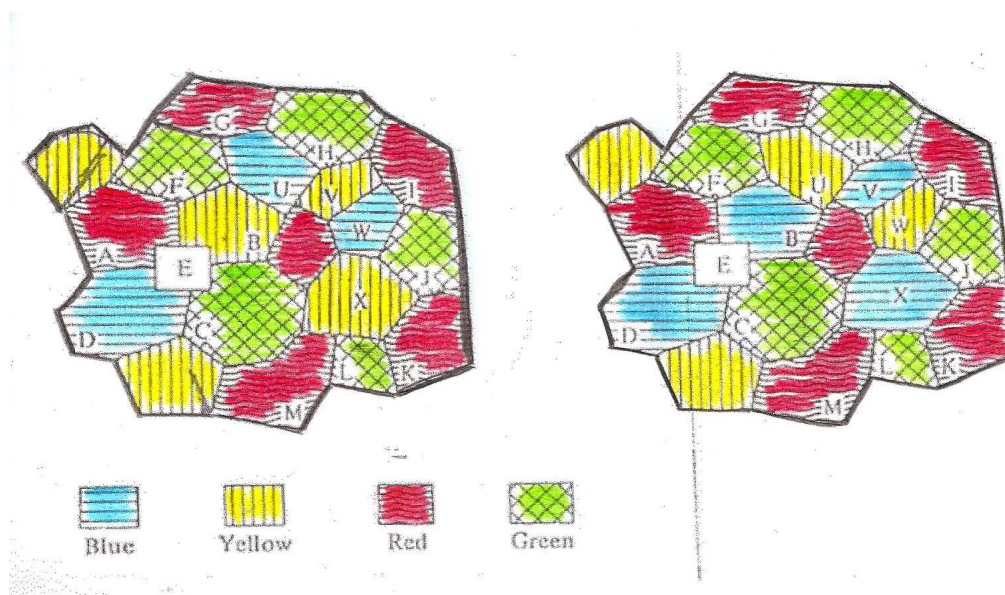


Figura 6 – Mapa com uma região circundada por 4 regiões vizinhas: o desenvolvimento do método das “cadeias de Kempe”



Consideremos as cores de um par de regiões situadas em oposição uma à outra com relação à região removida (no exemplo, a região A – vermelha – e a região C – verde). Agora, ou há um caminho de regiões adjacentes coloridas com as duas cores que vai de A até C, ou não o há – no exemplo, trata-se do caminho constituído pelas regiões A, F, G, H, I, J, K, L, M, C, coloridas apenas em vermelho e verde. Essas são as assim chamadas “cadeias de Kempe”. Em contrapartida, não há caminho constituído de regiões coloridas em amarelo e azul levando de B a D.

Se ambos pares de regiões opostas fossem conectados por caminhos de pares de cores correspondentes, os dois caminhos teriam uma região em comum, o que é impossível. Assim, há um par não conectado pela cadeia de Kempe (no exemplo, B e D). Caso escolhamos uma região (B) do par e listarmos todas as regiões coloridas por uma das duas cores selecionadas (as cores de B e D, amarelo e azul, formando o caminho B, U, V, W, X) e que sejam conectadas pelo caminho (azul-amarelo) à região escolhida, podemos agora permutar as cores das regiões listadas. Desse procedimento resulta, em nosso exemplo, a segunda das figuras acima. Agora a região “ignorada” (E) possui regiões vizinhas coloridas com apenas três cores, uma vez que a lista de regiões cujas cores foram permutadas não podem incluir mais do que uma das regiões vizinhas (no caso, B). Sendo assim, a região E pode ser colorida com a quarta cor (amarelo), encontrando-se assim a contradição necessária à refutação da assunção de que o mapa inicial era *o menor* a requerer cinco-coloração.

Como já dissemos, Appel e Haken partiram dos procedimentos corretos utilizados por Kempe, nomeadamente, de sua prova de que em todo mapa normal existe pelo menos uma região com duas, três, quatro ou cinco regiões vizinhas – o que é o mesmo que dizer que *não existem mapas nos quais alguma região possua seis ou mais regiões vizinhas*. Com isso é possível chegar à formulação de uma das ideias centrais da prova: a de que o conjunto das *configurações que consistem em uma região com dois, três, quatro ou cinco regiões vizinhas é inevitável*, ou seja, “todo mapa normal deve conter ao menos uma dessas quatro configurações”. (Appel & Haken, 1977b, p. 109)

Além da noção de inevitabilidade, outro dos conceitos essenciais à prova do T4C, que agora podemos apresentar, é o conceito de *reduzibilidade*. Dito de modo simples: uma configuração de regiões é *reduzível* caso exista uma maneira

de mostrar, somente através do exame das configurações e dos modos pelos quais as regiões podem ser alinhadas pelo método das cadeias de Kempe, que tal configuração não pode aparecer em um mapa cinco-cromático normal minimal, uma vez que se ela pode ser reduzida, o número de regiões do suposto menor mapa seria ainda menor.

Apontamos com Wang que o erro na pretensa prova de Kempe ocorreu na tentativa de mostrar que uma configuração na qual uma região possui cinco regiões vizinhas é redutível. Appel e Haken explicam que o uso de “redutível” é devido ao argumento de Kempe: “Ele provou que se um mapa cinco-cromático (normal) minimal contém um país com, digamos, quatro vizinhos, então há uma mapa cinco-cromático com um número reduzido de países” (Appel e Haken, 1977, p. 111). Assim, a atitude de Kempe frente ao P4C consistiu em tentar *construir um conjunto inevitável de configurações redutíveis* para alcançar a *contradição necessária a reductio*.

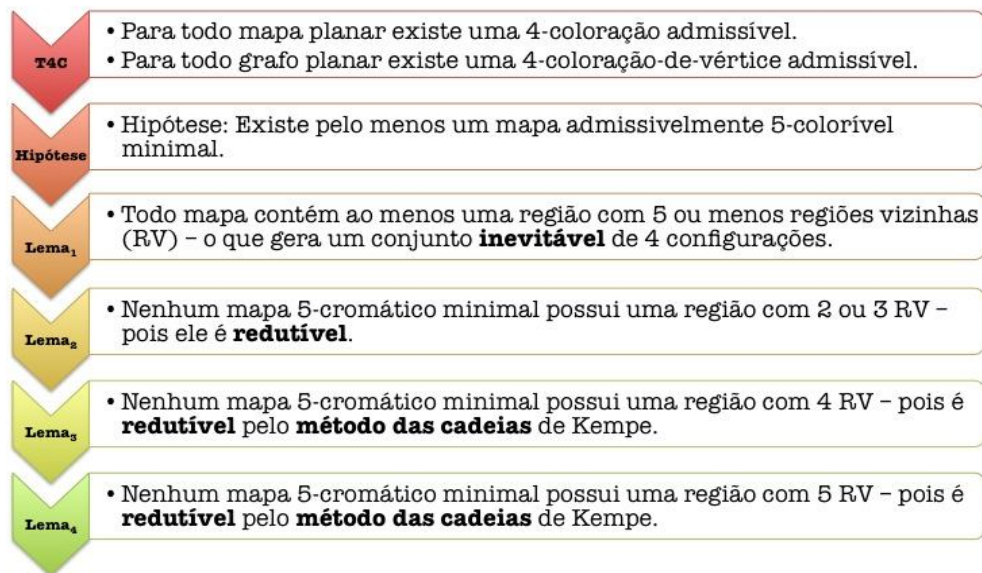


Figura 7: Um esquema da pretensa prova de Kempe. Caso os procedimentos de redução fossem todos corretos, o T4C estaria provado. Entretanto, dez anos após a publicação da pretensa prova, P. Heawood mostrou que havia um erro nos procedimentos de redução levados a cabo no Lema<sub>4</sub>.

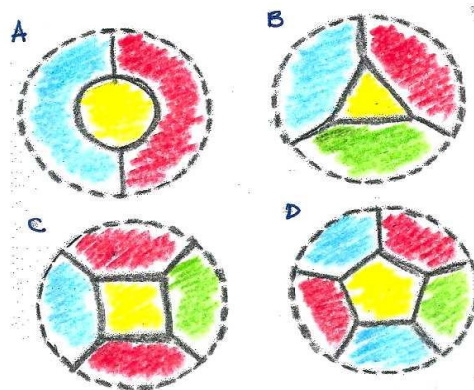


Figura 8 – A “prova” de Kempe continha um conjunto inevitável de 4 configurações redutíveis (dentre as quais, de acordo com o Lema<sub>1</sub>, todo mapa normal deveria conter pelo menos uma).

### 2.2.3

#### A refutação da primeira pretensa prova

Como vimos acima, quando a região a ser removida em um estágio particular do processo de redução possui no máximo três regiões vizinhas a quatro-colorabilidade é facilmente preservada, dado que a região adicionada poderia ser colorida com uma cor diferente das demais. Vimos ainda que os casos difíceis são os de mapas que contem regiões com quatro e cinco regiões vizinhas, que levaram Kempe à criação do método das cadeias. A pretensa prova de Kempe foi refutada somente dez anos após a publicação, por Percy Heawood, e foi noticiada a *London Mathematical Society* pelo próprio Kempe. Essa refutação foi construída justamente a partir do caso de um mapa contendo uma região com cinco regiões vizinhas. A apresentação de um contra-exemplo, entretanto, não foi apenas um resultado restritivo: Heawood acabou provando, com uma modificação no método das cadeias de Kempe, que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano, o “Teorema das Cinco Cores” (Biggs, Lloyd & Wilson, 1997, p. 105). Além da tentativa de Kempe duas outras supostas provas foram publicadas ainda no século XIX. Uma por Frederick Temple (1889) – que confundiu a então conjectura das quatro cores com o problema dos cinco príncipes<sup>9</sup> – e outra pelo físico e matemático Peter Guthrie Tait (em 1880), ambas igualmente refutadas (Wilson, 2002, p. 246).

<sup>9</sup> Trata-se do seguinte problema: “Um rei indiano possui um grande reino e cinco filhos. Como esse reino pode ser dividido em cinco regiões de modo que cada região possua uma borda em comum com cada uma das outras regiões?” (Wilson, 2002, p. 253)

Seguindo a exposição contida no quarto capítulo de *Mechanizing Proof: computer, risk and trust* (MacKenzie, 2001, p. 116-117), dedicado à prova do T4C, podemos mencionar quatro diferentes posturas frente à refutação de Heawood à pretensa prova de Kempe: a primeira consiste na tentativa de preservar os principais artifícios da “prova” apostando em encontrar uma maneira inequívoca de lidar com o caso problemático específico de países com cinco regiões vizinhas. A segunda é a reformulação da estratégia de Kempe buscando elaborar um modo mais complicado de implementá-la. (Note-se que *estratégia* aqui não se refere à estrutura geral, de *reductio ad absurdum*, mas ao modo específico como Kempe tentou engendrar a contradição para o caso de uma região com cinco regiões vizinhas através do método das cadeias.) A terceira consiste no abandono da abordagem de Kempe em prol de outra diferente. Por fim, pode-se desistir de provar o teorema, tentando encontrar um contra-exemplo.

Appel e Haken construíram a prova do T4C adotando a segunda dessas posturas. Ocorre que ao invés de um conjunto inevitável com apenas quatro configurações, a prova efetiva do T4C contém um conjunto de 1498 configurações, construídas através da execução de cálculos via computador. Antes de abordarmos esse ponto, entretanto, é preciso ainda mencionar duas contribuições para a prova de Appel e Haken: de G.D. Birkhoff (1913) e H. Heesch (a partir de 1936). Ambas dizem respeito aos processos de automatização de alguns de seus passos, ou seja, à introdução do uso de computadores na solução do problema das quatro cores.

A colaboração de Birkhoff refere-se às provas de redutibilidade, enquanto a de Heesch concerne à construção do algoritmo através do qual se constrói o conjunto inevitável de configurações que precisa ser provado como redutível para se alcançar a contradição com relação à assunção da existência de um mapa cinco-cromático normal minimal.

#### **2.2.4**

#### **Da topologia à combinatória: os computadores entram em cena**

G.D. Birkhoff foi um matemático americano do início do século XX – conhecido na comunidade matemática pela prova do “último problema

geométrico” de Poincaré, bem como por outros resultados<sup>10</sup> (Fritsch & Fritsch, 1998, p. 26). Em sua tentativa de provar o T4C, Birkhoff aprimorou a técnica de redução de Kempe – sistematizando a noção de redutibilidade e mostrando que algumas configurações que inevitavelmente ocorrem em um mapa admissivelmente cinco-colorível minimal são maiores, quer dizer, possuem mais regiões do que as configurações inevitáveis contidas no conjunto construído por Kempe, embora sejam, é claro, igualmente redutíveis. Além disso, Birkhoff também criou um modo de medir configurações, em termos do “tamanho do anel” – o número de regiões no “caminho” que circunda uma configuração (as regiões 1 a 6 na figura abaixo, que exemplifica um dos casos distintos de configuração inevitável de Kempe).

A partir dessas contribuições, o tamanho do assim chamado “número de Birkhoff” (o limite inferior do número de regiões em um mapa cinco-cromático) foi gradualmente, com a construção de provas de redutibilidade, sendo aumentado. Entre 1913 e 1950 alguns matemáticos dedicaram-se à construção de um grande número de configurações redutíveis, mas nenhum deles foi capaz de construir o conjunto inevitável de configurações que, provado redutível, provaria o T4C. Isso foi possível com a segunda contribuição que mencionamos, realizada por Heinrich Heesch.

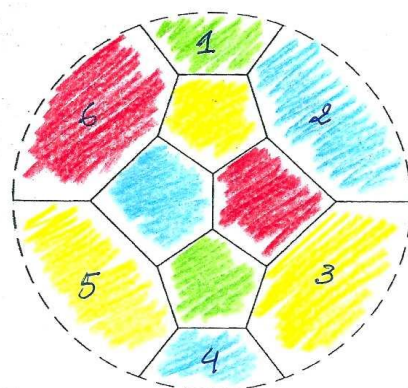


Figura 9 – Uma configuração redutível com anel de tamanho 6: o assim chamado “diamante de Birkhoff”

<sup>10</sup> O Teorema de Poincaré-Birkhoff é um resultado provado parcialmente por Jules-Henry Poincaré em 1912, quando tentava resolver o assim chamado *problema dos três corpos*, conhecido difícil problema de mecânica celeste. No caso geral (e não no caso dos três corpos – Terra, Lua e Sol) o problema consiste em determinar matematicamente a trajetória de  $n$  corpos celestes em interação no espaço.

Matemático e físico de formação alemã, assistente de Herman Weyl na Universidade de Göttingen, Heesch apresentou suas ideias acerca da possibilidade de provar o T4C (dentre elas a de que ele poderia ser provado com a construção de um conjunto inevitável de configurações redutíveis) em seminários, entre 1947 e 1948, nas universidades de Hamburgo e Kiel. Wolfgang Haken, um dos autores da prova – especialista em topologia que mais tarde convidaria Heesch para dar seminários na Universidade de Illinois e para utilizar a maquinaria computacional lá disponível – estava presente nos seminários em Kiel nos quais Heesch estimava que o conjunto inevitável de configurações poderia chegar a ter 10.000 elementos. Heesch trabalhou na sistematização das abordagens existentes em provas de redutibilidade (anteriormente desenvolvidas por Birkhoff), construindo uma tipologia – classificando-as como A-, B- e C-redutibilidade. Além disso, criou um tratamento próprio para provar a redutibilidade de um conjunto específico de configurações, a D-redutibilidade.

Esse método de D-redutibilidade, por sua vez, era de tal maneira *potencialmente algorítmico* que podia ser implementado em um computador. A necessidade de automação do algoritmo manifesta-se pelo fato de que “há 199.291 colorações não-equivalentes de um anel de número 14, da qual se exige de cada uma que se mostre a possibilidade de estendê-la aos vértices no interior do anel.” (MacKenzie, 2001, p. 123) Para compreender a referência “aos vértices no interior do anel” é preciso lembrar algo que já referimos:<sup>11</sup> a conjectura das quatro cores possui uma forma “dual”. Ela consiste na afirmação da quatro-colorabilidade de grafos planares (ao invés da quatro-colorabilidade de mapas; grafos planares podem intuitivamente ser compreendidos como “redes”), nos quais cada vértice representa uma região e cada segmento de linha entre vértices (arestas) representa uma fronteira. A figura abaixo mostra a figura anterior, que contém um anel de tamanho seis, e o grafo planar, por vezes também denominado de *grafo dual*, a ela correspondente:

---

<sup>11</sup> Ao final da seção 1.1.1, cf. nota 5. A título de curiosidade vale destacar que o poeta francês Paul Valéry interessou-se pelo problema das quatro cores, tendo, especificamente, engendrado tópicos relativos à colorabilidade de grafos, mais tarde desenvolvidos em teoria dos grafos. Detalhes acerca da abordagem de Valéry em seus *Cahiers* podem ser encontrados no artigo de Jean Mayer, “Paul Valéry et le Problème des Quatre Couleurs” (Mayer, 1980).

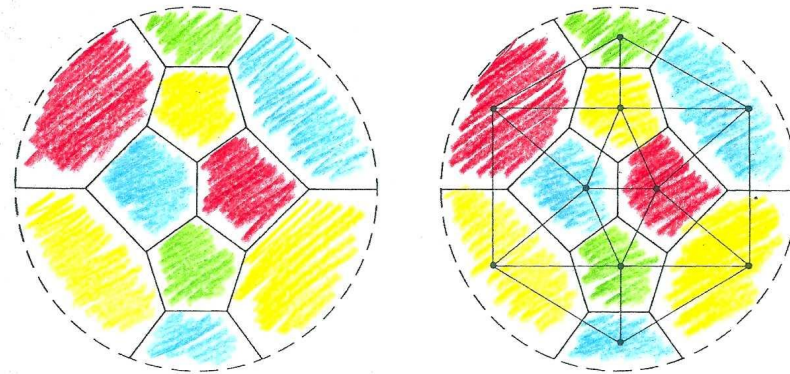


Figura 10: À direita o grafo planar correspondente ao mapa da figura da esquerda.

Pode-se então falar de uma passagem da topologia à teoria dos grafos em nossa narrativa sobre a construção da prova do T4C: o problema de colorir mapas passa a ser considerado sob sua forma combinatória, tratando-se agora de mostrar que são suficientes apenas quatro cores para colorir os vértices de qualquer grafo planar de modo que nenhum vértice conectado por uma única aresta seja da mesma cor. A partir dessa formulação tornou-se possível aplicar aos procedimentos heurísticos uma série de resultados conhecidos em teoria dos grafos, como a fórmula de poliedros de Euler<sup>12</sup>. Diremos um pouco mais acerca da utilização dessa fórmula na seção seguinte. Por ora importa-nos destacar o fato de que a noção de grafo pode ser formulada em termos puramente combinatórios – o que finalmente permitiu a automação dos procedimentos de cálculo envolvidos na prova de um tipo de redutibilidade.

Assim, provar a D-redutibilidade de uma configuração exige o exame de todas as quatro-colorações possíveis dos vértices que formam o anel de uma configuração (daí seu caráter combinatório), demonstrando que cada quatro-coloração do anel pode ser ampliada, após uma número finito de trocas à la Kempe, em uma quatro-coloração dos vértices dentro do anel da configuração em questão:

Por assunção, o grafo maior do qual a configuração em questão é uma parte é um grafo cinco-cromático minimal, de modo que o grafo todo menos os vértices dentro do anel seja quatro-colorível. Se cada quatro-coloração do anel pode ser estendida a uma quatro-coloração dos vértices de dentro do anel, então o grafo inteiro é quatro-colorível, engendrando-se assim a contradição requerida. (MacKenzie, 2001, p. 123)

O programa computacional desenhado para determinar o tipo de

<sup>12</sup>  $F + V = A + 2$  (onde  $F$  = faces,  $V$  = vértices,  $A$  = arestas)

redutibilidade em questão foi criado, de acordo com os atuais padrões, com métodos “praticamente pré-históricos” (Fritsch & Fritsch 1998, p. 27): “Ele [Karl Dürre, o programador] escreveu o programa em [linguagem] ALGOL 60 e perfurou os dados adequados (que consistiam basicamente em matrizes adjacentes) em cartões.” O programa rodava apenas “testes” ou cálculos de redutibilidade para figuras com o tamanho do anel menor do que 12, dadas as limitações dos módulos de memória dos computadores: “uma configuração com anel desse tamanho exigia seis horas de computação, e uma com anel de tamanho 13 entre sessenta e sessenta e uma horas.” (MacKenzie, 2001, p. 123)

A partir daí a história se desenvolveu em função de encontrar computadores mais potentes para rodar as provas de redutibilidade, acumulando-se frustrações relativas à falta de recursos (as máquinas então disponíveis estavam muito aquém das capacidades de memória exigidas para a tarefa) e de tempo. Vale notar que o desenvolvimento do método de D-redutibilidade ocasionou um episódio relevante no que diz respeito à história do uso de programas computacionais na prova do T4C. MacKenzie o relata (2001, p. 124-5), mencionando a tentativa de Yoshio Shiamamoto<sup>13</sup> de provar o T4C com uma simplificação, ainda automatizada, do método de D-redutibilidade. A tentativa, entretanto, fracassou e foi, segundo Haken em entrevista a MacKenzie, “a blow against computers”. (Mackenzie, 2001, p. 127)

O futuro da prova do T4C ainda dependia do encontro entre Haken, Kenneth Appel – pesquisador de interesses variados que tinha grande experiência em programação – e um estudante de graduação em ciência da computação, John Koch. Foi este último quem escreveu o programa que rodou os cálculos necessários para provar um dos lemas mais importantes da prova do T4C, relacionado ao supramencionado método de D-redutibilidade. Ele não utilizou a linguagem de programação de alto-nível<sup>14</sup> usada por Dürre, mas escreveu um

<sup>13</sup> Chair do departamento de matemática aplicada da *U.S. Atomic Energy Commission's Brookhaven Laboratory*, onde Heesch e Dürre estiveram utilizando seus então supercomputadores para rodar provas de redutibilidade.

<sup>14</sup> A linguagem ALGOL 60, referida no parágrafo anterior. Linguagens de programação podem ser caracterizadas *grosso modo* como as instruções que determinam o funcionamento de um dispositivo. Há, entretanto, uma diferença de níveis entre linguagens, dada por sua maior ou menor proximidade com o domínio natural (e portanto mais complexo) da linguagem. ALGOL 60 é uma linguagem de ordem superior famosa, dentre outras razões, por sua elegância. Linguagens de nível inferior, como aquela utilizada por Koch para escrever o programa (uma linguagem dita “de montagem”, ASSEMBLY) são codificações matematicamente deselegantes, embora eficientes com relação à performance do dispositivo calculatório.



programa bastante eficiente (embora acusado de deselegância por quase todos os especialistas em programação) para provar a redutibilidade de configurações de tamanho de anel 11. Appel fez as modificações necessárias para anéis de tamanho 12, 13 e 14:

Com o advento de computadores digitais de alta velocidade, entretanto, um ataque a esses problemas [relacionados ao tamanho do anel que circunda qualquer configuração] tornou-se tecnicamente possível. O pessimismo dos primeiros pesquisadores, que parecia justificado pelas dificuldades da computação manual, tiveram de ser reavaliados à luz das máquinas com poder e velocidade crescentes. Heesch formalizou os métodos conhecidos para provar configurações redutíveis e observou que ao menos uma delas (uma generalização direta do método utilizado por Kempe) era um procedimento em princípio suficientemente mecânico para ser implementado no computador. (Appel & Haken 1978, p. 165).

É preciso observar que estamos descrevendo o enredo histórico dos desenvolvimentos que levaram à construção da prova e não a estrutura da prova tal como ela foi apresentada por Appel e Haken. Essa observação é importante porque, do ponto de vista da estrutura da prova, antes de provar a redutibilidade de um conjunto de configurações é preciso construir um conjunto inevitável de configurações redutíveis, o que foi possível através de outra contribuição de Heesch – e outro uso do computador. Ele desenvolveu um algoritmo, mais tarde aprimorado por Appel & Haken, para construir um conjunto inevitável de configurações.

### 2.2.5

#### **Método de descarga e outro uso do computador**

Para desenvolver o referido método – uma generalização do método das cadeias de Kempe – Heesch usou a já referida ideia da transformação de um mapa na sua forma “dual”, ou seja, num grafo. Ora, todo *grafo dual* de um mapa normal possui faces triangulares e os grafos duais são, em razão disso, denominados *triangulações*. De acordo com a nomenclatura utilizada para se referir a grafos duais, uma configuração é vista como “parte de uma triangulação que consiste em um conjunto de vértices mais todas as arestas que nele se encontram.” (Appel & Haken, 1978, p. 166) O anel da configuração (figura 10 acima), por sua vez, é o “circuito” que as liga.

Pode-se compreender o método de Heesch através de uma analogia com redes elétricas: Kempe já havia mostrado corretamente que se um grafo corresponde a um mapa cinco-cromático minimal, então pelo menos cinco arestas devem se encontrar em cada vértice do grafo. Haken sugeriu pensar o grafo em analogia com uma rede elétrica na qual em cada vértice é descarregada uma carga elétrica. Assim, se  $k$  arestas encontram-se em um vértice, diz-se que o mesmo possui um grau- $k$ . Se ele recebe uma carga de  $6-k$ , vértices de grau 5 (que correspondem a regiões com 5 regiões vizinhas) têm uma carga de +1, vértices de grau 6 não possuem carga e vértices de grau 7 possuem uma carga -1 e assim por diante:

A fórmula de poliedros de Euler implica que *a soma de cargas elétricas da rede inteira deve ser fixa e positiva*. O método de Heesch pode então ser concebido como deslocamento de carga positiva entre os vértices de modo tal que a soma total de cargas através da rede permanece constante (tirar carga positiva de vértices de grau 5 é “descarregá-los”). Embora haja muitas complexidades em procedimentos de descarga, o ponto importante nas palavras de Appel e Haken é que ‘Dado um procedimento de descarga especificado em um grafo arbitrário, ... é possível construir uma lista finita de todas as configurações que, após realizada a descarga, possuem vértices de carga positiva’. Desde que a rede deve possuir uma carga total positiva, pelo menos um membro dessa lista deve aparecer em qualquer grafo correspondente a um mapa cinco-cromático minimal: a lista é então um conjunto inevitável de configurações (...) *Algoritmos de descarga*, em outras palavras, *permitem a construção sistemática de conjuntos inevitáveis*. (Mackenzie, 2001, p. 121, grifos nossos)

Assim, como Appel e Haken explicam em outro contexto (Appel & Haken, 1986, p. 14), um “procedimento de descarga” não é nada mais do que o algoritmo de redistribuição das cargas iniciais em uma triangulação dada. Com essa breve descrição dos procedimentos desenvolvidos para 1) construir o conjunto inevitável de configurações (o método de descarga de Heesch) e 2) provar que cada membro desse conjunto é redutível (o desenvolvimento da tipologia de métodos de redução), podemos agora realizar uma revisão acerca dos diferentes usos do computador na prova do T4C, mostrando o lugar do que se poderia provisoriamente denominar *experimento computacional* na construção da prova.

### 2.2.6

#### Os usos ou funções do computador na prova do T4C

Além das diversas inovações conceituais e metodológicas das quais dependeu a prova do T4C, vimos que o computador, como ferramenta de procedimento, foi utilizado nela de mais de uma forma. Historicamente, a primeira delas foi o desenvolvimento das provas de redutibilidade de conjuntos inevitáveis de configurações. Seguindo Saaty e Kainen<sup>15</sup>, podemos comparar esse tipo de desempenho ao de um *idiot savant*, pois se trata de *uma ferramenta de cálculo cuja potência é bastante superior, em termos de velocidade*, à dos seres humanos: “o computador pode levar a cabo o literalmente astronômico número de cálculos requeridos [que são] absolutamente necessários”, em outras palavras “a computação humana é muito lenta.” (Saaty e Kainen, 1986, p. 95)

A segunda forma histórica (anterior, entretanto, na ordem lógica) de utilização do computador ocorreu na construção do conjunto inevitável de configurações através da execução do algoritmo de descarga sugerido por Heesch. Quando encontrado um conjunto inevitável, a equipe *testava* a redutibilidade das configurações *provavelmente redutíveis* [*likely-to-reduce configurations*]. A enumeração de casos era feita pelo computador, algumas modificações eram efetuadas, e então *experimentava-se* o novo algoritmo: “Em outras palavras, o computador foi usado via interação homem-máquina como um ‘bloco de notas’ auxiliando na procura por um procedimento de descarga apropriado”. (Saaty e Kainen, 1986, p. 95, cf. figura 11 abaixo)<sup>16</sup>

Ao descrever algumas das dificuldades envolvidas no desenvolvimento dos algoritmos de descarga, Appel e Haken lembram que no início dos anos 1970 não havia uma ideia precisa de quantas configurações redutíveis seriam necessárias para construir o conjunto inevitável (apesar da referida previsão de Heesch anos antes, de cerca de 10.000). Isso, por sua vez, levou-os a considerar que em termos de computação, “os números pareciam estar apenas na beira do

<sup>15</sup> Os autores (ambos matemáticos) contam um fato curioso com relação à publicação de seu livro: ele estava para ser publicado – orientado para a variedade de abordagens distintas através das quais se atacava, até então, a conjectura – quando Appel e Haken anunciaram ter realizado a prova. No prefácio da versão revisada e aumentada (que consultamos), os autores manifestam seu desapontamento com a ignorância quase generalizada do “trabalho conceitual e da estrutura computacional que Koch, Appel e Haken construíram” (Saaty & Kainen, 1986, p. v) na maioria das reações neutras ou negativas à prova.

<sup>16</sup> Descrições desse procedimento podem ser encontrada também em Appel & Haken, 1977, p. 119; Haken, 1977, p. 204; Appel & Haken, 1978, p. 175; Appel, 1984, p. 38.

possível.” (Appel & Haken, 1978, p. 170) Como corolário dessa iminência os pesquisadores estavam certos de que, *com as técnicas à disposição*, uma prova *sem o auxílio do aparato computacional era impossível*.

Assim, o primeiro passo no ataque ao problema de construir o conjunto inevitável de configurações redutíveis consistiu em determinar “se havia alguma esperança de encontrar um tal conjunto com configurações de tamanho suficientemente pequeno para que o tempo de computação requerido pelas reduções pudesse ser estimado em limites razoáveis.” (Appel & Haken, 1978, p. 170).

Abaixo, uma versão do esquema apresentado por Saaty & Kainen para ilustrar os diferentes usos do computador na prova do T4C: o primeiro uso de computadores ocorreu na tentativa de resolver o passo 5 – mas mais tarde os procedimentos de redução acabaram sendo realizados “à mão.”

Já o segundo uso ocorreu na construção do algoritmo de descarga que, executado, constrói o conjunto de configurações sobre o qual o procedimento de redução é aplicado, alcançando a contradição requerida para a *reductio*.

É preciso destacar a importância dessas *estimativas*, que começam a aparecer nas descrições de Appel e Haken, para nossa discussão futura. Isso porque um dos argumentos em favor da ideia de que a prova do T4C implica em uma radical modificação de um determinado modo filosófico de conceber provas matemáticas está baseado no fato de que Appel & Haken estimavam as possibilidades de encontrar configurações de tamanho computacionalmente “tratáveis” utilizando-se de *raciocínios probabilísticos*. De acordo com aqueles argumentos, portanto, tais raciocínios inexisteriam até então no universo das provas matemáticas. Na seção seguinte abordaremos esse tópico.

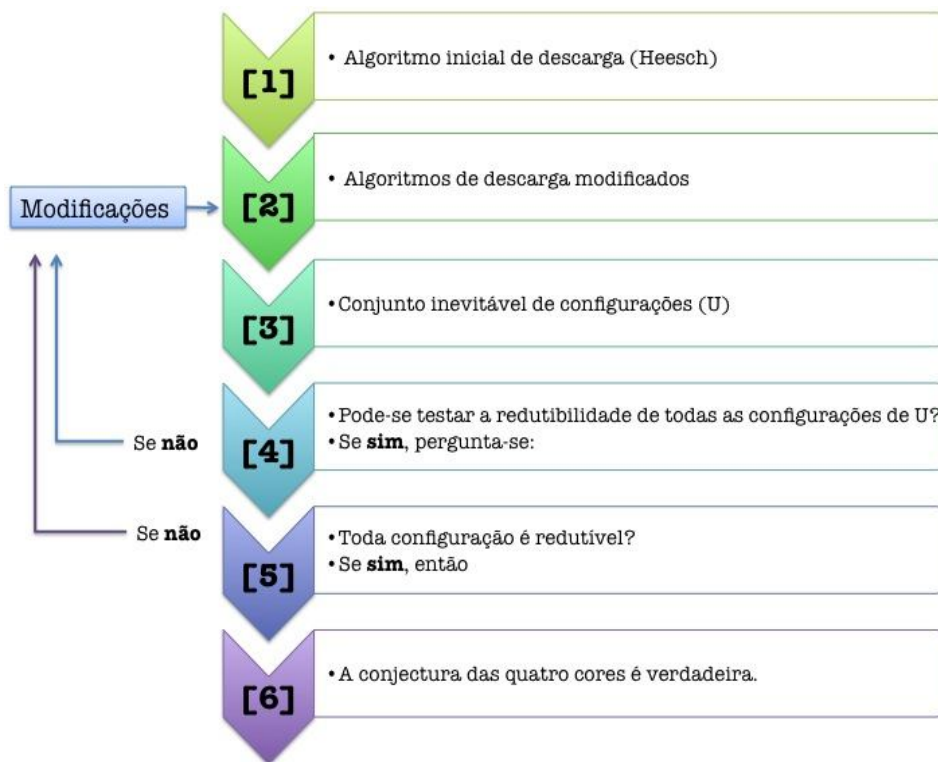


Figura 11: Appel e Haken afirmam que 90% do tempo do tempo de trabalho foi utilizado entre os passos 2 e 4, enquanto os outros 10% foram dispendidos na execução das provas de redutibilidade (entre os passos 5 e 6). Como explica K. Devlin, “a estratégia geral é clara: comece com um algoritmo de descarga promissor e tente provar [por exaustão] que cada uma das configurações inevitáveis restantes são redutíveis. Se a redutibilidade não puder ser provada para uma ou outra configuração da lista, corrija o procedimento de descarga de modo que o caso problemático [a configuração irreduzível] não mais seja gerada. Embora seja simples de descrever, executar essa estratégia não foi nada fácil e envolveu muitas semanas de diálogo ‘homem-máquina’.” (Devlin, 1999, p. 189)

### 2.2.7 A apresentação da prova

O artigo contendo a apresentação da prova, “Every Planar Map is Four Colorable”, foi publicado em duas partes no ano de 1977, no *Illinois Journal of Mathematics*, embora Appel e Haken já houvessem divulgado a existência da prova no ano anterior.<sup>17</sup> Trata-se, vale lembrar, de uma prova por redução ao absurdo, na qual está incluída uma prova por indução matemática cujo passo indutivo requer uma prova por casos, mais precisamente, uma prova com três casos, o terceiro dos quais requer mais de mil subcasos.

<sup>17</sup> No *Bulletin of the American Mathematical Society* (Appel & Haken, 1976) e também na revista de divulgação científica *New Science* (Appel, 1976). Para outras referências “de divulgação” cf. nota 7; uma perspectiva sociológica do processo, que inclui observações acerca das estratégias “publicitárias” de apresentação da prova encontra-se no livro de MacKenzie ao qual estamos recorrendo.

A primeira parte do artigo (“Discharging”) descreve em ordem cronológica resultados anteriores que conduziram ao trabalho apresentado – a estratégia geral da prova e os procedimentos de descarga empregados para construir o conjunto inevitável de configurações redutíveis.

A segunda parte (“Reducibility”), em co-autoria com Koch, apresenta a lista dos elementos do conjunto inevitável de configurações (expostas em 63 figuras) e descreve os programas utilizados para verificar que todo membro do conjunto é redutível. Para termos uma ideia do tamanho da prova:

A prova do Teorema das Quatro Cores está contida em artigos escritos no reconhecido estilo de exposição matemática no qual todos os detalhes formais da prova são apresentados ao leitor e a maioria dos argumentos intuitivos está suprimida. Isso deixa o leitor com *50 páginas contendo textos e diagramas, 85 páginas preenchidas com quase 2500 diagramas adicionais e 400 microfichas que contém outros diagramas e milhares de verificações individuais de alegações feitas nos 24 lemas nas principais seções do texto.* Além disso, o leitor é avisado de que determinados fatos foram verificados com o uso de 1200 horas de computação e seriam extremamente dispendiosos de verificar à mão. (Appel & Haken, 1986, p. 10, grifos nossos)

Além do tamanho, outros dois aspectos da prova do T4C, como o uso de muitos diagramas<sup>18</sup> e a informação de que algumas enumerações de casos foram realizadas com o auxílio do computador estão entre aqueles que engendraram disputas filosóficas sobre o suposto caráter empírico da prova. Talvez o mais interessante a ser destacado aqui é que os autores tenham incluído no artigo que apresenta a prova uma série de considerações heurísticas acerca dos melhoramentos *dos métodos computacionais* (entendendo-se por isso o algoritmo de descarga de Heesch) anteriormente desenvolvidos por outros matemáticos na tentativa de solução do então problema das quatro cores.<sup>19</sup>

Na primeira parte do artigo, por exemplo, há uma seção intitulada “Considerações probabilísticas” na qual Appel e Haken apresentam seu argumento

<sup>18</sup> A interessante pergunta sobre o papel das figuras na prova tal como elaborada por Appel e Haken (ou mesmo na versão de Gonthier), que poderia ser feita em termos da veiculação ou não de informação proposicional, é dizer, seu papel como elemento exato ou co-exato na prova, não será abordada aqui.

<sup>19</sup> Note-se, para dar apenas um exemplo, as considerações sobre resultados anteriores no artigo que apresenta a prova do Último Teorema de Fermat (Wiles, 1995): pareceria que um certo grau de *prosa* é inseparável da apresentação de uma *prova* até então desconhecida de conjecturas mais ou menos conhecidas pela comunidade matemática. Já no caso da prova do T4C, o que se descreveu, além dos tradicionais avanços matemáticos anteriores, foram desenvolvimentos realacionados a um, *sui generis*, artefato. (Embora seja verdade que não há considerações significativas acerca da máquina enquanto mecanismo físico, de relações causais entre programa e *hardware*, etc.)

baseado em “um uso elementar (e um tanto rude) de probabilidade, que induz fortemente à crença de que ‘deve’ haver um conjunto inevitável de configurações com  $n$  tamanhos de anel que não excedam 17.” (Appel & Haken, 1977a, p. 478) Os autores afirmam, além disso, que “é bastante provável que exista um conjunto inevitável com anéis de tamanho  $n \leq 14$ .” (*loc. cit.*) Talvez esse gênero de consideração se deva à necessidade de familiarizar o público com o modo pelo qual os computadores foram heurísticamente explorados, amenizando assim o estranhamento que a novidade dos procedimentos computacionais envolvidos na prova poderiam causar naqueles que desconhecem o modo de operação dos computadores e, mais, especificamente, suas funções na prova do T4C.

Na última seção da primeira parte do artigo, denominada “Melhoramentos possíveis”, Appel e Haken reconhecem que sua estratégia de construção do algoritmo de descarga que gera o conjunto inevitável, baseada em raciocínios probabilísticos, pode não ser a melhor possível, embora chegue “razoavelmente perto para uma primeira tentativa.” (*Op. cit.*, p. 486) Apresentam-se, por fim, quatro alternativas de aperfeiçoamento das estimativas na construção do conjunto:

- (a) minimizar o número de configurações no conjunto inevitável (com o possível custo de um procedimento de descarga mais complexo, capaz de considerar anéis de tamanhos maiores na contrapartida de um tempo enormemente maior de computação);
- (b) minimizar o tamanho dos anéis das configurações (o que aumentaria o número de configurações e, novamente, o tempo de computação);
- (c) simplificar tanto quanto possível a parte feita à mão (às custas do aumento do trabalho computacionalmente realizado);
- (d) minimizar a complexidade combinatória do argumento, independentemente de ele ser levado a cabo à mão ou pelo computador.

Os autores consideram uma questão relevante a da definição da complexidade de argumentos matemáticos propondo distinguir entre complexidade lógica e calculatória:

Acreditamos que nosso argumento seja logicamente muito simples e que toda a complexidade seja de natureza combinatória. O número relativamente grande de 485 situações de S- e L- descarga torna o procedimento relativamente simples uma tarefa tediosa de ser levada a

cabo desde que um número muito grande de casos deve ser considerado. (...)

A complexidade combinatória total do argumento como um todo consistirá na soma das complexidades de todas as provas de redução requeridas (*plus* o número de casos distintos requeridos para a prova de inevitabilidade, do qual entretanto se pode esperar que possua um complexidade menor do que a das provas de redutibilidade). (Appel & Haken, 1977 I, p. 486-487)

MacKenzie aponta ainda para um outro aspecto notável da construção da prova do T4C: o fato de ele ser um trabalho significativamente coletivo. Além de todos os matemáticos e programadores envolvidos na produção de estratégias da prova, Appel e Haken contaram inclusive com a ajuda de seus familiares para realizar a tarefa tediosa de verificação manual de muitos cálculos da prova. Isso foi imprescindível para, por exemplo, “confirmar que cada configuração estava sendo corretamente inserida nos programas de verificação de redutibilidade, de modo que a configuração analisada fosse a única pretendida.” (MacKenzie, 2001, p. 136) Esse aspecto, embora não faça explicitamente parte de nenhuma crítica à prova, bem poderia servir de apoio para os argumentos que enfatizam seu caráter *sui generis*: sua suposta “empiricidade” estaria associada não apenas ao fato da utilização de um artefato computacional relativamente insólito, mas também ao fato de ter sido produzida por muitas mãos – o que, irredutivelmente, impediria sua reproduzibilidade por uma só pessoa em contextos distintos.

A partir disso seria possível comparar a verificação dos cálculos necessários às provas de redutibilidade com alguns processos experimentais nas ciências físicas – dada a existência de muitos casos de experimentos que não podem ser reproduzidos a não ser no mesmo contexto no qual foram originalmente realizados (pensemos, por exemplo, no recente experimento realizado no CERN, em busca da confirmação da existência do Bóson de Higgs). Retornaremos a esse tópico nos capítulos seguintes, avaliando a legitimidade dessa associação. Por ora nos parece oportuno apenas sublinhar que se o argumento da “empiricização” de provas a partir de sua produção (e verificação calculatória) coletiva valer para o T4C, deve valer também para o caso emblemático da prova do teorema da classificação dos grupos finitos simples – que, tal como se descreve D. Gorenstein, possui algo entre 10.000 e 15.000 páginas. É claro, nota o autor, que



Não é uma pessoa sozinha a responsável pelo resultado, nem o tamanho da prova é devido a cálculos computacionais imensos (embora computadores tenham sido empregados em algum ponto da análise). Ao contrário, o trabalho é uma combinação de esforços de mais de 100 matemáticos, sobretudo norte-americanos, ingleses e alemães, mas também australianos, canadenses e japoneses. A prova completa está espalhada entre as páginas de cerca de 500 artigos em periódicos técnicos, quase todos publicados entre fins da década de 1940 e 1980. (Gorenstein, 1985, p. 92)

### 2.3 Primeiras reações e respostas

As reações da comunidade matemática e informática à prova de Appel e Haken foram bastante divergentes entre si: por um lado, muitos matemáticos não aceitaram (e muitos até hoje não aceitam) que provas auxiliadas por computadores possam ser matematicamente relevantes. Primeiro porque, tal gênero de prova não apresentaria satisfatoriamente *o porquê* da verdade do teorema provado – apesar de haver algum tipo de certificação de *que* a prova, no caso a prova do lema principal da prova do T4C, existe, dados os *outputs* do computador. Em resumo, alguns reclamam que a prova não é explicativa – crítica que se encontra, por exemplo, no livro de Ian Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*:

[A prova de Appel e Haken] não fornece uma explicação satisfatória de por que o teorema é verdadeiro. E isso ocorre em parte porque a prova é tão longa que é difícil de compreender [*grasp*] (incluindo os cálculos do computador, impossível!), mas principalmente por ser aparentemente sem estrutura [*structureless*]. A resposta aparece como um tipo de monstruosa coincidência. Por que existe um conjunto inevitável de configurações redutíveis? A melhor resposta até o momento é: ele existe. A prova: aqui está, veja você mesmo. A busca dos matemáticos pela estrutura oculta, sua urgência por padrões de relação, é frustrada. (Stewart, 1981, p. 304)<sup>20</sup>

Isso certamente possibilita que se levantem questões sobre a relação entre esse *saber-que* e o desejado *saber-por que* o conjunto inevitável de configurações redutíveis existe, bem como a relacionada questão acerca da relação entre prova e explicação, que serão ativadas no capítulo seguinte. De todo modo nos parece necessário desde já notar que uma boa razão para a existência do referido conjunto deveria poder ser fornecida independentemente do uso de computadores na prova,

<sup>20</sup> Cf. também pp. 300-301, onde se lê a equivocada afirmação, por razões que apresentaremos em breve, de que qualquer erro individual ao longo da cadeia calculatória pode “destruir completamente a prova”.

uma vez que a necessidade de construção desse conjunto já estava dada desde a primeira tentativa de prova do T4C, que foi gradativamente aperfeiçoada até a versão de Appel e Haken. Que a “aparente falta de estrutura” implique em sua não-explicatividade ainda está para ser analisado.

Em segundo lugar, uma espécie de “lenda urbana”<sup>21</sup> fazia pairar desconfiança quanto à correção dos programas executados. Programadores experimentados e cientistas da computação tendem a considerar a prova insatisfatória não apenas por conta da deselegância de seu extrato computacional, como mencionamos acima, mas porque os programas executados não foram submetidos à verificação formal – procedimento que garantiria a impossibilidade de erros na parte automatizada do processo. Um rápido esclarecimento a esse respeito pode ser feito com base num texto relativamente recente de Dag Prawitz sobre o tema da verificação formal de provas e programas:

Quando um programa é escrito, usualmente tenta-se aperfeiçoá-lo por tentativa e erro. O programa é executado de muitas maneiras e, quando encontrados, *bugs* são removidos. Há, entretanto, uma preocupação crescente de que tais métodos indutivos para testar programas não sejam suficientes, especialmente quando podem ocorrer grandes danos resultantes do mau funcionamento dos programas (...). É claro que uma resposta simples e tradicional à questão acerca da diferença [entre métodos indutivos e dedutivos] é que uma prova dedutiva garante a verdade do que é provado, enquanto uma prova indutiva não o faz. Em particular, se um programa é provado correto, então ele é correto; assim ele faz como deveria e qualquer mau funcionamento depende do *hardware*, não do programa, enquanto se o problema for provado apenas indutivamente, tal garantia não existe. (Prawitz, 2008, p. 82)

Esse concernimento pode ser observado precisamente no caso da recepção negativa da prova do T4C, com exceção ao aspecto da preocupação com “grandes danos resultantes do mau funcionamento dos programas” – pois Prawitz refere-se a programas com aplicações práticas em sistemas ferroviários, telefônicos e nucleares.

Por outro lado, os autores, e pelo menos um matemático ligado ao desenvolvimento da prova (E.R. Swart), defenderam-se da acusação de ilegitimidade da omissão de uma prova formal dos programas com um argumento de ordem *retórico-dialética*, para emprestar o vocabulário utilizado por Lassalle

---

<sup>21</sup> A expressão encontra-se em MacKenzie, 2001, p. 139.

Casanave em outra ocasião.<sup>22</sup> Para os autores a aceitação de tais procedimentos depende de uma (dupla) familiarização do “auditório”: não somente com o modelo de procedimento de prova, princípios e métodos típicos em teoria dos grafos – é o caso do texto de Swart – mas também com os conceitos e métodos computacionais particularmente envolvidos na prova do T4C – é o caso, por exemplo, da defesa que encontramos em diversos textos de Appel e Haken.<sup>23</sup>

Swart nota que a prova do T4C é, num sentido bastante relevante, e que parece escapar aos críticos, como qualquer outra prova nesse ramo da matemática. Elas podem ser divididas em três partes:

- (i) O estabelecimento do fato de que o teorema é verdadeiro dado um determinado conjunto de grafos, configurações, ou – em geral – casos que possuam (ou circunstancialmente não possuam) uma propriedade estipulada;
- (ii) A obtenção de uma lista exaustiva desses casos;
- (iii) A confirmação de que todos os membros desse conjunto possui a propriedade requerida. O conjunto finito de casos referidos pode, em um dos extremos, ser tão pequeno e tão simples que o teste de casos pode ser feito em nossas cabeças ou pode, no outro extremo, ser tão extenso e/ou complicado que é impossível de ser levado a cabo sem o auxílio de um computador. (Swart, 1980, p. 699)

Em um dos textos acima mencionados, pronunciado no *Symposium on New Kinds of Mathematical Proofs* (em abril de 1982), Appel, a seu turno, afirma:

Muitos matemáticos com algum *background* em programação se satisfariam com uma cópia do programa, algum modo de verificar que os *inputs* foram digitados corretamente e algum *output* que indicasse que o programa rodou até o final. Qualquer leitor que permanecesse preocupado poderia facilmente programar um algoritmo (...) para seu próprio computador, digitar os *inputs* e rodar um programa para verificar. (Appel, 1984, p. 36)<sup>24</sup>

Quanto aos programas não terem sido formalmente verificados, Appel e

<sup>22</sup> “Entre la retórica y la dialectica”, texto acerca da concepção de prova de O. Chateaubriand (Lassalle Casanave, 2008). É importante destacar que se trata da retórica e da dialética de matrizes aristotélicas. Nesse sentido, o aspecto retórico da filosofia da matemática de Chateaubriand diria respeito à sua preocupação com os diferentes contextos de enunciação/realização das práticas matemáticas de prova (a “campo-dependência” de S. Toulmin em *Os usos do argumento*): a sala de aula, os colóquios matemáticos, as publicações para especialistas e para o grande público, etc, bem como à utilização de entimemas (no sentido de premissas não enunciadas cuja plausibilidade é aceita pelo auditório em questão, que “são sabidas por todos”); já o aspecto dialético diria respeito à pressuposição de um auditório de *experts* responsáveis pela avaliação/verificação das provas.

<sup>23</sup> Appel & Haken, 1978; Appel, 1984; Appel & Haken, 1986.

<sup>24</sup> Retomaremos o ponto sobre a facilidade da reprodução da prova quando considerarmos os tópicos da filosofia da matemática de Wittgenstein, uma vez que para esse último a facilidade na reprodução chega a ser um dos critérios para identificação de provas.

Haken consideram que a verificação indutiva da não existência de *bugs* os liberou de qualquer resposta. Eles mais uma vez indicam justificativas de ordem retórico-dialética como quando afirmam que a questão da credibilidade da prova depende em grande parte da idade do público. Appel descreve que na audiência de uma palestra sobre o T4C proferida pelo filho de Haken<sup>25</sup> enquanto os mais velhos perguntavam “Como você pode acreditar numa prova que faz tamanho uso pesado de computadores?” os mais novos indagavam “Como você pode acreditar numa prova que depende da corretude de 400 páginas de verificação manual detalhada?”

Nesse sentido MacKenzie ainda destaca o fato de que quando a prova foi descrita pela primeira vez em público em 1976, num encontro em Toronto, a desconfortável audiência demandava ao “core set” (o grupo de matemáticos que tentava resolver o problema com método similares, o auditório de especialistas aos quais nos referimos na nota 22 acima) se eles estavam convencidos de que Appel e Haken tinham construído uma prova com seus método de análise de redutibilidade. E eles responderam unanimemente que sim. Quanto à deselegância dos programas, os autores afirmam:

Em uma prova puramente matemática e engenhosa como a [prova de Andrew Wiles] do último teorema de Fermat... algo relativamente simples pode ser ignorado, e isso pode destruir tudo... A nossa é muito mais primitiva, e não há nenhuma grande ideia engenhosa, apenas coisas técnicas. Mas... o número de conjuntos inevitáveis é tão grande e precisamos apenas de um deles. E se há um erro, um erro técnico em algum deles, podemos produzir outro conjunto inevitável de configurações redutíveis. É impossível que um *bug* num programa ou um erro no trabalho feito a mão destrua isso”. (Appel & Haken, entrevista citada em MacKenzie 2001, p. 141)

A “lenda urbana” sobre erros na execução mecânica dos cálculos de que fala MacKenzie tinha, é verdade, algo a que se referir: tratava-se, entretanto, de erros *tipográficos* e não, como se sugeria, de qualquer *bug* no programa de análise de D-redutibilidade. Os erros foram descobertos durante a década de oitenta não apenas por alguns estudantes independentes, mas pelos próprios autores da prova. Um dos universitários, Ulrich Schmidt – aluno de engenharia elétrica interessado no teorema por conta da analogia possível com processos de checagem de design de chips para computador – encontrou o único erro que poderia ser considerado relevante na prova. Ele não se encontrava na prova relativa aos procedimentos de redutibilidade, mas na

---

<sup>25</sup> Em Berkeley, em 1977. (Cf. Appel 1984, p. 35)

prova da inevitabilidade do conjunto de configurações a serem provadas redutíveis. Pode-se dizer que todos os demais erros eram “locais” – os únicos que podem ser irrelevantes, pois se trata de um tipo de erro que “não interfere no resultado final da derivação.”<sup>26</sup>

Sobre outros erros mais tarde encontrados, foi desenvolvido um “procedimento de correção de erro” (Appel & Haken, 1986, p. 20), e ao final da década de oitenta todos haviam sido reportados e corrigidos (Fritsch & Fritsch, 1998, p. 36). Appel e Haken explicam, no artigo que acabamos de citar<sup>27</sup>, que se podem distinguir três graus de seriedade desses erros, mostrando como o erro encontrado por Schmidt pode ser corrigido sem afetar o resultado final do procedimento – em outras palavras, não se tratava de um erro relevante (no sentido exposto na nota 26).

Ao finalizar a apresentação das noções principais e desses pequenos extratos de história da prova, gostaríamos de retomar o tema do início do capítulo, que reapareceu de modo algo difuso ao longo de nossa exposição: a simplicidade da formulação do problema associada à complexidade de sua solução. É bem verdade que “complexidade” é atributo de múltiplas aplicações. Em nosso caso, a diferentes tipos de prova. Assim, talvez seja interessante mencionar, seguindo Pudlák (Pudlák, 1998, p. 551), que existem diferentes medidas de complexidade de provas. Pode-se considerar:

i) seu *tamanho* (entendido aqui como o comprimento do código ao qual se faz corresponder o alfabeto finito e a codificação de provas como sequências de palavras nesse alfabeto), ou

ii) o *número de linhas* da prova (diferente da primeira medida, já que podem haver fórmulas extensas, que seriam contabilizadas de modo diferente nos dois casos), ou

iii) a *complexidade maximal* da prova (a complexidade do quantificador ou o número de símbolos lógicos).

Pudlák ainda nota que a comparação dessas medidas de complexidade com

<sup>26</sup> A ideia da distinção entre erro relevante e irrelevante foi sugerida por Frank Thomas Sautter em comunicação pessoal.

<sup>27</sup> Trata-se de uma publicação na revista *The Mathematical Intelligencer*, cujo editor Ihes havia solicitado que escrevessem um artigo para dissipar toda a confusão possível [*to set the record straight*] em torno das “fococas matemáticas” sobre erros na prova. Os autores, em resumo, alegam que os rumores “parecem ser devidos à falta de compreensão dos resultados das verificações independentes de U. Schmidt.” (Appel e Haken, 1986, p. 10)

as medidas de complexidade computacional mostra que o tamanho da prova pode corresponder

iv) ao tempo utilizado para apresentar ou verificar uma prova.

Sendo assim, podemos afirmar que a prova do T4C é complexa, sobretudo nos sentidos ii) e iv) – pois, como vimos acima, foram necessárias 1200 horas de computação em 3 computadores diferentes para provar o lema principal.

Os próprios Appel e Haken, como vimos, teceram algumas observações acerca dos diferentes graus de dificuldade a serem considerados antes de classificar a prova do T4C como complexa. Além da distinção entre complexidade lógica e calculatória da primeira parte do artigo que apresenta a prova, eles o fizeram em ao menos duas ocasiões distintas. Num artigo de 1977, Haken afirma que no que concerne a conjecturas em aberto, como (então) o Último Teorema de Fermat, a Hipótese de Riemman ou a Conjectura de Poincaré, as dificuldades podem ser explicadas em uma das três seguintes maneiras – onde “‘fácil’ quer dizer algo para o qual, logo após a formulação da conjectura, uma prova ou um contra exemplo foram encontrados.” (Haken, 1977, p. 198):

(D.1) Existe uma prova, mas é difícil de encontrar.

(D.2) Não existe uma prova, nem um contra-exemplo.

(D.3) Existe um contra-exemplo, mas é difícil de encontrar.

Além disso, Haken alega que se uma conjectura for difícil no sentido (D.1), pode-se esperar um de dois casos:

(D.1a) Há uma prova curta, mas (por razões psicológicas, históricas ou outras) difícil de encontrar;

(D.1b) A menor prova possível é tão longa que é tecnicamente difícil (ou mesmo fisicamente impossível) de provar.

A prova do T4C, como é de se esperar, classifica-se no caso (D.1b), apesar de ser “logicamente simples” (Haken, 1977, p. 199). Que ainda hoje existam matemáticos tentando construir uma prova mais simples do T4C, não há razão para duvidar, uma vez que existem ao menos duas “versões” técnica e conceitualmente distintas da prova de Appel e Haken.

A primeira revisão foi produzida no final da década de 1990 por Roberson, Sanders, Seymour & Thomas (1997), combinando, do mesmo modo que a versão original, argumentos textuais e códigos computacionais. A segunda é a versão completamente formalizada fornecida em 2005 por G. Gonthier na rede mundial de computadores – na qual inovações “gêmeas” de ordem técnica e conceitual<sup>28</sup> reduzem significativamente a complexidade computacional da prova.

Appel e Haken, entretanto, hesitavam com relação a uma possível eliminação do componente computacional:<sup>29</sup>

A lista de configurações utilizada claramente não é a menor possível. É bastante provável que combinando pequenas modificações no algoritmo de descarga, análises adicionais e procedimentos de redução mais sofisticados, o número de configurações utilizadas na prova poderia ser reduzido em ao menos vinte e cinco por cento. Parece improvável, entretanto, que o teorema possa ser provado por esses métodos de um modo que evitasse o uso massivo de computações que requerem o uso do computador. Essa última conclusão é fundamentada pelo trabalho de E. F. Moore e também em cálculos probabilísticos dos autores que indicam que um tal argumento sempre requer configurações de tamanho quatorze. (Appel & Haken, 1976, p. 712)

Em outra ocasião, já mencionada, que constitui um episódio de debate em torno da prova, Appel oferece uma classificação de provas um pouco distinta da de Haken, na qual sugere ajustar a prova do T4C:

Denominarei uma prova de *facilmente replicável* se ela realizar repetido uso de algoritmos diretos que são facilmente programáveis e são assim verificáveis por um leitor interessado sem maior esforço. (...) Argumento que nossa prova do T4C é facilmente replicável (ao menos quanto a seu componente computacional). (Appel, 1984, p. 36)

<sup>28</sup> Cf. “Formal Proof: The Four Color Theorem” (Gonthier, 2008), publicado no volume especial sobre provas formais das *Notices of the American Mathematical Society* (edição de dezembro de 2008). A principal modificação de ordem técnica diz respeito ao uso de um sistema formal de prova – também chamado *assistente de prova*, na completa formalização da mesma. Trata-se de um sistema baseado em uma versão da lógica de ordem superior (o Cálculo de Construções Indutivas) cujos principais aspectos são determinados pela Teoria dos Tipos e não pela tradicional Lógica de Primeira Ordem. A inovação conceitual/técnica da versão formalizada de Gonthier, resultado do uso do referido sistema formal como assistente de prova, consiste na construção do conceito de *hipermapa* planar.

<sup>29</sup> Mas não apenas eles: Saaty & Kainen afirmam, na sequência de seu comentário sobre o uso de programas computacionais na prova do T4C: “The third point we want to raise about computer involvement is that it was essential to the proof. In fact, any proof of the four-color theorem via Kempe chains and reducibility must be extremely complex, requiring computer assistance.” (Saaty & Kainen 1986, p. 95) Tymoczko faz, como veremos no terceiro capítulo, um uso bastante radical dessas opiniões.

Se, por um lado, gostaríamos de insistir que estamos investigando uma prova cuja estrutura, enquanto estratégia geral, é simples, num sentido que poderíamos chamar de qualitativo, também não podemos deixar de observar a insuficiência da qualificação da prova como quantitativamente complexa. Talvez esse gênero de dúplice distinção não seja suficiente para dar conta do que está em jogo aqui. Isso porque se retomarmos panoramicamente o acima exposto, mostra-se que foram necessários inúmeros desenvolvimentos matemáticos distintos (conceitos e teoremas em teoria dos grafos, topologia e combinatória), bem como avanços técnicos e conceituais na própria ciência da computação, para que essa prova – que gostaríamos, junto com seus autores, de caracterizar como logicamente simples – fosse levada a cabo.<sup>30</sup>

Esse aspecto da construção da prova parece-nos diretamente relacionáveis com algumas observações originais de Wittgenstein acerca do estatuto das provas matemáticas – especificamente à ideia de que são apenas as provas que determinam o sentido matemático dos teoremas – que uma vez provados passam a constituir um sistema de proposições – e, mais geralmente, a ideia de que uma maneira acertada de considerar a matemática é como “uma variedade multicolorida/polimorfa de técnicas de prova.” (Wittgenstein, RFM III, §46). Esperamos estar em melhores condições de verificar a aplicabilidade dessas e outras ideias de Wittgenstein<sup>31</sup> ao analisar o modo como foram acionadas nas disputas filosóficas em torno da prova do T4C. Apostamos que as considerações acima aventadas, acerca da possibilidade de leitura do início das disputas em termos de aspectos retórico-dialéticos das práticas matemáticas de prova, não apenas se confirmam desde uma perspectiva wittgensteineana como podem contribuir com o esclarecimento de alguns pontos nebulosos que configuram a trama daquelas controvérsias.

---

<sup>30</sup> Isso sem notar, como o fazem Saaty e Kainen, que “há literalmente dezenas de variações na conjectura das quatro cores que modificam sua formulação da coloração de vértices para a coloração de arestas, modificando vértices do mapa, resolvendo equações diofantinas, encontrando as raízes de polinômios, e assim por diante.” (Saaty & Kainen, 1986, p. 99)

<sup>31</sup> Essas outras ideias são: a suposta exigência de que as provas tenham a propriedade da *Übersichtlichkeit* (traduzida por Anscombe ora como *surveyability*, ora como *perspicuity*. A tradutora francesa optou por *sinopticit * e a brasileira versa *Übersicht* como visão sin ptica. Teremos a oportunidade de trabalhar questões conceituais dessa tradu o nos dois capítulos finais); a outra   a fulcral distin o entre provas e experimentos, para a qual um dos principais critérios   a sinopticidade.



### 2.3.1 Primeiros pronunciamentos filosófico-matemáticos

Quanto a publicações de cunho filosófico, parece que Georg Kreisel foi um dos primeiros a mencionar o caráter incomum da prova do T4C (Kreisel, 1977). Em uma passagem típica de seu estilo (a interrupção do texto em forma de *nota bene*, avisos ao leitor, etc), o autor observa o seguinte:

(a) não se pode esperar que a importância do uso de computadores na matemática ilustrada seja comparável ao uso vulgar, a mera computação de alta velocidade; é um truísmo a afirmação de que o uso de computadores *na* matemática é apenas uma pequena parcela de seu todo;

(b) mesmo que um programa computacional seja útil, não se pode esperar que uma matemática *inteligente* desempenhe algum papel importante.<sup>32</sup>

Appel e Haken parecem discordar do ponto (b) de Kreisel quando, ao afirmar que experimentos computacionais foram utilizados para aperfeiçoar algumas ideias da prova, alegam que o computador “agia como uma máquina de jogar xadrez (...) estava compondo estratégias baseadas em todos *os truques que lhe haviam sido ensinados.*” (Appel e Haken 1977, p. 108) Além disso, asseguram que “as novas abordagens eram frequentemente muito mais inteligentes do que as que havíamos tentado” (*loc. cit.*) para então concluir que “em um sentido, o programas estavam demonstrando superioridade não apenas na parte mecânica da tarefa, mas também em algumas áreas intelectuais.” (*loc. cit.*) Talvez essas e outras afirmações<sup>33</sup> sejam um caso de prosa em torno da prova que Wittgenstein consideraria espúrio – ideia que esperamos estar em condições de avaliar no capítulo final.

<sup>32</sup> O que para Kreisel se justificaria com o exemplo da pesquisa operacional, na qual “raramente obtem-se ganho de eficiência com alguma ferramenta matemática para resolver um problema (de decisão).” (Kreisel, 1977, p. 66).

<sup>33</sup> “Ainda não sabemos se uma prova menor do T4C pode ser encontrada. (...) Embora seja concebível que uma dessas provas [anunciadas como menores] sejam válidas, é também concebível que a única prova correta seja baseada em conjuntos inevitáveis de configurações redutíveis e que, assim, exijam computações que não podem ser executadas à mão.” (Appel e Haken, 1978, p. 121)

Interessa-nos, de fato, a classificação que Kreisel oferece de três usos possíveis de computadores na matemática: na *descoberta* de provas de conjecturas, na *verificação* de provas já existentes e na *transformação* de provas<sup>34</sup>. É no contexto dessa distinção que Kreisel faz referência à prova do T4C como *exceção ocasional* às notas (a) e (b). Assim: (c) uma vez que a *descoberta* da prova dependeu essencialmente do uso de computadores não seria razoável tentar uma *verificação* na qual o procedimento mecanizado não desempenhasse o mesmo essencial papel (Cf. Kreisel, 1977, p. 66).

Vale ainda notar que, no mesmo ano do artigo de Kreisel, Hao Wang profere uma série de palestras na Academia Chinesa de Ciências, nas quais ocorre uma menção à prova do T4C. Nessas palestras, mais tarde publicadas em *Popular Lectures on Mathematical Logic*, toda uma seção do capítulo sobre computadores é dedicada à prova de Appel e Haken. Embora publicadas somente em 1981, as considerações de Wang, como as de Kreisel, são interessantes como ponto de comparação com a postura de Thomas Tymoczko no artigo seminal de 1979, quando tivermos a ocasião de apresentá-la no terceiro capítulo. Não é nem de longe verdade que se possa situar as posturas dos dois matemáticos/filósofos dentre aquelas que levantam dúvidas quanto à “matematicidade” dos métodos e resultados implicados na prova do T4C. Wang, por exemplo, afirma:

Esse tipo de *uso auxiliar e local* de computadores como um apoio na prova de teoremas tem sido feito de tempos em tempos, notadamente por D. H. Lehmer. Ele toma a forma do *destacamento de partes específicas que exigem extensas computações numéricas ou combinatórias para suplementar o fluxo conceitual dos argumentos* que conduzem a uma prova do teorema. Para descrever tais usos, podemos falar de mecanização oportunista ou *ad hoc* da prova de teoremas. (Wang, 1981, p. 45, grifos nossos)

Wang observa, numa veia bastante leibniziana, que normalmente ficamos enfadados e cansados com a rigidez e o rigor da “linguagem da máquina” (as instruções do programa “traduzidas” em codificações de “zeros” e “uns”, a única “linguagem” que a máquina “entende”). O vínculo das observações de Wang com os temas leibnizianos relativos ao conhecimento simbólico e suas funções – dentre as quais se deve destacar a função calculatória, também entendida como

---

<sup>34</sup> Uso implicado em seu projeto de transformação (*unwinding*) de provas através de métodos desenvolvidos em teoria da prova, exemplificados na terceira parte do artigo, bem como no apêndice. “Por exemplo, uma prova *prima facie* não construtiva de um teorema existencial [pode ser transformada] em uma realização, uma prova analítica de um teorema algébrico [pode ser transformada] em uma prova algébrica, e coisas do tipo.” (Kreisel, 1977, p. 65)

pensamento cego<sup>35</sup> – parece ficar evidente com a leitura de algumas passagens de Leibniz, como a escrita em 1685:<sup>36</sup>

E agora que podemos realizar o elogio final da máquina temos licença para dizer que ela será desejável por parte de todos os envolvidos em computações que, como é bem sabido, são os gerentes de assuntos financeiros, os administradores dos patrimônios alheios, mercadores, fiscais [*surveyors*], geógrafos, navegadores, astrônomos... Limitando-nos, porém, aos usos científicos, as antigas tabelas geométricas e astronômicas poderiam ser corrigidas e novas construídas, com a ajuda das quais poderíamos medir todos os tipos de curvas e figuras... será válido estender o quanto possível as principais tabelas Pitagóricas; as tabelas de quadrados, cubos, e outras potências; e as tabelas de combinações, variações, e progressões de todos os tipos, ... Também os astrônomos certamente não terão de continuar a exercitar a paciência requerida para computar.... Pois é impróprio a homens excelentes perder horas como escravos no trabalho de cálculo que poderia seguramente ser relegado a qualquer outro se a máquina fosse utilizada. (Leibniz, 1685)

Nesse sentido é interessante observar também uma passagem do acima referido artigo de Appel na qual a prosa em torno da prova não é, ao contrário do diagnóstico geral de Wittgenstein, inócua, mas frutífera:

a não ser que possa ser verificada em um tempo razoavelmente rápido, [uma prova do teorema das quatro cores] dependeria da existência de um verificador humano que fosse inumanamente paciente, acurado e incansável, que tivesse propriedades encontradas apenas por computadores. Uma vez que são essas as propriedades necessárias para que o trabalho seja feito corretamente, sugiro a utilização de computadores. (...) Gostemos ou não, *surgiu um novo método de esforço humano assistido que realiza o trabalho mais acurada e eficientemente do que pode o homem e de fato promove a compreensão humana do que efetivamente foi feito.* (Appel, 1984, p. 39, grifo nosso)

## 2.4 Como conclusão

No presente capítulo descrevemos um acontecimento matemático de um ponto de vista histórico-conceitual. Vimos que ele teve origem em um problema sem aplicação fora da matemática; que dependeu de uma série de

<sup>35</sup> Oscar Miguel Esquisabel fornece uma profícua investigação sobre o conceito leibniziano de conhecimento simbólico, com o qual está em estrita relação o de conhecimento cego (*cognitio caeca, pensée surde* ou *vide* na expressão de Leibniz) no recente *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*, Lassalle Casanave (Ed.), 2012a.

<sup>36</sup> Trata-se de *Machina arithmetica in qua non additio tantum et subtractio sed et multiplicatio nullo divisio vero pæne nullo animi labore perangantur* – escrito alguns anos após a invenção de uma máquina calculadora similar àquela inventada anos antes por Blaise Pascal. Citado em *A source book in Mathematics* (Smith, 1929).

desenvolvimentos em distintos domínios matemáticos – desenvolvimentos que, por sua vez, vieram a ocorrer justamente por causa da obstinação em encontrar uma solução para o irresoluto problema, em versões cada vez mais abstratas, conceitual e tecnicamente elaboradas. Vimos também o modo como algumas ideias fundamentais implicadas nesse acontecimento foram assimiladas e progressivamente transformadas, além do fato de que sua estrutura geral é a mesma desde a primeira tentativa de engendrá-la: uma prova por redução ao absurdo que inclui uma prova por casos com um número imenso de casos. A solução para o problema – a prova do T4C – dependeu, por conta da quantidade de casos e do modo como se determinou sua construtibilidade, da execução de programas computacionais.

Após mencionarmos algumas reações à prova elaboradas por matemáticos e especialistas em programação, apresentamos as considerações de dois lógicos/matemáticos/filósofos, Kreisel e Wang, bastante dessemelhante com relação ao diagnóstico elaborado no artigo que deu origem às disputas filosóficas que nos concerne examinar. Advoga-se ali pela importância da prova do T4C em termos do desafio que ela lança para a filosofia da matemática, posto que teria ocasionado uma espécie de falência múltipla de suas crenças mais básicas: em primeiro lugar, tratar-se-ia da ruína de uma determinada concepção corrente de teorema e de prova matemáticos; em segundo lugar, cairia definitivamente por terra a clássica alegação de que todas as verdades necessárias (para as quais as verdades matemáticas são o paradigma) são conhecidas *a priori* – o que por sua vez conduziria à conclusão de que certas balizas tradicionalmente aceitas como critérios de demarcação entre a matemática e as ciências empíricas estariam definitivamente fadadas à supressão.

Apresentaremos no terceiro capítulo os principais pontos desse que denominamos de *argumento da introdução da experimentação na matemática via prova do T4C*, de T. Tymoczko. Destacaremos algumas de suas imprecisões, apontando também para o que nos parece estar justamente apreciado em sua leitura das inovações que o T4C representa nas práticas matemáticas. Antes disso, entretanto, traçaremos no capítulo seguinte algumas distinções que, esperamos, servirão como padrão de fixação de alguns eixos das análises que realizaremos nos capítulos subsequentes.